

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOCIETATIS PHYSICAE HELVETICAE
COMMENTARIA PUBLICA

VOLUMEN XVII

BASILEAE • IN AEDIBUS E. BIRKHAUSER & CIE.
MCMXXXIV

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOEITETVLEH EACISYNE ACTA 11008

ACIETIS AIXYTHNNOB

Schweizerische Physikalische Gesellschaft

Copyright 1944 by: Société Suisse de Physique

Società Fisica Svizzera

IVX MEMU DOV

Druck von Emil Birkhäuser & Cie., A.G., Basel

Un modèle de l'électron ponctuel II *) 2)

par E. C. G. Stueckelberg.

(29. X. 1943.)

Résumé: Un modèle de l'électron ponctuel, plus général que celui proposé en I²⁾, est discuté. L'électron n'interagit qu'avec le champ de Maxwell. En théorie classique, son mouvement ressemble beaucoup à celui de l'électron étendu de Lorentz. Par un principe de correspondance, le modèle peut être transcrit en théorie quantique, sans que des divergences apparaissent. Les formules ainsi obtenues montrent une très grande analogie avec celles obtenues par HEISENBERG³⁾ dans sa récente théorie.

§ 1. Le modèle classique de l'électron.

Il est possible de donner une théorie classique de l'électron ponctuel^{1) 2)} sans se servir d'une électrodynamique non linéaire. Le procédé essentiel pour éviter les infinités doit être considéré en détail; aussi allons-nous rapidement le décrire pour insister sur certaines de ses caractéristiques. Sur une particule (électron) placée à l'endroit \tilde{q} au temps t , l'expérience montre que d'autres particules peuvent agir. C'est l'arrangement dans le cône du passé de $q = (\tilde{q}, t = q^4)$, qui détermine cette action. On la décrit par un champ $\varphi(x) = \varphi(\tilde{x}, t)$ qui contiendra les particules comme des singularités. La théorie du champ qu'on désire établir doit fournir les équations permettant de calculer le champ $\varphi(x)$ et le mouvement de la particule (ou sa ligne d'univers $q = q(\lambda)$). On part alors des principes de conservation détaillée de l'énergie-impulsion. On suppose qu'il existe une densité d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}(x)$ qu'on exprime sous forme de $T^{\mu\nu}(\varphi(x))$ en fonction de $\varphi(x)$ et de ses premières dérivées de la façon la plus simple. Les principes de conservation sont alors la loi de continuité et les relations de symétrie

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0; \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (1,1)$$

Il est utile de définir la densité de force $F^\mu(x)$ et le quadrivecteur d'énergie-impulsion p^μ

$$F^\mu(\tilde{x}, t) = \partial_\nu T^{\mu\nu}(\tilde{x}, t); \quad p^\mu(t) = \int_{\tilde{x}} (dx)^3 T^{\mu 4}(\tilde{x}, t) \quad (1,2)$$

*) Dédié à M. le prof. A. SOMMERFELD à l'occasion de son 75^{ème} anniversaire.

La force sur la particule est alors

$$f^\mu(t) = \int_{v(\tilde{q})} (dx)^3 F^\mu(\tilde{x}, t) \quad (1,3)^*$$

$v(\tilde{q})$ étant alors un volume arbitrairement petit mais contenant la singularité $\tilde{x} = \tilde{q}(t)$. Pour que (1,2) et (1,3) aient un sens, on voit qu'il faut que les singularités contenues en $T^{\mu\nu}$ et F^μ soient intégrables.

Voyons maintenant comment ces singularités peuvent s'exprimer. Dans une théorie linéaire, il y a superposition et, par conséquent, le champ agissant sur une particule est dû aux actions individuelles de chaque particule et l'on peut donc décomposer φ en

$$\varphi = \varphi^{(\text{ret})} + \varphi^{(\text{inc})} \quad (1,4)$$

où $\varphi^{(\text{ret})}$ est le champ retardé agissant sur la particule considérée dû au passé de cette particule et $\varphi^{(\text{inc})}$ le champ incident sous forme d'onde dû aux autres particules. On peut toujours écrire

$$\begin{aligned} \varphi^{(\text{ret})} &= \varphi^{(\text{sym})} + \varphi^{(\text{rad})}; & \varphi^{(\text{sym})} &= \frac{1}{2} (\varphi^{(\text{ret})} + \varphi^{(\text{av})}); \\ \varphi^{(\text{rad})} &= \frac{1}{2} (\varphi^{(\text{ret})} - \varphi^{(\text{av})}) \end{aligned} \quad (1,5)$$

$\varphi^{(\text{av})}$ étant le champ avancé de la particule considérée. On voit facilement que les singularités de $\varphi^{(\text{ret})}$ sont toutes contenues en $\varphi^{(\text{sym})}$ parce que $\varphi^{(\text{rad})}$ est une solution de l'équation d'onde homogène. Quand on construit $T^{\mu\nu}$ à partir de φ de la façon la plus simple, les singularités de $T^{\mu\nu}$ et de F^μ ne sont pas intégrables. On arrive, avec ces suppositions simples, à la théorie classique munie de toutes ses difficultés. Pour éviter cela, on complique la dépendance de $T^{\mu\nu}$ de φ . Voici comment on procède:

On peut toujours décomposer $T^{\mu\nu}$ et F^μ en deux parties:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu}(\dots) + T^{\mu\nu}(\text{sym}) \\ F^\mu &= F^\mu(\dots) + F^\mu(\text{sym}) \end{aligned} \quad (1,6)$$

où la deuxième partie ne dépend plus de $\varphi^{(\text{inc})} + \varphi^{(\text{rad})}$. On peut alors montrer que les singularités non intégrables sont contenues dans $T^{\mu\nu}(\text{sym})$ et $F^\mu(\text{sym})$. Ces termes du reste, ne contenant plus $\varphi^{(\text{inc})}$, ne peuvent être que des fonctionnelles de la fonction $q = q(\lambda)$. Alors on ajoutera, au $T^{\mu\nu}$ de la théorie simple, un $T^{\mu\nu(0)}(x)$ (donnant par (1,2) un $F^{\mu(0)}$) tel qu'il fasse disparaître les singularités non intégrables. Il est possible de montrer qu'une infinité de fonctionnelles peuvent être choisies pour avoir cet effet. Nous discuterons ci-dessous en détail le procédé que nous avons employé dans

*) f^μ n'est donc pas un quadrivecteur, mais seulement $f^\mu dt = f^\mu dq^4 = d p_{(v)}^\mu$.

I pour faire ressortir son arbitraire. Nous avons en effet ajouté au $T^{\mu\nu}$ du champ Maxwellien, le $T^{\mu\nu(0)}$ d'un *champ* scalaire (au lieu d'une simple fonctionnelle) de façon à ce que les parties singulières des termes $T^{\mu\nu(\text{sym})}$ dues à ces deux champs se compensent. La partie $T^{\mu\nu(\dots)}$ du tenseur du champ scalaire produisait des effets qui ne sont donc nullement nécessaires pour que la théorie converge, pas plus qu'il n'est nécessaire de se restreindre à des $T^{\mu\nu(0)}$ dont l'énergie est positive. Ces considérations empruntées à I nous donnent un moyen d'arriver simplement à des fonctionnelles $T^{\mu\nu(0)}$ nécessaires. Il suffira, comme on le voit, de prendre la partie $T^{\mu\nu(\text{sym})}$ d'un $T^{\mu\nu}$ fonction d'un champ Φ choisi de façon à avoir les mêmes singularités (mais en signe opposé) que le $T^{\mu\nu}$ simple dont on était parti. Le champ Φ différera ainsi du champ φ par la fréquence minimale κ de son rayonnement (= masse de repos de ses quanta). Nous appellerons dorénavant Φ le champ fonctionnel $\Phi^{(\text{sym})}$ et seul ce champ doit intervenir en $T^{\mu\nu(0)}$ pour qu'il ait conservation d'énergie pour particule et champ φ^*).

Pour établir les équations de mouvement, on procède en principe comme suit pour un champ φ scalaire (électrodynamique longitudinale si $\kappa = 0$): on définit le tenseur le plus simple

$$T_{(\kappa)}^{\mu\nu}(\varphi) = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi + \kappa^2 \varphi^2) \quad (1,7)$$

(avec $\kappa=0$) et le tenseur $T^{\mu\nu(0)}$ avec la même forme (au signe près) en fonction de Φ , mais avec un $\kappa_1 \neq \kappa$ non nul. De là, on tire

$$F^\mu = F^\mu(\varphi) + F^\mu(\Phi) = \partial^\mu \varphi \cdot (\square - \kappa^2) \varphi - \partial^\mu \Phi \cdot (\square - \kappa_1^2) \Phi = 0 \quad (1,8)$$

S'il n'y a pas de singularité, cette équation est satisfaite, si φ et Φ satisfont chacune séparément à une équation d'onde homogène. S'il y a une singularité $(\square - \kappa^2) \varphi$ doit être intégrable. Nous exprimons ceci en posant

$$(\square - \kappa^2) \varphi = (\square - \kappa_1^2) \Phi = -\varrho(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \varepsilon \delta(x - q(\lambda)) \quad (1,9)$$

où $\delta(x)$ est la fonction δ quadridimensionnelle d'espace-temps ($[\delta] = \text{cm}^{-4}$). L'équation de mouvement de la singularité suit alors de

$$\begin{aligned} f^\mu(t) = \int (dx)^3 (F^\mu(\varphi) + F^\mu(\Phi)) = \\ - (\dot{q}^4)^{-1} (\varepsilon \partial^\mu \varphi(\tilde{q}, t) - \varepsilon \partial^\mu \Phi(\tilde{q}, t)) = 0 \end{aligned} \quad (1,10)$$

*) Le choix d'une autre fonctionnelle $\Phi \neq \Phi^{(\text{sym})}$ mais ayant les mêmes singularités (par ex. $\Phi = \Phi^{(\text{ret})}$) a pour conséquence qu'une partie de l'énergie totale sera diffusée sous forme d'ondes $\Phi^{(\text{ret})}$ loin de la particule. Dans la fonctionnelle $\Phi^{(\text{sym})}$, la contribution de ces ondes Φ se réduit à une constante ajoutée à l'énergie-impulsion totale.

où $\partial^\mu \varphi(\bar{q}, t)$ est la valeur limite de la dérivée à l'endroit $\bar{x} = \bar{q}$. Moyennant les développements exposés en I (éq. (3,12), (3,15) et (3,22) de I), on tire de (1,10) dans le système de repos $\dot{\bar{q}} = 0$, si les amplitudes sont petites par rapport à la longueur d'onde de $\varphi^{(\text{inc})}$ et pour $\kappa = 0$:

$$m(\ddot{\bar{q}} + \lambda_1^2 \ddot{\bar{q}} + \dots) - \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \ddot{\bar{q}} = \varepsilon \text{grad } \varphi(\bar{q}, t) \quad (1,11)^*$$

ou

$$m = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum \alpha_i \kappa_i; \quad \sum \alpha_i = -1$$

$$m \lambda_1^2 = -\frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum \alpha_i \kappa_i^{-1}; \quad \dots; \quad m \lambda_n^2 = (\dots) \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum \alpha_i \kappa_i^{1-2n} \quad (1,14)^{**}$$

car en effet il n'est pas nécessaire de se restreindre à un $T^{\mu\nu(0)}$ formé d'un seul Φ , mais on peut prendre une série quelconque

$$T^{\mu\nu(0)} = \sum \alpha_i T^{\mu\nu}_{(\kappa_i)}(\Phi^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \sum \alpha_i = -1 \quad (1,15)$$

Cette généralisation correspond à prendre la fonctionnelle symétrique $T^{\mu\nu(0)}$ la plus générale, compensant les singularités du $T^{\mu\nu}(\varphi)$.

On a ainsi trouvé l'équation covariante la plus générale du mouvement d'une particule sous l'influence d'un champ $\varphi^{(\text{inc})}$, satisfaisant aux principes de conservation. (1,11) est sa forme limite pour $\dot{\bar{q}} = 0$ et pour des petites amplitudes. Elle contient, comme on le voit, une série de constantes arbitraires et indépendantes les unes des autres, dont la première est ce qu'on a convenu d'appeler

*) L'équation de mouvement qui suit de (1,10) n'admet pas la condition $\dot{q}^\alpha \dot{q}^\alpha < 0$ qu'on doit imposer à $q = q(\lambda)$ pour que les développements faits en I soient valables. Un terme

$$- \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \varepsilon \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \delta(x - q(\lambda)) \quad (1,12)$$

qu'on ajoute aux expressions (1,7) pour φ et pour Φ changera $F^\mu(\varphi)$ d'une telle manière que (1,10) devient

$$- \int \mu \dot{q}^\alpha = \varepsilon \partial^\mu \varphi + \varepsilon \dot{q}^\mu \ddot{q}^\alpha \partial_\alpha \varphi + (\varepsilon \ddot{q}^\mu + \varepsilon \dot{q}^\mu) \varphi - \text{termes en } \Phi = 0 \quad (1,13)$$

(1,13) admet alors la solution $\dot{q}^\alpha \dot{q}^\alpha = -1$ pour autant que $\dot{\varepsilon} = 0$. ε doit donc être une constante. Les solutions où ε dépend de λ sont discutées au § 3.

**) Des équations (7,1) et (7,5) de I (corrigées en omettant le terme $-(1/3)(\omega^2 - \kappa_1^2)^{3/2}$ en (7,5) dû au rayonnement Φ), il résulte que les séries en κ_i , κ_i^{-1} , κ_i^{-3} ... provenant de chaque $\Phi^{(i)}$ en (1,14) divergent à certains endroits. Il est alors plus exact de parler des fonctions η de $-(d/dt)^2$ au lieu des séries en $-(d/dt)^2$ en (1,11) et (1,17). Une discussion plus approfondi de $T^{\mu\nu(0)}$ paraîtra dans les C. R. Soc. Phys. Genève.

la masse de repos m et les autres définissent le « modèle » de l'électron. Le terme

$$\frac{1}{3} \frac{e^2}{4\pi} \ddot{\vec{q}} = m \lambda_0 \ddot{\vec{q}} \quad (1,16)$$

est en général considéré comme une force à laquelle on donne le nom de *force de freinage**). En termes de m , elle introduit une constante λ_0 ($[\lambda] = \text{cm}$) indépendante du modèle.

Voyons maintenant quelles relations il y a entre cette équation de mouvement (1,11) et les lois qui découlent de l'équation élémentaire de Newton. Pour cela, nous écrirons (1,11) dans la forme:

$$m \eta \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \ddot{\vec{q}} - m \lambda_0 \ddot{\vec{q}} = \vec{f}^{(\text{inc})}(t) \quad (1,17)$$

On voit que la fonction $\eta(\omega^2)$ est une fonction paire de ω qu'on peut exprimer sous forme de série (cf. Note **), page 6) en ω^2 , dont le premier terme est une constante égale à l'unité. $\vec{f}^{(\text{inc})}$ peut être analysé par l'intégrale de FOURIER

$$\vec{f}^{(\text{inc})}(t) = \vec{f}^{(0)} \tau h(t) = \vec{f}^{(0)} \tau \int d\omega e^{-i\omega t} h(\omega) \quad (1,18)$$

En faisant la même analyse pour $\ddot{\vec{q}}$, on trouve

$$m \ddot{\vec{q}}(t) = \vec{f}^{(0)} \tau \int d\omega e^{-i\omega t} \frac{h(\omega)}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0 \omega} \equiv \vec{f}^{(0)} \tau g(t) \quad (1,19)$$

comme solution particulière de l'équation de mouvement. En plus, en intégrant entre $t = -T$ et $t = +T$ ($\lim T \rightarrow \infty$), l'augmentation de la quantité de mouvement vaut

$$m \dot{\vec{q}}(+T) - m \dot{\vec{q}}(-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{f}^{(\text{inc})}(t) \quad (1,20)$$

car les intégrales (1,18) et (1,19) ont, dans cette limite, toutes les deux la valeur

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \int d\omega \frac{\sin \omega T}{\omega} \frac{h(\omega)}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0 \omega} \\ = 2\pi \int d\omega \delta(\omega) \frac{h(\omega)}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0 \omega} = 2\pi h(0) \end{aligned} \quad (1,21)$$

Si l'on normalise la fonction $h(t)$ à $\int dt h = 1$, la fonction $g(t)$ a la même propriété. $\vec{f}^{(0)} \tau g(t)$ est en somme une force fictive qu'il faudrait appliquer à la particule pour qu'avec la loi élémentaire

*) Dans la théorie de Maxwell, le facteur $1/3$ est à remplacer par $2/3$.

de Newton « force = masse fois accélération », on trouve le mouvement défini par (1,11). On voit alors que notre particule a une *prémonition* de ce qui va lui arriver à la suite de $h(t)$ et nous appellerons $g(t)$ la *fonction de prémonition* de l'électron. En effet, alors même que la vraie force $h(t)$ est encore nulle, la force fictive $g(t)$ ne l'est plus et l'accélération $\ddot{q}(t)$ est par conséquent différente de zéro.

Comme nous venons de le voir, l'augmentation de la quantité de mouvement est indépendante de cette prémonition; elle est égale à celle qu'on calculerait si l'équation $m\ddot{q} = \tilde{f}^{(\text{inc})}$ était juste. Par contre, le travail $A = \int_{-T}^{+T} dt (\tilde{f}^{(\text{inc})}, \dot{q})$ fourni par la force incidente est toujours plus grand que l'énergie cinétique

$A^{(\text{cin})} = \frac{1}{2} m (|\dot{q}(+T)|^2 - |\dot{q}(-T)|^2)$ acquise par l'électron. Ce qui est évident parce qu'une partie $A^{(\text{rad})} = A - A^{(\text{cin})}$ de l'énergie A est diffusée. Tandis que $A^{(\text{cin})}$ est, à cause de (1,20), indépendant de $\eta(-d^2/dt^2)$, ce n'est pas le cas pour $A^{(\text{rad})}$, qui dépend par conséquent du modèle.

Voyons encore comment la fonction de prémonition varie avec le modèle de l'électron dans le cas d'un choc $h(t) = \delta(t)$.

a) *Le modèle de Dirac*¹: $\eta = 1$. On a alors

$$t < 0: g_0(t) = \lambda_0^{-1} e^{t/\lambda_0}; \quad t > 0: g_0(t) = 0 \quad (1,22)$$

b) *Le modèle* $\eta = 1 + \lambda_1^2 \omega^2$: si $\lambda_1^2 > -\frac{1}{4} \lambda_0^2$, $g_0(t)$ est une exponentielle $e^{|\alpha|t}$ pour $t < 0$ et $e^{-|\beta|t}$ pour $t > 0$. Dans la limite $\lambda_1^2 \gg \lambda_0^2$ la fonction est symétrique, sinon la contribution majeure se fait pour des t négatives. Pour $\lambda_1^2 < -\frac{1}{4} \lambda_0^2$ le $g_0(t)$ de (1,22) montre des oscillations.

c) *Le modèle quantique*: Si l'on prend

$$\eta(\omega^2) = \frac{1}{2} (\lambda_0 \omega \sin 2 \lambda_0 \omega) (\sin \lambda_0 \omega)^{-2}$$

avec donc

$$2 \pi g_0(\omega) = (\eta(\omega^2) + i \lambda_0 \omega)^{-1} = \frac{e^{-2i \lambda_0 \omega} - 1}{-2 i \lambda_0 \omega} \quad (1,23)$$

on a

$$-2 \lambda_0 < t < 0: g_0 = (2 \lambda_0)^{-1}; \quad t < -2 \lambda_0 \text{ et } t > 0: g_0(t) = 0 \quad (1,24)$$

L'importance de ce dernier modèle (à fonction de prémonition différente de zéro et constante dans un intervalle fini $2 \lambda_0$) se montrera surtout en théorie quantique. C'est pourquoi nous lui donnons le nom de *modèle quantique*.

§ 2. La diffusion du rayonnement.

Pour calculer $A^{(\text{rad})}$ diffusé par un électron sur lequel tombe une onde plane périodique $\varphi^{(\text{inc})}$, on procède normalement par la méthode suivante: 1^o détermination du mouvement $\vec{q}(t)$ et 2^o détermination du champ émis $\varphi^{(\text{ret})}(\vec{x}, t)$. Nous exécuterons ces calculs dans l'espace de FOURIER, ce qui facilitera la comparaison des résultats avec ceux de la théorie des quanta. Soit V un volume de périodicité spatiale. Alors, toute fonction $\varphi(\vec{x}, t)$ peut être décomposée en

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi(x) = \sum_{\vec{\mu}} (2V\mu^4)^{-1/2} (c_{\vec{\mu}}(t) e^{i(\mu, x)} + c_{\vec{\mu}}^*(t) e^{-i(\mu, x)}) \quad (2,1)$$

avec

$$(\mu, x) = \mu_x x^x = (\vec{\mu}, \vec{x}) - \mu^4 t; \mu^4 = +\sqrt{\kappa^2 + |\vec{\mu}|^2} \quad (2,2)^*$$

Le champ incident $\varphi^{(\text{inc})}$, étant une solution de l'équation homogène, détermine $c_{\vec{\mu}}^{(\text{inc})} = \text{const.}$ (une deuxième solution $c_{\vec{\mu}}^{(\text{inc})} = \text{const.} e^{2i\mu^4 t}$ ne fait qu'inverser c et c^*). Le mouvement de l'électron est alors représenté par la somme de FOURIER ($\omega = \mu^4$):

$$m \ddot{\vec{q}}(t) = \sum_{\vec{\mu}} \left(\frac{i \varepsilon \vec{\mu}}{\sqrt{2V\omega}} \frac{1}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0 \omega} c_{\vec{\mu}}^{(\text{inc})} e^{-i\omega t} + \text{conj.} \right) \quad (2,3)$$

Le deuxième pas se fait en écrivant pour (1,16) la série

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{x}, t) &= \varepsilon \delta(\vec{x} - \vec{q}(t)) = \varepsilon \delta(\vec{x}) - \varepsilon (\vec{q}, \text{grad } \delta(\vec{x})) + \dots \quad (2,4) \\ &= \varepsilon \sum_{\vec{k}} \frac{1}{V} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} - \varepsilon \sum_{\vec{k}} \frac{i(\vec{k}, \vec{q}(t))}{V} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + \dots \end{aligned}$$

que l'on peut substituer en (1,9) pour calculer $\varphi^{(\text{ret})}$. L'équation pour les coefficients $c_{\vec{\mu}}^{(\text{ret})}(t)$ est alors dans l'approximation linéaire

$$\ddot{c}_{\vec{\mu}}^{(\text{ret})} - 2i\omega' \dot{c}_{\vec{\mu}}^{(\text{ret})} = - \sum_{\vec{\mu}'} \frac{\varepsilon^2 (\vec{\mu}', \vec{\mu})}{m \omega^2 V} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \frac{e^{i(\omega' - \omega)t}}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0 \omega} c_{\vec{\mu}}^{(\text{inc})} \quad (2,5)$$

Nous intégrons (2,5) avec la limite $c_{\vec{\mu}}^{(\text{ret})}(-T) = 0$, et substituons pour $\eta(\omega^2)$ la fonction de pressentiment $g_0(\omega)$. Le résultat est

$$\begin{aligned} c_{\vec{\mu}}^{(\text{ret})}(+T) &= \\ &- i \sum_{\vec{\mu}'} \frac{2\varepsilon^2 (\vec{\mu}', \vec{\mu})}{m \omega^2 (\omega + \omega') V} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} 2\pi g_0(\omega) \frac{\sin(\omega' - \omega)T}{\omega' - \omega} c_{\vec{\mu}}^{(\text{inc})} \quad (2,6)^{**} \end{aligned}$$

*) Nous ne discuterons que le cas $\kappa = 0$, mais il sera avantageux de garder un $\kappa \neq 0$ dans les formules générales.

**) (2,6) ne contient pas le champ statique dû au 1er terme de (2,4). Ce champ statique est donc à ajouter partout.

Si l'onde incidente ne contenait qu'une seule fréquence ω , on s'aperçoit qu'il en est de même pour l'onde diffusée et pour $T = \infty$. En particulier, si l'onde incidente est une onde plane ne contenant qu'une seule fréquence, son courant d'énergie est représenté par T^{i4}

$$\tilde{T}^{i4} = \tilde{\mu} \frac{c_{\mu}^{* (\text{inc})} c_{\mu}^{(\text{inc})}}{V} = \tilde{\mu} \frac{N_{\mu} (-T)}{V}, \quad (2,7)$$

L'énergie rayonnée dans une direction $\tilde{\mu}'$ contenue dans un élément d'angle spatial $d\Omega' = d\varphi' d(\cos \vartheta')$ est

$$dA^{(\text{rad})} (+T) = \sum_{\tilde{\mu}' (d\Omega')} \mu'^4 c_{\mu'}^{(\text{ret})*} c_{\mu'}^{(\text{ret})} = \frac{V}{8\pi^3} d\Omega' \int_0^{\infty} d\omega' \omega'^3 N_{\mu'} (+T) \quad (2,8)$$

avec $N_{\mu} = c_{\mu}^{*} c_{\mu}$. La section d'efficacité est définie par le rapport entre $dA^{(\text{rad})}$ et $|\tilde{T}^{i4}|$ divisé par la durée $2T$ entre $t = -T$ et $t = +T$, soit

$$dQ' = \frac{dA^{(\text{rad})}}{2T |\tilde{T}^{i4}|} = d\Omega' (3\lambda_0)^2 \frac{(\cos \vartheta')^2}{\eta(\omega^2)^2 + \lambda_0^2 \omega^2} \quad (2,9)$$

Elle vaut donc $d\Omega' (3\lambda_0)^2 (\cos \vartheta')^2$ pour des fréquences $\omega \ll \lambda_i^{-1}$. Pour des fréquences comparables aux λ_i son comportement dépend du modèle $\eta(\omega^2)$.

Nous écrirons le résultat pour les deux modèles suivants:

a) *Modèle de Dirac:*

$$dQ' = d\Omega' 9(\cos \vartheta')^2 \omega^{-2} (\lambda_0 \omega / \sqrt{1 + \lambda_0^2 \omega^2})^2 \quad (2,10)$$

b) *Modèle quantique:*

$$dQ' = d\Omega' 9(\cos \vartheta')^2 \omega^{-2} (\sin \lambda_0 \omega)^2 \quad (2,11)$$

Dans les deux cas, la section disparaît pour des hautes fréquences proportionnellement à ω^{-2} . Mais, alors qu'avec le modèle de DIRAC le décroissement est monotone, avec le « modèle quantique », cette diminution est multipliée par un facteur périodique. Cependant, la théorie des quanta nous montre qu'avant d'atteindre les fréquences où ces formules deviennent très différentes ($\lambda_0 \omega \sim 1$), il devrait se produire des gerbes, ce qui change évidemment totalement les sections d'efficacité. En effet, cette théorie pour des fréquences suffisamment hautes ne permet plus des amplitudes suffisamment petites pour réaliser la condition

$$|\omega \tilde{q}|^2 \leq |\dot{\tilde{q}}|^2 \leq |\omega^{-1} \ddot{\tilde{q}}|^2 \ll 1 \quad (2,12)$$

dont nous nous sommes servis pour rendre linéaires les équations du mouvement. Dans ce cas, en essayant de résoudre rigoureusement le problème sans la restriction (2,12) des petites amplitudes, on voit apparaître dans le rayonnement diffusé des fréquences ω', ω'', \dots sous multiples de ω . Du point de vue des quanta, ces fréquences correspondent à la décomposition du quantum incident $h\omega$ en une série de quanta $h\omega' + h\omega'' + \dots = h\omega$. Calculons pour quelles fréquences ces effets commencent à ne plus être négligeables. Substituons dans (2,12) l'équation (2,3); on trouve

$$|\omega^{-1} \ddot{q}|^2 \leq 6\pi\lambda_0 \omega^{-1} m^{-1} (N_\mu/V) \quad (2,13)$$

Cherchons alors pour quelles valeurs de ω cette expression est de l'ordre de l'unité. L'équation (2,7) montre que, pour les quanta, N_μ/V est le nombre de quanta incidents par unité de volume*). Le quantum $h\omega$, au moment où il réagit avec l'électron ponctuel, est localisé par conséquent avec le maximum de précision et par conséquent son Δq est de l'ordre de grandeur de ω^{-1} et donc $N_\mu/V \sim \omega^3$. Introduisant la longueur d'onde de Compton de l'électron $\lambda_c = h/mc = m^{-1}$ (avec nos unités) (2,12) devient $6\pi\lambda_0\lambda_c\omega^2 \ll 1$.

Si nous avons pour λ_c une valeur 3×137 fois plus grande que λ_0 , on voit qu'il faudra tenir compte des équations quadratiques pour $\lambda_0\omega \sim 1/100$, alors que les deux formules (2,10) (2,11) ne commencent à différer (effet du modèle et du freinage) que lorsque $\lambda_0\omega \leq 1$. Remarquons enfin, que la fonction $\eta(\omega^2)$ détermine d'une manière invariante les termes non linéaires omis en (1,11).

§ 3. Dispersion et largeur de raie.

Pour étudier la diffusion d'une onde par un électron lié, par exemple, à un noyau, on ne peut pas employer le procédé des paragraphes précédents, car, comme on le sait, la théorie classique ne donne pas de solution stable pour ce problème. Il nous faut donc construire un modèle d'atome correspondant au modèle des oscillateurs en théorie classique de la dispersion. L'atome sera une singularité du champ $x = q(\lambda)$ qui aura un degré de liberté de plus que l'électron. En électrodynamique, ce degré de liberté supplémentaire est le moment électrique $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t)$ resp. dans une théorie covariante, les six composantes d'un tenseur $\sigma^{\mu\nu}(\lambda) = -\sigma^{\nu\mu}(\lambda)$ associé à cette singularité. En électrodynamique longitudinale, il nous est possible

*) Il convient alors de choisir les unités de telle manière que la constante de Planck soit l'unité de l'action ($\hbar = \hbar_{\text{Planck}}/2\pi = 1$; $[\varphi] = [m] = [\omega] = \text{cm}^{-1}$).

d'introduire un degré de liberté scalaire $\sigma = \sigma(\lambda)$ dans (1,9) et de l'écrire

$$\varrho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \varepsilon \sigma(\lambda) \delta(x - q(\lambda)) \quad (3,1)$$

Un raisonnement semblable à celui du paragraphe 1 nous donnera les équations de mouvement pour $\vec{q} = \vec{q}(t)$ et pour la variable intérieure. Dans le cas où l'atome est très lourd ($\ddot{\vec{q}} \ll \ddot{\vec{q}} \ll \dots \ll 0$) et dans son système de repos ($\dot{\vec{q}} = 0$), cette équation s'écrit pour des petites amplitudes

$$\eta \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \ddot{\sigma} + \omega_0^2 \sigma + \lambda_0 \omega_0^2 \dot{\sigma} = f^{(\text{inc})}(t) \quad (3,2)^*$$

Les constantes λ_i qui interviennent sont encore une fois arbitraires et déterminent le modèle de l'atome. (3,2) est l'équation linéaire la plus générale qui satisfait aux conditions de covariance et de

*) L'équation (1,13) (de la note *) p. 6) montre que la condition $\dot{q}_\alpha \dot{q}^\alpha = -1$ admet en plus de la solution $\dot{\varepsilon} = 0$ une solution

$$\dot{\varepsilon}(\varphi(\vec{q}, t) + \sum \alpha_i \Phi^{(i)}(\vec{q}, t)) = 0 \quad (3,3)$$

si $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon \sigma(\lambda)$ est une variable intérieure. Développant encore une fois le champ $\varphi(\vec{x}, t)$ et les fonctionnelles $\Phi^{(i)}(\vec{x}, t)$ suivant le procédé indiqué en I pour $\vec{x} = \vec{q}$, (3,3) prend la forme

$$\mu_0 \sigma + \mu_1^{-1} (\ddot{\sigma} + \lambda_1^2 \ddot{\sigma} + \dots) + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \dot{\sigma} = \varepsilon \varphi^{(\text{inc})}(\vec{q}, t) \quad (3,4)$$

avec

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum \alpha_i \kappa_i; \mu_1^{-1} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum \alpha_i \kappa_i^{-1}; \mu^{-1} \lambda \frac{2n}{n} = \dots \quad (3,5)$$

dans le système $\dot{\vec{q}} = 0$. Pour imposer cette dernière condition, il faut définir le terme de masse ($m \ddot{\vec{q}}$) dans l'équation de mouvement pour $\vec{q}(t)$ en introduisant une autre série de champs fonctionnels $\Psi^{(k)}(x)$ satisfaisant à (1,9) avec $\varepsilon = \text{const} = \varepsilon_0$ dont les coefficients sont soumis à $\sum \beta_k = 0$. $m, m \lambda_1^2, \dots$ sont alors définis par

$$m = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \sum \beta_k \kappa_k \text{ etc.} \quad (3,6)$$

pour autant que $\sigma(t) \sim 0$. L'étude de $p^\alpha = \int (dx)^3 T^{\alpha 4}(\varphi, \Psi^{(k)}, \Phi^{(i)})$ montre alors que le facteur $m'(\sigma, \dot{\sigma}, \dots)$ en $p^\alpha = m' \dot{q}^\alpha$ diffère du $m'(0, 0, \dots) = m$ en (3,6) par l'adjonction de termes proportionnels à σ^2 et $\dot{\sigma}^2$ (pour autant que $\eta \sim 1$). Pour qu'à une excitation du degré de liberté intérieure corresponde une augmentation de l'énergie portée par la particule, il faut que μ_0 et μ_1 soient des constantes positives. (3,2) dérive alors de (3,4) si l'on pose

$$\omega_0^2 = \mu_0 \mu_1; \lambda_0 = \frac{\varepsilon^2}{4\pi \mu_0}; f^{(\text{inc})}(t) = \varepsilon \mu_1 \varphi^{(\text{inc})}(0, t) \quad (3,7)$$

conservation*). Comme précédemment, la fonction $\eta(\omega^2)$ permet de calculer comment l'atome est excité sous l'influence de la force $f^{(\text{inc})}(t)$. Au lieu d'une prémonition, on trouve ici, à cause du terme $\omega_0^2 \sigma$, une *fonction de mémoire*: l'atome continue à vibrer alors que la force a cessé d'agir. Calculons ce qui arrive dans quelques cas simples: Une force $f^{(\text{inc})}(t) = f^{(0)} \tau h(t)$ produira un mouvement $\sigma(t) = f^{(0)} g(t)$ dont la transformée de FOURIER est

$$g(\omega) = \frac{h(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 \eta(\omega^2) - i \omega_0^2 \omega \lambda_0} \quad (3,12)$$

Considérons la fonction de mémoire $g_0(t)$ lorsque la force est un choc.

a) *Le modèle simple*: $\eta = 1$.

$$t < 0: g_0(t) = 0; \quad t > 0: g_0(t) = \omega_0'^{-1} e^{-t/2\lambda} \sin \omega_0' t \quad (3,13)$$

avec

$$\lambda^{-1} = \omega_0^2 \lambda_0; \quad \omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4}(\lambda_0 \omega_0)^2} \sim \omega_0 \quad (3,14)$$

et avec une transformée

$$2\pi g_0(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 - i \omega_0^2 \omega \lambda_0)^{-1} \xrightarrow{\omega \sim \omega_0} (2\omega_0)^{-1} (\omega_0 - \omega - i(2\lambda)^{-1})^{-1} \quad (3,15)$$

Le choc a ainsi produit un rayonnement monochromatique ($\omega \simeq \omega_0$), qui s'amortit exponentiellement avec une vie moyenne de λ^{-1} . L'analyse spectrale montre une largeur de raie spectrale (Dämpfungsbreite) de $\Delta\omega = (2\lambda)^{-1}$ et une énergie totale proportionnelle à

$$2\pi \int d\omega |g(\omega)|^2 \simeq (4\pi\omega_0^2)^{-1} \int dz (z^2 + (2\lambda)^{-2})^{-1} = \lambda/2 \omega_0^2 \quad (3,16)$$

Mais il est évident qu'en plus de ce modèle simple, d'autres modèles peuvent être conçus, qui seront caractérisés par d'autres lois d'amortissement et d'autres formes de raies spectrales.

*) Dans la théorie Maxwellienne $\dot{q}_\alpha \dot{q}^\alpha = -1$ est satisfait automatiquement. Les équations (1,10) pour f^μ ont la forme

$$-f^\mu (\varphi^{\alpha\beta}) = \int (dx)^3 \varphi^{\mu\nu} \varrho_\nu \quad (3,8)$$

où $\varphi^{\mu\nu} = -\varphi^{\nu\mu}$ est le tenseur antisymétrique du champ et où

$$\varrho^\alpha(x) = \int d\lambda \varepsilon_0 \dot{q}^\alpha \delta(x - q(\lambda)) + \int d\lambda \varepsilon \sigma^{\alpha\beta}(\lambda) \partial_\beta \delta(x - q(\lambda)) \quad (3,9)$$

est le courant. Pour un atome à charge nulle ($\varepsilon_0 = 0$) et une masse grande, (1,10) peut être satisfait en posant

$$\varphi^{\alpha\beta}(\tilde{q}, t) + \Sigma \alpha_i \Phi^{(i)\alpha\beta}(\tilde{q}, t) = 0 \quad (3,10)$$

($\Phi^{(i)\alpha\beta}$ sont des fonctionnelles d'un champ de Yukawa tensoriel). Le développement suivant I fournit six équations du type (3,2), une pour chaque composante de $\sigma^{\alpha\beta}$, mais où le dernier terme est à remplacer par

$$\lambda_0 \omega_0^2 \ddot{\sigma}^{\alpha\beta} \rightarrow -\lambda_0 \ddot{\sigma}^{\alpha\beta} \quad (3,11)$$

Nous définissons en particulier:

b) *Le modèle quantique*, par la forme analogue à (1,23):

$$\eta(\omega^2) = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\omega_0 \lambda_0 \sin(2 \omega_0^2 \omega \lambda_0 / \omega_0^2 - \omega^2)}{2 (\sin(\omega_0^2 \omega \lambda_0 / \omega_0^2 - \omega^2))^2} \quad (3,17)$$

donnant lieu à un

$$2\pi g_0(\omega) = (2i \omega_0^2 \omega \lambda_0)^{-1} (e^{2i \omega_0^2 \omega \lambda_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}} - 1) \quad (3,18)$$

Loin du centre de la raie, les deux premiers termes de la transformée (3,18)

$$2\pi g_0(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} + i \omega \lambda^{-1} (\omega_0^2 - \omega^2)^{-2} + \dots \quad (3,19)$$

sont identiques à ceux du développement de (3,15). De même, l'intensité totale $2\pi \int d\omega |g(\omega)|^2 \leq \lambda^2 \pi^{-1} \omega_0^{-2} \int dz (\sin(1/2 \lambda z))^2 = \lambda/2 \omega_0$ est égale à celle du modèle simple (3,16). Mais la fonction $g_0(t)$ elle-même montre maintenant un amortissement BESSELIEN

$t < 0: g_0(t) = 0;$

$$t > 0: g_0(t) \leq (2 \omega_0 \sqrt{\lambda^{-1} t})^{-1} J_1(2 \sqrt{\lambda^{-1} t}) \sin \omega_0 t \quad (3,20)$$

Que le modèle général, en particulier le modèle considéré, ait des battements superposés à son amortissement et diffère ainsi fortement de l'amortissement exponentiel, ne doit guère nous étonner: En regardant de près notre $\eta(\omega^2)$, on s'aperçoit que, pour $\omega \sim \omega_0$, η diffère fortement de l'unité. Ceci équivaut au modèle non relativiste d'un atome, qui s'étend sur une région très grande. Ainsi il peut réabsorber même des ondes émises dans un passé lointin.

§ 4. Propriétés générales du modèle.

Nous voulons démontrer que nos modèles peuvent être caractérisés par une relation

$$\Psi(T) = S(T) \Psi(-T) \quad (4.1)$$

où $\Psi(t)$ est un vecteur hermitien dont les composantes sont définies par

$$\Psi(\tilde{\mu}, t) = c_{\tilde{\mu}}(t); \Psi(\tilde{\mu}, t) - \Psi(\tilde{\mu}, -T) = c_{\tilde{\mu}}^{(\text{ret})}(t) \quad (4.2)$$

et où $S(t)$ est un opérateur défini par une matrice $S(t)(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu})$ opérant sur $\Psi(-T)$. La comparaison entre (4,1), (4,2), et (2,6) montre que les éléments de $S(T) - 1$ sont, dans la limite $T \rightarrow \infty$

$$(S(T) - 1)(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu}) = -i 12\pi \lambda_0 \omega^{-1} 2\pi g_0(\omega) \cos \vartheta' \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' - \omega) \quad (4,3)$$

Nous voulons démontrer que $S(T)$ est un opérateur unitaire. Cette condition s'exprime par

$$S^* S = (S^* - 1)(S - 1) + (S^* - 1) + (S - 1) + 1 = 1 \quad (4,4)$$

Or, pour deux matrices de la forme (4,3)

$$\alpha(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu}) = \alpha(\omega) \cos \vartheta' \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' - \omega)$$

et $\beta(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu}) = b(\omega) \cos \vartheta' \dots$ la relation opératorielle est valable

$$\alpha\beta = \alpha' \cdot \beta = \beta' \cdot \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{1}{3} \alpha(\omega) \omega^2 (2\pi)^{-1} \quad (4,5)$$

où α' et β' sont des nombres. En vertu de (4,5), la relation (4,4) devient une condition à imposer à la fonction de prémonition

$$2\lambda_0\omega \mid 2\pi g_0(\omega) \mid^2 - i(2\pi g_0(\omega) + 2\pi g_0(\omega)^*) = 0 \quad (4,6)$$

Or la première équation (1,23) qui définit $2\pi g_0(\omega)$ en termes de la fonction du modèle général $\eta(\omega^2)$ montre que (4,6) est toujours satisfaite.

La forme explicite de l'opérateur S peut être donnée sous la forme $S = S(\alpha(T))$ en termes d'un opérateur

$$\alpha(T)(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu}) = \varepsilon^2 \cos \vartheta' (m\omega)^{-1} \pi \cdot V^{-1} \delta(\omega' - \omega);$$

$$\alpha' = \frac{1}{3} \varepsilon^2 \omega (2\pi m)^{-1} = 2\lambda_0\omega \quad (4,7)$$

$S(\alpha)$ est une série*) qui a les formes suivantes: 1° modèle de DIRAC:

$$S(\alpha(T)) = (1 - \frac{1}{2} i\alpha(T))(1 + \frac{1}{2} i\alpha(T))^{-1} = 1 - i\alpha(T) + \dots \quad (4,8)$$

2° modèle quantique:

$$S(\alpha(T)) = e^{-i\alpha(T)} = 1 - i\alpha(T) + \dots \quad (4,9)$$

Le même procédé peut être appliqué à la théorie de l'atome. L'opérateur α est alors donné par*)

$$\alpha(T)(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu}) = -\varepsilon^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \omega_0 \omega^{-1} \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' - \omega);$$

$$\alpha' = -\varepsilon^2 \omega \omega_0 (2\pi (\omega_0^2 - \omega^2))^{-1} = -2\omega \omega_0^2 \lambda_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \quad (4,10)$$

La relation unitaire entre $\Psi(T)$ et $\Psi(-T)$ permet déjà à ce point d'envisager l'interprétation quantique de la théorie: Par la normalisation

$$(\Psi(-T), \Psi(-T)) = \sum_{\mu} \Psi(\tilde{\mu}, -T)^* \Psi(\tilde{\mu}, -T) = 1 \quad (4,11)$$

*) Pour calculer les séries $S-1$ on utilise la relation $\alpha^n = \alpha'^{n-1} \cdot \alpha$. Pour calculer α' dans le cas (4,10), équation (4,5) doit être appliquée sans le facteur $1/3$. (4,10) n'est valable que si on choisit $\mu_1 = \mu_0$ en (3,7).

nous interprétons $\Psi(\tilde{\mu}, \pm T)$ comme l'amplitude de probabilité que le quantum incident soit à l'instant $\pm T$ dans un état caractérisé par l'onde plane $\tilde{\mu}$. Ceci nous permet de préciser la notion de correspondance. Nous appellerons une théorie quantifiée de l'électron une théorie correspondant à une théorie classique si, dans la limite où l'impulsion $\hbar\omega = \omega$ peut être négligée par rapport à m , les formules (4,8) resp. (4,9) et (4,7) sont valables.

De même, une théorie de l'atome quantifié correspond à une théorie classique si, sans le changement de fréquence dû à l'effet RAMAN, les formules classiques (4,10) et (4,8) resp. (4,9) sont vérifiées.

§ 5. La notion de causalité dans le « modèle quantique ».

Du fait que notre « modèle quantique » de l'électron éprouve une prémonition de ce qui va lui arriver, une certaine révision de notre conception de causalité s'impose. Prenons un exemple: Dans la théorie ordinaire, l'état du champ et de l'électron, à un instant $t = -T$ (caractérisé par $\varphi, \partial_t \varphi, \tilde{q}$ et $\dot{\tilde{q}}$) détermine l'état du système « champ plus particule » pour toute autre époque t antérieure ou postérieure à $-T$. Si nous considérons symboliquement cet ensemble de nos connaissances par $\Psi(t)$ (où $\Psi(t)$ est une grandeur ayant en plus des $2 \times \infty^3$ composantes du vecteur hermitien $\Psi(\tilde{\mu}, t)$, six composantes indiquant les valeurs de $\tilde{q}(t)$ et de $\dot{\tilde{q}}(t)$), ce déterminisme s'écrit sous la forme

$$\Psi(t) = S(t) \Psi(-T); S(-T) = 1 \quad (5,1)$$

$S(t)\Psi(-T)$ est une fonctionnelle de $\Psi(Q, -T)$, dont la variable Q représente les $2 \times \infty^3 + 6$ points.

Dans n'importe quelle théorie évitant les divergences, le problème est beaucoup plus complexe: Il faut décomposer $\varphi(-T)$ en $\varphi^{(\text{inc})}(-T) + \varphi^{(\text{ret})}(-T)$, ce qui n'est possible que si le mouvement $\tilde{q} = \tilde{q}(t)$ pour toute époque antérieure à $-T$ est connu. Si par exemple $\tilde{q} = \dot{\tilde{q}} = 0$ pour $t = 0$, et qu'on suppose que cela est vrai pour $t < -T$, $\varphi^{(\text{ret})}$ est alors le potentiel statique. Une analyse de φ et de $\partial_t \varphi$ pour $t = -T$ permet de calculer $\varphi^{(\text{inc})}$. Une fois $\varphi^{(\text{inc})}(-T)$ et $\partial_t \varphi^{(\text{inc})}(-T)$ connu, les équations de § 1 déterminent $\varphi(\tilde{x}, t)$ et $\tilde{q}(t)$ pour n'importe quelle époque *postérieure*. Mais elles permettent aussi de calculer le mouvement $\tilde{q}(t)$ pour la période *antérieure* à $-T$. Or on s'apercevra que, en général, cette trajectoire calculée différera de l'orbite $\tilde{q} = 0$ supposée connue. Il faudra donc employer une méthode « self consistante » pour trouver la solution du problème.

Un exemple particulièrement simple de ce procédé est celui dans lequel $\varphi(-T)$ se décompose en une partie statique et un paquet d'onde $\varphi^{(\text{inc})}$ tel que pour tout t antérieur à $-T$, il a toujours une amplitude nulle dans le volume d'une sphère de rayon $2\lambda_0$ autour du point $\vec{x} = \vec{q} = 0$. La solution est alors « self consistante » pour le modèle quantique. Il est bien évident que, si les conditions étaient données pour $-T = -\infty$, le problème ne se poserait pas.

§ 6. La quantification.

En théorie des quanta, l'ensemble de nos connaissances $\Psi(t)$ n'est plus représenté par les $2 \times \infty^3 + 6$ nombres $c_{\vec{\mu}}(t)$, $\vec{q}(t)$ et $\vec{\dot{q}}(t)$, mais par une amplitude de probabilité, fonction de $\frac{1}{2}(2 \times \infty^3 + 6)$ variables, par exemple des nombres des quanta $N_{\vec{\mu}} = c_{\vec{\mu}}^* c_{\vec{\mu}}$ et des composantes de l'impulsion $m\vec{\dot{q}} = \vec{k}$. La quantification relativiste montre en outre qu'il n'est pas possible de n'avoir qu'une seule particule. Il convient donc d'introduire comme variables les $N_{\vec{k}}$ indiquant le nombre de particules à impulsion \vec{k} . $\Psi(t)$ est maintenant un vecteur dont les composantes $\Psi(\dots, N_{\vec{\mu}}, \dots; \dots, N_{\vec{k}}, \dots; t)$ sont les amplitudes de probabilité qu'à l'époque t , $N_{\vec{\mu}}$ quanta du champ $\varphi(x)$ soient présents dans l'onde plane $\vec{\mu}$ (ayant chacun une impulsion $\vec{\mu}$) et $N_{\vec{k}}$ particules soient présentes ayant une impulsion \vec{k} . Les considérations du § 5 nous montrent en outre que les conditions initiales ne peuvent être posées que pour $t = -T = -\infty$. La covariance de la théorie par rapport à toute transformation unitaire dans l'espace de HILBERT demande que $S(t)$ en (5,1) soit un opérateur linéaire et unitaire. Alors (5,1) devient

$$\Psi(t) = S(t) \Psi(-T) = e^{-i\alpha(t)} \Psi(-T); \quad \alpha(-T) = 0; \quad \alpha = \alpha^* \quad (6,1)$$

qui est la généralisation de (4,1) pour des époques t finies.

Pour établir une théorie quantifiée, on se sert du principe de correspondance. Rappelons ce principe pour le cas de la théorie ordinaire: La théorie classique relie des quantités a, b, \dots, H, \dots de façon à ce que des relations du type

$$\dot{a}(t) = f(a(t), b(t), \dots) \quad (6,2)$$

existent. A tout $a(t)$ la théorie des quanta fait correspondre un opérateur $a(t)$ (par exemple $\varphi(\vec{x}, t) - \dots c_{\vec{\mu}} \exp(i((\vec{\mu}, \vec{x}) - \mu^4 t)) \dots$) dépendant *explicitement du temps*. Soit $\partial_t a(t)$ (par exemple $\partial_t \varphi = \dots - i\mu^4 c_{\vec{\mu}} \exp(i(\dots)) \dots$) la *dérivée explicite* de cet opérateur. Alors, pour son espérance mathématique, définie par $\overline{a(t)} = (\Psi(t), a(t) \Psi(t))$, on a la relation

$$\overline{\dot{a}(t)} = \overline{\partial_t a(t)} + i [\overline{H(t)}, \overline{a(t)}] \equiv \overline{f(a(t), b(t), \dots)} \quad (6,3)$$

à cause de (5,1) ou (6,1), si l'opérateur H est défini par

$$H(t) = i \partial_t S(t) \cdot S(t)^{-1} = \frac{1}{1!} \partial_t \alpha(t) - \frac{1}{2!} i [\alpha(t), \partial_t \alpha(t)] \\ + \frac{1}{3!} i [\alpha(t), i [\alpha(t), \partial_t \alpha(t)]] - \dots \quad (6,4)$$

Pour qu'il y ait correspondance, l'opérateur H doit être tel que $f(a, b, \dots)$ soit l'espérance mathématique de la fonction $f(a, b, \dots)$ de la théorie classique. Or l'indépendance de f de $-T$ a pour conséquence l'indépendance de $H(t)$ du temps initial $-T$. Ainsi (5,1) et (6,1) dégénèrent en une équation de SCHRÖDINGER

$$\partial_t \Psi(t) = -i H(t) \Psi(t) \quad (6,5)$$

ce qui n'est vrai que pour la théorie ordinaire.

Pour aller plus loin, nous décrirons le champ de matière par $u(\vec{x}, t)_A$, opérateurs dont la dépendance temporelle explicite est réglée par

$$(\square - m_A^2) u_A = 0 \quad (6,6)$$

On le décompose de façon analogue à $\varphi(x)$ en

$$u(x)_A = \sum_{\vec{k}} (2 V k^4)^{-1/2} (a_{\vec{k}A} e^{i(k, x)} + a_{\vec{k}A}^* e^{-i(k, x)}) \quad (6,7)$$

avec $k^4 = + \sqrt{m_A^2 + |\vec{k}|^2}$. Puis, on vérifie alors que les paquets d'ondes d'un champ classique u_A satisfaisant à

$$\Delta u_A - m_A^2 u_A - \ddot{u}_A = - \sum_B (2 \varepsilon \varphi(m\sigma)_{AB} \\ - \varepsilon^2 \varphi^2(\sigma)_{AB}^2) u_B \equiv - \varrho_A \quad (6,8)$$

suivent les lignes d'univers des particules de masse m_A et de charge $\varepsilon \sigma_A$ dans un champ φ , si $\sigma_{AB} = \sigma_A \delta_{AB}$ est une matrice diagonale. Dans le cas où σ_{AB} est une matrice symétrique quelconque, on étudie la variation de « l'espérance mathématique » $\sigma(t) = \Sigma \Sigma u_A^* \sigma_{AB} u_B$ si le paquet d'onde complexe $u_A = a'_A(t) \exp(-i m_A t)$ représente la particule au repos. De l'« équation de SCHRÖDINGER »

$$\partial_t a'(t)_A = i \varepsilon \varphi(t) \sum_B \sigma_{AB} e^{i \omega_{AB} t} a'(t)_B \quad (6,9)$$

valable dans la limite $\omega_{AB} = m_A - m_B \ll m_A$, la relation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum \sum (u_A^* \sigma_{AB} u_B) - \sum \sum (\omega_{AB})^2 (u_A^* \sigma_{AB} u_B) \\ = + \varepsilon \sum \sum \sum (u_A^* (\omega_{CA} + \omega_{CB}) \sigma_{AC} \sigma_{CB} u_B) \varphi \quad (6,10)$$

résulte. Dans le cas particulier, où les fréquences $\omega_{10} = \omega_{21} = \omega_{32} = \dots = \omega_0$ sont toutes égales et où seulement les $\sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \dots$ etc. diffèrent de zéro, la relation (6,10) correspond aux équations classiques pour $\sigma(t)$ ((3,2) et (3,4) avec $\mu_0 = \mu_1 = \omega_0$ et sans le terme de freinage) parce que l'identité $\sum (\omega_{CA} + \omega_{CB}) \sigma_{AC} \sigma_{CB} = \omega_0 \delta_{AB}$ résulte.

(6,8) représente ainsi la première étape de la quantification de la théorie ordinaire. Il faut, en plus, la compléter par une équation d'onde pour φ . Celle-ci doit être telle que les lois de conservation soient satisfaites. On vérifie que c'est l'équation

$$\Delta \varphi - \kappa^2 \varphi - \ddot{\varphi} - \sum \sum (\varepsilon u_A (m \sigma)_{AB} u_B - \varepsilon^2 \varphi u_A (\sigma)_{AB}^2 u_B) \equiv -\varrho \quad (6,11)$$

qui a pour effet que le tenseur

$$T^{\mu\nu} = T_{(\kappa)}^{\mu\nu}(\varphi) + \sum T_{(m_A)}^{\mu\nu}(u_A) + g^{\mu\nu} L \quad (6,12)$$

$L(\tilde{x}, t) = \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} = \varepsilon \varphi \sum \sum u_A (m \sigma)_{AB} u_B - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \varphi^2 \sum \sum u_A (\sigma)_{AB}^2 u_B$ satisfasse à (1,1). Les inhomogénéités de (6,10) et de (6,12) sont $-\partial L / \partial u_A$ resp. $-\partial L / \partial \varphi$.

La deuxième étape introduit les $a_{\tilde{k}A}^{\rightarrow}, a_{\tilde{k}A}^{\rightarrow*}, c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow}$ et $c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow*}$ dans (2,1) et (6,7) comme des opérateurs qui commutent tous entre eux sauf

$$[a_{\tilde{k}A}^{\rightarrow*}, a_{\tilde{k}A}^{\rightarrow}] = [c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow*}, c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow}] = -1 \quad (6,13)$$

Opérant sur une fonctionnelle $\psi(t)$, ils ont les effets suivants

$$a_{\tilde{k}A}^{\rightarrow} \psi(\dots N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow} \dots; \dots N_{\tilde{k}A}^{\rightarrow} \dots; t) = \sqrt{N_{\tilde{k}A}^{\rightarrow} + 1} \psi(\dots N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow} \dots; \dots N_{\tilde{k}A}^{\rightarrow} + 1 \dots; t) \\ c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow*} \psi(\dots N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow} \dots; \dots N_{\tilde{k}A}^{\rightarrow} \dots; t) = \sqrt{N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow}} \psi(\dots N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow} - 1 \dots; \dots N_{\tilde{k}A}^{\rightarrow} \dots; t) \quad (6,14)$$

Opérant en particulier sur $\Psi(\dots N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow} \dots) = \dots \delta_{z N_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow}} \dots$, on voit que $c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow}$ correspond à l'annihilation d'un quantum dans l'état $\tilde{\mu}$ et $c_{\tilde{\mu}}^{\rightarrow*}$ à sa création. Les relations (6,13) ont pour conséquence:

$$i[u_A(x), u_{A'}(x')] = \delta_{AA'} D_A(x, x'); i[\varphi(x), \varphi(x')] = D(x, x') \quad (6,15)$$

les fonctions $D_A(x, x')$ ont les propriétés suivantes: Elles disparaissent pour $t = t'$ et satisfont à

$$\lim_{t \rightarrow t'} \partial_t D(x, x') = \lim_{t \rightarrow t'} \partial_{t'} D_A(x, x') = \delta(\tilde{x} - \tilde{x}'). \quad (6,16)$$

Ainsi elles servent à définir les potentiels retardés $\text{ret}_A \varrho_A$ resp. $\text{ret } \varrho$ des inhomogénéités de (6,8) et (6,11) dans la limite $-T = -\infty$

$$\text{ret}_A \varrho_A(\tilde{x}, t) = \int_{-T}^t dt' \int (dx')^3 D_A(\tilde{x}, t; \tilde{x}', t') \varrho_A(\tilde{x}', t') \quad (6,17)$$

On vérifie alors que l'opérateur

$$H(t) = - \int (dx)^3 L(\tilde{x}, t) = \varepsilon H^{(1)}(t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(t) \quad (6,18)$$

et les opérateurs $u(\tilde{x}, t)$ et $\partial_t u(\tilde{x}, t)$ (6,7) (resp. $\varphi(\tilde{x}, t)$ et $\partial_t \varphi(\tilde{x}, t)$ de (2,1)) substitués en (6,3) définissent des espérances mathématiques \bar{u} et $\bar{\varphi}$ qui satisfont à (6,8) et (6,11). Soit alors $\Psi(-T)$ un état initial quelconque. L'équation de SCHROEDINGER peut être résolue de la manière suivante. On développe l'opérateur α suivant

$$\alpha(t) = \varepsilon \alpha^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \alpha^{(2)}(t) + \varepsilon^3 \alpha^{(3)}(t) + \dots \quad (6,19)$$

et on compare (6,4) à (6,18). Le résultat est

$$\begin{aligned} \varepsilon \alpha^{(1)}(t) &= \varepsilon \int_{-T}^t dt' H^{(1)}(t') \\ \varepsilon^2 \alpha^{(2)}(t) &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2!} \int_{-T}^t dt' \int_{-T}^{t'} dt'' i \left[H^{(1)}(t'), H^{(1)}(t'') \right] + \varepsilon^2 \int_{-T}^t dt' H^{(2)}(t') \\ \varepsilon^3 \alpha^{(3)}(t) &= \dots \end{aligned} \quad (6,20)$$

On s'aperçoit alors que l'opérateur $\varepsilon^n \alpha^{(n)}(t)$ est une fonction du $(n+2)^{\text{ème}}$ ordre des opérateurs a, a^*, c, c^* et correspond ainsi à une réaction (dans le sens chimique) entre $n+2$ particules ou quanta. En particulier, le terme $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ contient une expression tétralinéaire en a, a^* . Dans la limite $-T = -\infty$, le commutateur $i[\varphi, \varphi']$ s'exprime par (6,15) et (6,17) et cette partie de l'opérateur $\alpha^{(2)}$ devient (dans le cas d'un seul u et avec $\sigma = 1$)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \alpha_R^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2} \int_{-T}^t dt' \int (dx)^3 \varepsilon m u^2(\tilde{x}, t') \text{ret} (\varepsilon m u^2(\tilde{x}, t')) \\ \varepsilon^2 \alpha_R^{(2)}(T) &= -\varepsilon^2 \frac{1}{4} m^2 \sum_{\tilde{k}}^* \sum_{\tilde{k}'}^* \sum_{\tilde{k}''}^* \sum_{\tilde{k}'''}^* a_{\tilde{k}}^{(*)} a_{\tilde{k}'}^{(*)} a_{\tilde{k}''}^{(*)} a_{\tilde{k}'''}^{(*)} (k^4 k'^4 k''^4 k'''^4)^{-1/2} \\ &\quad \left(\left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k'' \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k''', \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k'' \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k''' \right) + \kappa^2 \right)^{-1} \delta_{\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \tilde{k} \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \tilde{k}' \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \tilde{k}'' \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \tilde{k}'''} \pi V^{-1} \\ &\quad \delta \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k^4 \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k'^4 \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k''^4 \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k'''^4 \right) \end{aligned} \quad (6,21)^*$$

Après une longue période ($t - (-T) = 2T$), cet opérateur et tout autre opérateur $\varepsilon^n \alpha^{(n)}$ n'admet ainsi que des transitions compatibles avec les lois de conservation $\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k' \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k'' \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} k''' = 0$. Ainsi que le montre la première équation (6,21) $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ contient l'influence du champ retardé d'une densité de charge $\varepsilon m u^2$ sur elle-même.

) La relation $\text{ret } ei(l, x) = ((l, l) + \kappa^2)^{-1} ei(l, x)$ a été utilisée. Σ^ exprime que la somme est à effectuer sur a et a^* avec $+k$ et $-k$.

(6,21) contient ainsi des transitions où deux particules ayant des impulsions \tilde{k}'' et \tilde{k}''' disparaissent et deux autres sont créées dans les états \tilde{k} et \tilde{k}' . Une telle transition est la diffusion de RUTHERFORD d'une particule chargée \tilde{k}'' par une autre \tilde{k}''' (tenant compte des effets d'échange et de l'annihilation mutuelle*). Mais des termes du type $\sum (\tilde{k}') a_{\tilde{k}}^* a_{\tilde{k}'} a_{\tilde{k}}^* a_{\tilde{k}'} (\dots) = N_{\tilde{k}} \sum (\tilde{k}') (\dots)$ contribuent à une somme sur les \tilde{k}' qui diverge (prop. à $r^{-1} \rightarrow \infty$ si l'annihilation mutuelle est exclue et prop. à $-m \log mr \rightarrow m \log \infty$ si l'annihilation mutuelle est admise). Des divergences semblables apparaissent dans les termes supérieurs $\alpha^{(n)}$. Ces divergences sont l'analogue quantique des divergences en théorie classique.

Pour remédier à ce défaut, on peut, en principe, procéder comme en théorie classique. Introduisons des champs $\Phi^{(i)}$, commutant entre eux et avec φ , et soumis à $i [\Phi^{(i)}, \Phi^{(i)'}] = \alpha_i D_{(i)}(x, x')$ avec $\sum \alpha_i = -1$. Alors le terme divergent prend la forme $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}(T) \sim 2T \lambda_1^{-1}$ où λ_1 est une constante. Ce procédé a le grand défaut qu'il n'introduit pas seulement des quanta nouveaux, mais qu'une partie d'entre eux possèdent des énergies négatives**).

Mais une autre méthode, beaucoup plus simple, se présente. Il suffit de redéfinir α par la série (6,19), mais où, dans chaque terme $\varepsilon^n \alpha^{(n)}(t)$ (calculé d'après (6,20)) tous les opérateurs $a_{\tilde{k}A}^*$ et c_{μ}^* sont placés à gauche de tous les $a_{\tilde{k}A}$ et c_{μ} . À ceci correspond une soustraction covariante de la forme $\alpha_{(\text{corrig})} = \alpha_{(\text{habituel})} - \infty$, où les termes ∞ ont la même covariance que le $\alpha_{(\text{habituel})}$ de la théorie habituelle. Les intégrales en $\varepsilon^n \alpha^{(n)}(t)$ dépendent maintenant explicitement de $-T$ et, pour avoir une théorie définie, nous devons fixer une fois pour toutes $-T = -\infty$. Dans cette théorie corrigée, il n'existe plus d'opérateur $H(t)$ indépendant de $-T$. Elle est entièrement définie par son $\alpha(t)$, soit par la série corrigée (6,20). Chaque terme $\varepsilon^n \alpha^{(n)}$ ne fait alors intervenir que des réactions entre $n+2$ particules (tandis que, dans la théorie habituelle, un tel terme contenait toujours encore des réactions d'un ordre inférieur, par ex. le terme divergent de $\alpha^{(2)}$ avec une seule particule initiale et une seule particule finale).

Nous allons démontrer que cette théorie corrigée correspond

*) cf. à ce sujet la thèse de J. PIRENNE, Université de Lyon, 1943⁷).

**) Cette critique s'applique en particulier à la théorie de Bopp⁶). Mais on peut se demander, si, dans l'électrodynamique quantique de l'électron de Dirac, le procédé étudié en I (la compensation des divergences du champ électromagnétique et d'un champ scalaire à énergie positive) n'a pas son analogue quantique.

à nos modèles quantiques introduits en théorie classique. Nous développons d'abord

$$\psi(-T) = \sum_{\vec{\mu}} \sum_A \psi(\vec{\mu}, A; -T) \delta_{0N_1} \dots \delta_{1N_{\vec{\mu}}} \dots \delta_{1N_{\vec{k}(\vec{\mu})A}} \dots$$

avec $\vec{k}(\vec{\mu}) = \vec{p} - \vec{\mu}$ (6,22)

pour le cas où un seul quantum et un seul atome ou électron est présent. Le seul $\Psi(-T)$ qui représente un état physiquement possible pour $-T = -\infty$ est celui où l'atome est dans son état fondamental ($m_A = m_0$). Dans tout autre état, il existe une histoire antérieure à $-T = -\infty$ qui décrit comment cet atome a été excité. Calculons $\Psi(+T)$. Les lois de conservation nous montrent que, pour tout paquet d'onde $\Psi(\vec{\mu}, 0, -T)$ ($= c_{\vec{\mu}}^{(\text{inc})}$ du § 2), la contribution de $\varepsilon \alpha^{(1)}(T)$ est négligeable. En effet, notre atome ne peut se trouver dans un état excité $m_A = m_0 + \omega_{A0}$ que si la fréquence du quantum incident $\omega = \mu^4$ est exactement égale à ω_{A0} . Cette probabilité est proportionnelle à V^{-1} et peut être négligée. Ces mêmes lois nous montrent que, pour $t = +T$, $\psi(\dots N \dots; t)$ ne peut avoir des amplitudes de probabilité non nulles que pour des états où un seul atome ou électron est présent, pour autant que $\mu^4 = \omega < 2m_0 = 2m$. Les éléments de matrice de $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ peuvent alors s'exprimer dans un espace hermitien $\Psi(\vec{\mu}, A)$. Dans le cas de l'électron, un calcul analogue à celui qui aboutissait à (6,21) (mais où le terme $H^{(2)}$ contribue) donne pour $\vec{k}=0$, $k^4 = m$ et $(\mu, \mu) = -\varkappa = 0$ le résultat

$$\varepsilon^2 \alpha^{(2)}(T) (\vec{\mu}' / \vec{\mu}) = \varepsilon^2 \cos \vartheta' (mk'^4 \omega \omega')^{-1/2} \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' + k'^4 - \omega - m) \quad (6,23)$$

et, pour l'atome, si $\vec{k} = 0$ et $m_0 \gg m_A - m_B = \omega_{AB}$

$$\varepsilon^2 \alpha^{(2)}(T) (\vec{\mu}', A' / \vec{\mu}, A) = -\varepsilon^2 (\omega \omega')^{-1/2} \sum_C (\omega_{CA'} + \omega_{CA}) \sigma_{A'C} \sigma_{CA}$$

$$\cdot \frac{1}{2} \{ (\omega_{CA} - \omega)^{-1} (\omega_{CA'} + \omega)^{-1} + (\omega_{CA} - \omega')^{-1} (\omega_{CA'} + \omega')^{-1} \}$$

$$\cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' - (\omega - \omega_{A'A})) \quad (6,24)$$

Dans le cas de l'électron et pour des fréquences où les gerbes peuvent être négligées (cf. § 2), on peut donc poser $\alpha(T) = \varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ parce que les $\alpha^{(n>2)}$ ne contiennent que de ces effets d'ordre supérieur. Alors le calcul de $\Psi(+T)$ se réduit à (4,1) et (4,9) où α est la matrice (6,23). Elle n'est autre chose que la matrice de la théorie classique (4,7) corrigée pour l'impulsion du photon (effet COMPTON).

Pour l'atome, cette approximation n'est justifiée que si $\omega < \omega_{20}$. On vérifie qu'alors seul $\alpha^{(2)}$ contient un facteur de résonance. En

particulier, si la correspondance classique exprimée en (6,10) est valable et rend $\sum (\omega_{CA'} + \omega_{CA}) \sigma_{A'C} \sigma_{AC} = \omega_0 \delta_{A'A}$, l'élément (6,24) est égal à l'élément classique (4,10): La dispersion d'une onde incidente monochromatique $(\psi(\tilde{\mu}, 0; -T) = 1$ pour un seul $\tilde{\mu}$) est égale à celle produite par le modèle quantique en théorie classique. L'excitation de l'atome par un choc $(\Psi(\tilde{\mu}, 0; -T) = \text{const}$ pour tout $\tilde{\mu}/\tilde{\mu}_{(0)}$ et $\omega_{\max} < \omega_{20}$ et $\Psi=0$ pour tout autre $\tilde{\mu}$), donne une probabilité prop. à $|2\pi g_0(\omega')|^2$ qu'on trouve un quantum de fréquence $\omega' (\sim \omega_{10})$ émis.

Si le choc est très exactement défini, $(\omega_{\max} \gg \omega_{C0})$ un quantum avec tout $\omega' \sim \omega_{A'A}$ peut être présent en $\psi(+T)$. Mais les termes $\varepsilon^3 \alpha^{(3)}(T)$ contiennent maintenant des facteurs de résonance. Ceci signifie que, dans le cas de l'irradiation monochromatique, une probabilité finie existe, que l'atome émette deux quanta $\omega' \leq \omega - \omega_{A'A}$ (quantum de RAMAN) et $\omega'' \leq \omega_{A'A}$ (émission de l'énergie absorbée dans l'effet de RAMAN). Les termes $\varepsilon^3 \alpha^{(1)} \alpha^{(2)}$ provenant du développement de $e^{-i\alpha}$ donnent lieu au même effet. En plus un tel choc aura pour conséquence que $\varepsilon^3 \alpha^{(3)}$ produira deux quanta $\omega' \leq \omega_{CA'}$ et $\omega'' = \omega_{A'A}$ correspondant à l'émission successive de deux quanta par l'atome excité dans un état $m_C > m_1$. On observera ainsi un spectre de ligne.

§ 7. La généralisation du modèle en théorie quantifiée.

Au premier abord, il semble que notre manière de soustraire les infinités en théorie quantifiée ne nous amène qu'aux modèles quantiques introduits en § 1 et § 3. Mais on peut démontrer (analogie parfaite avec la théorie classique) que la soustraction des singularités peut être faite de plusieurs manières, dont chacune définit un modèle caractérisée par une fonction $\alpha(\beta)$. Nous exprimons l'opérateur unitaire S en (6,1) en termes d'un opérateur hermitien β

$$S(t) = S(\beta(t)) = e^{-i\alpha(\beta(t))} \quad (7,1)$$

où α est une série définie par des constantes réelles α_n

$$\alpha(\beta) = \beta + \alpha_2 \beta^2 + \alpha_3 \beta^3 + \dots \quad (7,2)$$

Pour β , nous écrivons son développement en termes de ε (6,19)

$$\begin{aligned} \beta' &= \varepsilon \beta^{(1)} + \varepsilon^2 \beta^{(2)} + \varepsilon^3 \beta^{(3)} + \dots; \\ \beta^2 &= \varepsilon^2 \beta^{(1)2} + \varepsilon^3 (\beta^{(1)} \beta^{(2)} + \beta^{(2)} \beta^{(1)}) + \dots \end{aligned} \quad (7,3)$$

et égalisons les coefficients de ε^n en (6,4). On trouve ainsi la série

$$\begin{aligned}\varepsilon \beta^{(1)}(t) &= \varepsilon \int_{-T}^t dt' H^{(1)}(t') \\ \varepsilon^2 \beta^{(2)}(t) &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2!} \int_{-T}^t dt' \int_{-T}^{t'} dt'' i [H^{(1)}(t'), H^{(1)}(t'')] \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_{-T}^t dt' H^{(2)}(t') - \varepsilon^2 \alpha_2 \beta^{(1)}(t)^2 \quad (7,4) \\ \varepsilon^3 \beta^{(3)}(t) &= \dots\end{aligned}$$

qui se distingue de (6.20) par les termes contenant les coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \dots$. Une substitution ultérieure de (7,4) en (7,3) et (7,2) donne naturellement la même série pour α en termes de $H^{(i)}$, que celle obtenue par le procédé simple du § 6. Mais nous sommes libres en (7,4) de redéfinir l'opérateur $-\varepsilon^2 \alpha^2 \beta^{(1)2}$ et les autres opérateurs (par ex. $-\varepsilon^4 \alpha_2 \beta^{(2)2}$ en $\varepsilon^4 \beta^{(4)}$) de la série, sans porter atteinte ni à la covariance ni à l'unitarité de S , en transposant dans ces termes aussi tous les a_{kA}^* et c_{μ}^* à gauche des a_{kA} et c_{μ} (sans changer rien aux intégrales spatio-temporelles!). De cette manière, $\varepsilon^2 \beta^{(1)2}_{\text{corrig}}$ en (7,4) est une matrice correspondant à une réaction entre 6 particules et quanta et le terme $(\varepsilon^4 \beta^{(2)2})_{\text{corrig}}$ à ajouter à $\varepsilon^4 \beta^{(4)}$ représente une réaction entre 8 quanta, etc. Opérant sur les fonctions $\Psi(-T)$ considérées au § 6, où le nombre de particules est limité à deux particules initiales et deux particules finales, ces termes supplémentaires ne contribuent en rien à l'approximation qui néglige les gerbes. Par contre, dans la série (7,2), où les puissances de l'opérateur β apparaissent explicitement, la série $S(\beta)$ changera. On trouvera ainsi, pour $S(\beta)$, une série unitaire plus générale $S(\beta) = 1 + S_1 \beta + S_2 \beta^2 + \dots$. Si seuls les processus de 2ème ordre interviennent, on a évidemment $\varepsilon^2 \beta^{(2)} = \varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ et $S(\beta) = S(\varepsilon^2 \alpha^{(2)}(T))$ sera la fonction unitaire la plus générale dont les deux premiers termes sont $1 - i \varepsilon^2 \alpha^{(2)}(T)$. La relation entre la fonction $\eta(\omega^2)$ caractérisant un modèle classique et la série $S(\beta)$ caractérisant le modèle correspondant, est

$$S(\beta) = (\eta((2\lambda_0)^{-2} \beta^2) - \frac{1}{2} i \beta) (\eta((2\lambda_0)^{-2} \beta^2) + \frac{1}{2} i \beta)^{-1} \quad (7,5)$$

On l'établit en comparant (4,3) avec (1,23) (1ère équation). Cette relation avec $\eta = 1$ (modèle de DIRAC) correspond aux formules, trouvées par GORA⁸⁾ et HEITLER⁹⁾ (cf. (4,8)).

§ 8. Conclusions.

Nous avons démontré que la théorie classique de l'électron ponctuel proposée en I peut être modifiée d'une telle manière que seul le champ Maxwellien interagisse avec la particule. Un nombre infini de modèles possibles existent, qui se distinguent physiquement entre eux par l'effet du champ propre. Ceci a pour conséquence que tout résultat qui, en théorie de l'électron étendu (LORENTZ⁴), dépend de la structure de la particule, ne peut être calculé dans notre théorie que si une certaine fonction invariante (fonction du modèle $\eta = \eta(\omega^2)$) est donnée.

La théorie peut être quantifiée sans que des divergences apparaissent. Une équation de SCHRÖDINGER n'existe plus. Par contre, une matrice unitaire S envisagée par HEISENBERG³) caractérise chaque modèle quantifié. Une relation est établie (7,5) entre cette matrice de HEISENBERG $S(\alpha)$ exprimée comme fonction d'un invariant α et de la fonction de modèle $\eta(\omega^2)$.

Les effets suivants sont indépendants du modèle (pour autant que l'action de freinage de l'effet considéré n'intervient pas):

1° Termes en ε^2 : La diffusion de RUTHERFORD*), l'effet COMPTON et la production de paires;

2° Termes en ε^3 : Le rayonnement de freinage et la production d'une gerbe simple constituée de deux quanta ($\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \hbar\omega'' + \sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2}$).

Un modèle de l'atome est discuté, où celui-ci est considéré comme une particule élémentaire possédant un degré de liberté intérieure. Mais cette théorie est insuffisante en ce qu'elle ne permet pas encore de comprendre comment un proton et un électron peuvent se combiner pour former un atome d'hydrogène et un photon. Dans l'état actuel, il faut introduire chaque atome comme un nouvel être élémentaire, caractérisé par ses niveaux d'énergie $m_A - m_B = \omega_{AB}$ et par ses matrices de transitions ($\sigma_{AB}, \tau_{AB} \dots =$ moments dipole, quadrupole, etc.).

Cette difficulté nous semble être due à l'impossibilité de distinguer entre « quantum lié » et « quantum libre », qui a été introduite par PAULI et FIERZ⁵). En théorie classique, c'est la décomposition du champ φ en $\varphi^{(\text{ret})} + \varphi^{(\text{inc})}$ qui correspond à cette distinction.

Pour des raisons de simplicité, nous avons exposé la théorie d'un électron sans spin dans une électrodynamique longitudinale.

*) Dans le cas où κ est rigoureusement nul des difficultés se manifestent par le fait que l'opérateur $(\alpha_R^{(2)})^2$ formé de (6,21) diverge.

L'étude d'un électron à spin $1/2$ dans l'électrodynamique de MAXWELL est l'objet d'une thèse en préparation.

Ce travail est dû en grande partie à des discussions avec MM. G. WENTZEL et M. FIERZ, au Séminaire de physique théorique de Zurich. Je remercie tout particulièrement le président du conseil de l'E. P. F., M. le Professeur ROHN, et le directeur de l'Institut de Physique de l'E. P. F., Monsieur le Professeur P. SCHERRER, de l'aide qu'ils m'ont accordée en me permettant d'assister régulièrement à ce séminaire.

La mise au point de la théorie classique, ainsi que la rédaction de cette publication ont été faites en collaboration avec mon ami et collègue, Monsieur J. WEIGLE, auquel je tiens à exprimer ma sincère gratitude.

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.

Bibliographie.

¹⁾ DIRAC, Proc. Roy. Soc. **167**, 148 (1938). — WENTZEL, Zs. f. Phys. **86**, 479 et 635 (1934).

²⁾ STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **14**, 51 (1941), cité comme *I*.

³⁾ HEISENBERG, Zs. f. Phys. **120**, 513 et 673 (1943).

⁴⁾ LORENTZ, Theory of electrons, Teubner (1909).

⁵⁾ PAULI et FIERZ, Nuov. Cim. **15**, 1 (1938).

⁶⁾ BOFF, Ann. d. Phys. **38**, 345 (1940) et **42**, 573 (1943).

⁷⁾ PIRENNE, Thèse Université de Lyon (1943).

⁸⁾ GORA, Zs. f. Phys. **120**, 121 (1943) (éq. (13'), p. 130).

⁹⁾ HEITLER, Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 291 (1941) (éq. (g), p. 295).

Zur Theorie magnetisch geladener Teilchen

von M. Fierz.

(23. XII. 1943.)

Zusammenfassung. In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis für das folgende, von DIRAC aufgestellte Theorem gegeben: Führt man in der Quantentheorie magnetisch geladene Teilchen ein, so muss deren magnetische Ladung p ein ganzzahliges Vielfaches einer Einheitsladung $\hbar c/2e$ betragen, wo e das elektrische Elementarquantum bedeutet. Weiter wird diese Aussage auch korrespondenzmässig gedeutet.

Einleitung. DIRAC¹⁾ hat im Jahre 1931 darauf hingewiesen, dass es in der Quantentheorie möglich ist, auch magnetisch geladene Teilchen („singuläre Magnetpole“) zu behandeln. Es schien ihm merkwürdig, dass solche Teilchen, soweit wir wissen, in der Natur nicht vorkommen.

Auch in der klassischen Elektrodynamik ist es möglich, magnetische Ströme und Ladungen einzuführen, indem man auf der rechten Seite der homogenen Feldgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0$$

eine magnetische Strom- bzw. Ladungsdichte \mathfrak{m} und m einführt gemäss

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{m}; \quad \text{div } \mathfrak{H} = 4\pi m$$

Die Gesamtladung $\int \mathfrak{m} dv$ transformiert sich bei Lorentztransformationen wie ein Pseudoskalar. Während aber die Stromdichte \mathfrak{m} und die Ladungsdichte m erzeugenden Magnetpole klassisch eine beliebige magnetische Ladung p besitzen können, ist in der Quantentheorie, wie DIRAC gezeigt hat, diese Ladung p mit dem elektrischen Elementarquantum e der Grösse nach gekoppelt: Die dimensionslose Zahl

$$\mu = \frac{ep}{\hbar c}$$

kann hier nur die Werte $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2} \dots$ annehmen. Da nun die Feinstrukturkonstante $\frac{e^2}{\hbar c}$ den Wert $\frac{1}{137}$ hat, so müssen die

magnetischen Ladungen ganzzahlige Vielfache einer Einheit sein, die, in magnetostatischen *cgs*-Einheiten gemessen $137/2$ mal grösser ist als die Elektronenladung, gemessen in elektrostatischen *cgs*-Einheiten.

Über die Masse dieser Teilchen lässt sich auf Grund unserer heutigen Kenntnisse nichts Zwingendes aussagen. Nimmt man jedoch an, sie hätten eine Ausdehnung von der Grössenordnung des klassischen Elektronenradius, so würde ihre magnetostatische Masse 4700mal grösser sein als die Elektronenmasse.

Wenn also die klassische Theorie formal durch Einführen magnetischer Ströme und Ladungen bezüglich \mathcal{E} und \mathcal{H} völlig symmetrisiert werden kann, so ist das in der Quantentheorie unmöglich, da $\frac{e^2}{\hbar c}$ nicht gleich 1 ist. Nur in diesem Fall könnte ja $p = e$ gesetzt werden. Wir glauben daher, dass ein wirkliches Verständnis für das Fehlen magnetischer Ladungen in der Natur erst durch eine Theorie geliefert werden kann, die den zahlenmässigen Wert der Feinstrukturkonstanten zu berechnen gestattet.

Die Bedeutung des DIRAC'schen Theorems, dass $\frac{2 e p}{\hbar c}$ eine ganze Zahl sein müsse, liegt also darin, dass es die Frage nach der Existenz magnetischer Teilchen mit dem Problem der Feinstrukturkonstanten verknüpft.

Der Beweis, den DIRAC für sein Theorem gegeben hat, ist nun allerdings nicht sehr durchsichtig. Da es sich aber um einen grundlegenden Sachverhalt handelt, so soll in der vorliegenden Arbeit ein neuer Beweis gegeben werden, der auch eine korrespondenzmässige Deutung der Zusammenhänge ermöglicht.

1. Wir diskutieren zuerst die klassischen Bewegungsgleichungen, welche ein Teilchen der Masse m und der elektrischen Ladung e im Felde eines Magnetpols p beschreiben. Das magnetische Feld hat im Abstand r vom Pol p den Betrag p/r^2 .

Die Gleichungen lauten, falls die magnetische Ladung im Koordinatenursprung ruht

$$m \ddot{\vec{x}} = \frac{ep}{cr^3} [\dot{\vec{x}}, \vec{x}] \quad (1.1)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die kinetische Energie konstant bleibt. Drei weitere Integrale sind durch die Komponenten des Vektors

$$\vec{d} = m [\vec{x}, \dot{\vec{x}}] - \frac{ep}{c} \frac{\vec{x}}{r} = \text{const.} \quad (1.2)$$

gegeben. Dies beweist man leicht, indem man (1.1) vektoriell mit \vec{x}

multipliziert. Der Vektor \vec{d} spielt hier die Rolle des Impulsmomentes. Der 1. Term in (1.2) stellt das Impulsmoment der Teilchenbewegung dar. Der 2. Term, ein Vektor in der Verbindungsrichtung der elektrischen mit der magnetischen Ladung, hat den konstanten Betrag $\frac{ep}{c}$. Dieser Vektor ist gleich dem Impulsmoment \vec{J} , das durch die Überlagerung des elektrischen mit dem magnetischen Feld zustande kommt. Die beiden Felder geben nämlich zu einem Energiestrom (Poynting-Vektor) um die Verbindungslinie der beiden Ladungen Anlass. Das dem Energiestrom entsprechende Impulsfeld erzeugt das Impulsmoment \vec{J} .

Das Impulsmoment eines elektromagnetischen Feldes ist allgemein gegeben durch

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi c} \int dv [\vec{x}, [\mathcal{E}\mathcal{H}]] = \frac{1}{4\pi c} \int dv \{ \mathcal{E}(\vec{x}\mathcal{H}) - \mathcal{H}(\vec{x}\mathcal{E}) \} \quad (1.3)$$

Denken wir uns die magnetische Ladung im Koordinatenursprung, die elektrische Ladung im Abstände a auf der Z -Achse, dann wird

$$J_z = -\frac{ep}{4\pi c} \int d\varphi \int d\vartheta \int dr \frac{ar \sin^3 \vartheta}{[r^2 \sin^2 \vartheta + (r \cos \vartheta - a)^2]^{3/2}} \quad (1.4)$$

Aus Symmetriegründen sind $J_x = J_y = 0$.

Das Integral (1.4) lässt sich elementar auswerten und man findet in der Tat den von a unabhängigen Wert

$$J_z = -\frac{ep}{c}. \quad (1.5)$$

Der Massenpunkt m bewegt sich, wie aus (1.1) leicht folgt, auf einem Kreiskegel mit der Achsenrichtung \vec{d} . Sein Öffnungswinkel Θ ist durch die Gleichung

$$\cos \Theta = \frac{ep}{c|\vec{d}|}$$

gegeben. Rollet man den Kegel auf eine Ebene ab, so sind die Bahnkurven Geraden, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

2. Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, dass durch Überlagern der von den beiden Ladungen erzeugten Felder ein Impulsmoment \vec{J} entsteht, das zum Impulsmoment der Bahnbewegung addiert werden muss. Man kann nun das DIRAC'sche Theorem auch so aussprechen: Der Betrag des Impulsmomentes \vec{J} ,

der klassisch den Wert $\frac{ep}{c}$ besitzt, muss in der Quantentheorie gleich einem ganzen oder halbganzen Vielfachen von \hbar sein.

Eine analoge Aussage gilt z. B. auch für das Impulsmoment um die Figurachse eines symmetrischen Kreisel. Man beweist solche Sätze am einfachsten, indem man von der Drehinvarianz der betreffenden Schrödingergleichung Gebrauch macht.

Die im folgenden entwickelte Beweisführung beruht auf einem Grundsatz, den zuerst PAULI²⁾ in seiner Arbeit über die Frage der Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik aufgestellt hat. PAULI fordert, dass in dieser Theorie für die Drehimpulse ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Operatoren- und Matrizenkalkül bestehen soll. Da die Drehimpulse in der Wellenmechanik zugleich die Operatoren der infinitesimalen Drehungen eines rotationssymmetrischen Problems darstellen, so bedeutet dies, dass die Eigenfunktionen des Problems eine Darstellung der Drehgruppe bilden müssen.

Wenn wir das Magnetfeld $\frac{p\tilde{x}}{r^3}$ durch folgendes Vektorpotential beschreiben

$$A_x = -\frac{p}{r} \frac{y}{r+z}; \quad A_y = \frac{p}{r} \frac{x}{r+z}; \quad A_z = 0, \quad (2.1)$$

dann lautet die den Bewegungsgleichungen (1.1) entsprechende Schrödingergleichung in Polarkoordinaten

$$\Delta\Psi + \left\{ \frac{2\mu}{r^2(1+\cos\vartheta)} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\mu^2}{r^2} \frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta} \right\} \Psi = -2mE\Psi. \quad (2.2)$$

Dabei ist $\mu = \frac{ep}{\hbar c}$ eine dimensionslose Zahl.

Diese Gleichung ist von TAMM³⁾ gelöst worden. Dabei hat er jedoch nach DIRAC vorausgesetzt, dass $2\mu = \pm n$, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Da wir das aber gerade beweisen wollen, so werden wir vorläufig über den Zahlenwert von μ nichts voraussetzen.

Den Integralen \vec{d} (1.2) entsprechen in der Wellenmechanik die folgenden Operatoren

$$\begin{aligned} d_z &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} - \mu \\ d_x \pm i d_y &= e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial\vartheta} + i \cotg\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\mu \sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Diese Operatoren können durch Ausführen einer infinitesimalen Drehung aus der Hamiltonfunktion gewonnen werden. Da die Po-

tentiale (2.1) nicht drehinvariant sind, so hat man nach der Drehung durch eine Eichtransformation die Potentiale auf die ursprüngliche Form (2.1) zu bringen. Dieser entsprechen die Zusätze proportional μ in (2.3).

Die Operatoren \vec{d} erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[d_i, d_k] = i d_l \quad (2.4)$$

Man findet, dass

$$\begin{aligned} \sum_k d_k^2 = & -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ & - \frac{2\mu}{1 + \cos \vartheta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\mu^2 (1 - \cos \vartheta)}{1 + \cos \vartheta} + \mu^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Daher kann man die Schrödingergleichung (2.2) in der Form

$$-2mE\Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left\{ \sum_k d_k^2 - \mu^2 \right\} \Psi \quad (2.2')$$

schreiben. Hieraus ist ersichtlich, dass wegen (2.4) die d_k mit der Hamiltonfunktion vertauschbar sind.

Um die Gleichung (2.2') zu lösen, machen wir für Ψ den Ansatz

$$\Psi = R(r) Y_m(\cos \vartheta) e^{i(m+\mu)\varphi} \quad (2.6)$$

m ist der Eigenwert von d_z und braucht keine ganze Zahl zu sein.

Aus
$$\sum_k d_k^2 \Psi = \lambda \Psi$$

folgt für die Funktion $Y_m(x)$, mit $x = \cos \vartheta$, die Gleichung

$$(1-x^2) Y_m'' - 2x Y_m' - \frac{\mu^2 + m^2 + 2\mu m x}{1-x^2} Y_m + \lambda Y_m = 0 \quad (2.7)$$

Diese Gleichung ist identisch mit derjenigen eines symmetrischen Kreisels (siehe z. B. A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien II (1939), S. 162, Gl. (11)).

Wegen der Vertauschbarkeit der Operatoren d_k mit der Hamiltonfunktion (d. h. wegen der Drehinvarianz des Problems) erhält man durch Anwendung des Operators $d_x + i d_y$ auf eine Lösung Y_m von (2.7) eine neue Lösung Y_{m+1} , die zum selben Eigenwert λ gehört. Der Operator $d_x + i d_y$ hat in der Variablen $x = \cos \vartheta$ die Form

$$\sqrt{1-x^2} \left(\frac{d}{dx} + \frac{mx + \mu}{1-x^2} \right) Y_m = Y_{m+1} \quad (2.8)$$

Nun gilt allgemein

$$Y' + fY = e^{-\int f dx} \frac{d}{dx} \left(e^{\int f dx} \cdot Y \right)$$

Das gibt, auf (2.8) angewendet, mit $f = \frac{mx + \mu}{1 - x^2}$

$$Y_{m+1} = (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\mu/2} \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\mu/2} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot Y_m \right\} \quad (2.9)$$

Entsprechend kann man die Operation $d_x - i d_y$ behandeln, wodurch man eine Formel für Y_{m-1} gewinnt.

Hieraus folgen durch wiederholtes Anwenden die beiden Formeln

$$\begin{aligned} Y_{m+n} &= (1-x^2)^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} Y_m \right] \\ Y_{m-n} &= (1-x^2)^{\frac{n-m}{2}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y_m \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich aus Y_m im allgemeinen beliebig viele Lösungen $Y_{m \pm n}(x)$ gewinnen, die alle zum selben Eigenwert λ gehören. Nach dem zu Anfang dieses Abschnitts aufgestellten Grundsatz müssen alle diese Lösungen zugelassen werden, da sonst die Operatoren d_k nicht als lineare Abbildungen im Raume der $Y_m(x)$, d. h. als Matrizen geschrieben werden können. Dazu ist aber notwendig, dass die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} |Y_m(x)|^2 dx$$

existieren. Wegen der in (2.10) in den zu differenzierenden Ausdrücken vorkommenden Irrationalitäten wird dies aber im allgemeinen für hinreichend grosse n nicht mehr der Fall sein.

Die Lösungen sind nur dann sämtlich regulär, wenn sowohl

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} Y_m \quad (2.11)$$

als auch

$$\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y_m \quad (2.12)$$

beides Polynome sind. Dann ist die Anzahl der Funktionen $Y_{m \pm n}$ für ein gegebenes λ endlich.

Sei nun der Ausdruck (2.11) ein Polynom \mathfrak{P} , dann ist (2.12) offenbar gleich

$$(1+x)^{m-\mu} (1-x)^{m+\mu} \cdot \mathfrak{P}.$$

Das ist nur dann ein Polynom, wenn m und μ beide gleichzeitig ganze oder halbganze Zahlen sind.

Das DIRAC'sche Theorem ist dadurch bewiesen.

Weiter erhält man mittels der Gleichungen (2.10) eine einfache Darstellung für die Lösungen von (2.7). Man suche nämlich eine Lösung Y_m , für die gemäss (2.9) Y_{m+1} verschwindet. In diesem Falle ist der Ausdruck (2.11) eine Konstante und wir erhalten, indem wir dieses maximale m wie üblich l heissen

$$Y_{l,l,\mu} = (1+x)^{\frac{l-\mu}{2}} (1-x)^{\frac{l+\mu}{2}} \quad (2.13)$$

Das ist eine reguläre Lösung von (2.7) mit $l = m$, falls $l \geq |\mu|$. Durch Einsetzen ergibt sich der zugehörige Eigenwert:

$$\lambda = l(l+1)$$

l ist gleichzeitig mit μ ganz oder halbganz.

Aus den Gleichungen (2.13) und (2.10) erhalten wir weiter mit $m = l - n$ die Darstellung

$$Y_{l,m,\mu} = (1+x)^{-\frac{m-\mu}{2}} (1-x)^{-\frac{m+\mu}{2}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1+x)^{l-\mu} (1-x)^{l+\mu}] \quad (2.14)$$

für die Lösungen der Gleichung (2.7), die zum Eigenwert $\lambda = l(l+1)$ gehört. Als Normierungsfaktor findet man

$$\int_{-1}^{+1} |Y_{l,m,\mu}|^2 dx = N^2 = \frac{2^{2l+1}}{2l+1} (l+\mu)! (l-\mu)! \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \quad (2.15)$$

Da (2.7) bei gleichzeitigem Vertauschen von m mit $-m$ und μ mit $-\mu$ ungeändert bleibt, so erhalten wir für die gleichen Lösungen eine zweite Darstellung, indem wir die genannte Substitution in (2.14) und (2.15) vornehmen:

$$Y'_{l,m,\mu} = (1+x)^{\frac{m-\mu}{2}} (1-x)^{\frac{m+\mu}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} [(1+x)^{l+\mu} (1-x)^{l-\mu}] \quad (2.14')$$

$$N'^2 = \frac{2^{2l+1}}{2l+1} (l+\mu)! (l-\mu)! \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad (2.15')$$

$Y_{l,m,\mu}$ und $Y'_{l,m,\mu}$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor.

Diese Formeln sind im wesentlichen schon von TAMM³⁾ angegeben worden. Seine Darstellung ist jedoch etwas unübersichtlich, da Fallunterscheidungen je nach dem Vorzeichen von m und $m - \mu$ gemacht werden, was aber überflüssig ist.

Für $\mu = 0$ gehen sämtliche, in diesem Abschnitt angegebenen Formeln in diejenigen für die Kugelfunktionen über. Für $\mu = \pm 1/2$ erhält man Funktionen, welche bei der Behandlung des Dirac'schen Wasserstoffatoms in Polarkoordinaten, wie das SCHRÖDINGER³⁾ gezeigt hat, auftreten. Man erkennt das am einfachsten, wenn man in den von PAULI²⁾ angegebenen Gleichungen (S. 159, Gl.32a,b)

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} \frac{d}{d\vartheta} (\sqrt{\sin \vartheta} g) + \frac{m}{\sin \vartheta} g - k f = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} \frac{d}{d\vartheta} (\sqrt{\sin \vartheta} f) - \frac{m}{\sin \vartheta} f + k g = 0$$

zu den Gleichungen zweiter Ordnung für f und g übergeht und $x = \cos \vartheta$ setzt. Man findet, mit $k - 1/2 = l$

$$f = Y_{l, m, -1/2}; \quad g = Y_{l, m, +1/2}$$

In unserer Diskussion der Gleichung (2.7) ist der von PAULI gegebene Beweis enthalten, dass in diesem Falle m und l halbganz sein müssen.

Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass die Gleichung (2.7) mit halbzahligen m und μ auch in der von WENTZEL⁵⁾ entwickelten Theorie der Kernkräfte auftritt.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Literatur.

- 1) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London **133** (1931) 60.
- 2) W. PAULI, Helv. Phys. Acta **XII** (1939) 147.
- 3) J. TAMM, ZS. f. Ph. **71** (1931) 141.
- 4) E. SCHRÖDINGER, Pontificia Acad. Scient. **2** (1938) 321.
- 5) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **XVI** (1943) 222.

Über die Stabilität schwerer Kerne in der Mesontheorie

von Fritz Coester.

(25. XII. 43.)

Die Mesontheorie sagt bei Annahme starker Kopplung Protonisobaren höheren Spins und höherer Ladung voraus, die nach R. SERBER den Sättigungscharakter der Kernkräfte gefährden können. Es wird mit Hilfe einer Thomas-Fermi-Näherung gezeigt, dass für alle Kopplungsansätze, die ein positives Wechselwirkungspotential liefern, der Sättigungscharakter der Kernkräfte erhalten bleibt. (§ 4) Eine Diskussion der Stabilitätsverhältnisse liefert stark einschränkende Kriterien für die Wahl des Kopplungsparameters und der Isobaranregungsenergie. (§ 5) Bei Berücksichtigung der Coulombenergie lässt sich die Kernladungszahl in Übereinstimmung mit der Erfahrung berechnen. (§ 6)

§ 1. Einleitung.

Die bisher meist verwendeten Methoden zur Berechnung der statischen Kernkräfte in der Mesontheorie enthalten Entwicklungen nach steigenden Potenzen des Kopplungsparameters. Der Vergleich mit der Erfahrung ergibt jedoch so grosse Werte für den Kopplungsparameter, dass diese Entwicklungen nicht oder nur sehr schlecht konvergieren. Deshalb wurde von WENTZEL¹⁾, zunächst am Beispiel des geladenen skalaren Feldes, eine Näherungsmethode für starke Kopplung ausgearbeitet, die einer Entwicklung nach fallenden Potenzen des Kopplungsparameters entspricht. Die Methode wurde dann in etwas vereinfachter Form von OPPENHEIMER und SCHWINGER²⁾, PAULI, SERBER und DANCOFF³⁾ und WENTZEL⁴⁾ auf andere Feldtypen angewendet.

Die für das Verständnis des Folgenden wesentlichen Grundgedanken und Ergebnisse dieser Methode seien hier am Beispiel des neutralen Pseudoskalarfeldes kurz erläutert. Die Hamiltonfunktion

¹⁾ G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **13**, S. 269 (1940) u. **14**, S. 633 (1941).

²⁾ OPPENHEIMER und SCHWINGER, *Phys. Rev.* **60**, S. 150 (1941).

³⁾ DANCOFF und PAULI, DANCOFF und SERBER, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **16**, Nr. 7, Noten 7 und 43. Dies sind nur kurze Mitteilungen. Amerikanische Veröffentlichungen seit Mai 1942 sind gegenwärtig in der Schweiz nicht erhältlich.

⁴⁾ G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **16**, S. 222 (1943) und **16**, S. 551 (1943).

des mit N ruhenden Nucleonen gekoppelten neutralen Pseudoskalarfeldes ist

$$H = H^0 + H'$$

$$H^0 = \frac{1}{2} \int dx (\pi^2 + |\text{grad } \psi|^2 + \mu^2 \psi^2)$$

$$H' = \sum_{v=0}^{N-1} H'^{(v)} = -\frac{g}{\mu} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(v)} \int dx \delta_a(x - x^{(v)}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (1)$$

Mit den Bezeichnungen: $\sigma_i^{(v)}$ = Paulische Spinmatrizen, g = dimensionsloser Kopplungsparameter⁵), μ = Mesonmasse, $\hbar = 1$, $c = 1$, $\delta_a(x - x^{(v)})$ = zentralsymmetrische Formfunktion des v -ten Nucleons. $\int dx \delta_a(x) = 1$. Der Protonradius a wird nach OPPENHEIMER und SCHWINGER⁶) definiert durch die Beziehung

$$\frac{1}{a} = \int dx \int dx' \frac{\delta_a(x) \delta_a(x')}{|x - x'|} \quad (2)$$

Damit eine Feldtheorie der Kernkräfte überhaupt einen Sinn hat, muss man fordern, dass der Protonradius klein gegen die Reichweite der Kernkräfte ist, d. h. $a\mu \ll 1$. Als Bedingung für die Brauchbarkeit der Methode ergibt sich $g \gg a\mu$.

Man führt als neue Feldvariablen die Entwicklungskoeffizienten p_s, q_s der Felder $\pi(x), \psi(x)$ nach einem Orthogonalsystem $U_s(x)$ ein, von dem nur die ersten $3N$ -Funktionen explizit angegeben werden müssen.

$$U_{3v+i} = \frac{g}{\mu\gamma} \frac{\partial \delta_a(x - x^{(v)})}{\partial x_i} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3) \\ (v = 0, 1, \dots, N-1) \end{matrix} \quad (3)$$

Diese Funktionen sind nur orthogonal, wenn $|x^{(\mu)} - x^{(v)}| \gg a$ ist. Das muss also immer vorausgesetzt werden. γ bestimmt sich aus der Normierungsbedingung der U_{3v+i} . Es ist $\gamma \approx \frac{g}{\mu} a^{\frac{5}{2}}$. Damit wird

$$H = \frac{1}{2} \sum_s p_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{rs} c_{rs} q_r q_s - \gamma \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(v)} q_{3v+i} \quad (4)$$

wo

$$c_{rs} = \int dx U_r(x) (\mu^2 - \Delta) U_s(x) \quad (5)$$

Bei starker Kopplung, wenn H' nicht als kleine Störung betrachtet werden kann, transformiert man H' als Matrix bezüglich

⁵) Gegenüber dem Zitat Fussnote 4 ist die Bezeichnungsänderung $g \rightarrow g/\mu$ vorgenommen worden.

⁶) OPPENHEIMER und SCHWINGER, l. c.

der Spinvariablen auf Diagonalforn. Das bedeutet eine Drehung des Koordinatensystems im Spinraum jedes Nucleons, so dass die Vektoren $\tilde{q}^{(v)} = \{q_{3v+1}, q_{3v+2}, q_{3v+3}\}$ in die 3-Achsen fallen. (σ_3 diagonal.) Die unitäre Matrix $S^{(v)}$, die $H^{(v)}$ auf Diagonalforn transformiert, hängt dementsprechend von den Polarwinkeln $\Theta^{(v)}$, $\Phi^{(v)}$ des Vektors $\tilde{q}^{(v)}$ ab. H' wird durch $S = \prod_v S^{(v)}$ auf Diagonalforn transformiert. Der tiefste Eigenwert von H' ist $-\gamma \sum_v |\tilde{q}^{(v)}|$. Die Ausserdiagonalelemente von $S^* H^0 S$ (in H^0 kommutieren $p_\Theta^{(v)}$ und $p_\Phi^{(v)}$ nicht mit $S^{(v)}$) sind bei starker Kopplung vernachlässigbar klein, so dass die zu tiefen Eigenwerten der transformierten Hamiltonfunktion $S^* H S$ gehörigen Eigenfunktionen praktisch einkomponentig sind. Die ursprünglichen Freiheitsgrade der „nackten“ Nucleonen verschwinden also; dafür treten die $\Theta^{(v)}$, $\Phi^{(v)}$ als neue Freiheitsgrade der Nucleonen auf. Denn ist $F'(q)$ eine einkomponentige Eigenfunktion von $S^* H S$ und sind $\chi_1^{(v)}$ und $\chi_2^{(v)}$ die beiden unabhängigen zweikomponentigen Spineigenfunktionen des v ten nackten Nucleons, so ist die zugehörige Eigenfunktion von H

$$F = \prod_v \left(\cos \frac{\Theta^{(v)}}{2} e^{i \frac{\Phi^{(v)}}{2}} \chi_1^{(v)} - \sin \frac{\Theta^{(v)}}{2} e^{-i \frac{\Phi^{(v)}}{2}} \chi_2^{(v)} \right) F' \quad (6)$$

Die stationären Zustände sind demnach von $\Theta^{(v)}$, $\Phi^{(v)}$ abhängige Superpositionen der Spineigenzustände der nackten Nucleonen. Daraus ist ersichtlich, dass die $\Theta^{(v)}$, $\Phi^{(v)}$ als Freiheitsgrade der Nucleonen interpretiert werden müssen. Dass gewisse Variable des Mesonfeldes als Freiheitsgrade der Nucleonen interpretiert werden müssen, bedeutet offenbar, dass Mesonen an die Nucleonen gebunden sind. $p_\Phi^{(v)}$ erweist sich als der Beitrag dieser gebundenen Mesonen zur 3-Komponente des Nucleonspins. Aus der Bedingung, dass F eine stetige Funktion auf der Kugel $|\tilde{q}^{(v)}| = \text{const}$ sein muss, folgt, dass $p_\Phi^{(v)}$ in Anwendung auf F ganzzahlig gequantelt ist, während es in Anwendung auf F' , wegen dem Auftreten des Winkels $\Phi/2$ in S , halbzahlig gequantelt ist. Die Spinkomponente des v ten Nucleons in der 3-Richtung ist jetzt $S^* (\sigma_3/2 + p_\Phi^{(v)}) S = p_\Phi^{(v)}$.

Um die Energie des Nucleonensystems zu erhalten, hat man $K \equiv H^0 - \gamma \sum_v |\tilde{q}^{(v)}|$ durch geeignete kanonische Transformationen in einen nur von den $p_\Theta^{(v)}$, $p_\Phi^{(v)}$, $\Theta^{(v)}$, $\Phi^{(v)}$ und einen von den Feldvariablen der freien Mesonen abhängigen Anteil (Energie der freien Mesonen + Streuterm) zu separieren. Danach muss mit S transformiert, und das für die Bestimmung von F' massgebende Diagonalelement genommen werden. Die potentielle Energie der Kernkräfte ist dann der abstandsabhängige Anteil der Selbstenergie des

Nucleonensystems, d. h. des Minimalwertes von K , den man erhält, wenn man $q_{3\,v+i} = |\tilde{q}^{(v)}| e_i^{(v)}$ einsetzt und die $e_i^{(v)}$ konstant hält. Unter der Voraussetzung $|x^{(\mu)} - x^{(v)}| \gg a$ hat sie die Form $\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu}$, wo

$$V_{\mu\nu} = - \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 (e^{(v)} \cdot \text{grad}^{(v)}) (e^{(\mu)} \cdot \text{grad}^{(\mu)}) \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(v)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(v)}|} \quad (7)$$

Terme niederer Ordnung in g werden vernachlässigt. Diese Form des Wechselwirkungspotentials ist aus Symmetrie- und Invarianzgründen plausibel, wenn man beachtet, dass die zu c_{rs} inverse Matrix

$$(c^{-1})_{rs} = \int dx \int dx' U_r(x) U_s(x') \frac{e^{-\mu |x - x'|}}{4\pi |x - x'|} \text{ ist.}$$

Aus $\frac{1}{2} \sum_s p_s^2$ erhält man einen von $p_\Theta^{(v)}$, $p_\Phi^{(v)}$ abhängigen Beitrag zur Nucleonenenergie. Sie setzt sich additiv aus den Beiträgen der einzelnen Nucleonen zusammen⁷⁾. Der Beitrag eines Nucleons ist vor der S -Transformation von der Form der kinetischen Energie eines sphärischen Pendels; nachher ist

$$H_I^{(v)} = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \left\{ \frac{1}{\sin \Theta^{(v)}} p_\Theta^{(v)} \sin \Theta^{(v)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta^{(v)}} (p_\Phi^{(v)2} + \cos \Theta^{(v)} p_\Phi^{(v)} + \frac{1}{4}) \right\} \quad (8)$$

Die Terme

$$\frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \left(\frac{\cos \Theta^{(v)}}{\sin^2 \Theta^{(v)}} p_\Phi^{(v)} + \frac{1}{4 \sin^2 \Theta^{(v)}} \right)$$

kommen durch die S -Transformation hinzu. Die Eigenwerte von $H_I^{(v)}$ sind

$$E_{I,j}^{(v)} = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \cdot j^{(v)} (j^{(v)} + 1) \quad (j^{(v)} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots) \quad (9)$$

Die Eigenwerte $m^{(v)}$ von $p_\Phi^{(v)}$ sind für festes $j^{(v)}$ auf den Bereich $|m^{(v)}| \leq j^{(v)}$ beschränkt. j und m sind Spinquantenzahlen (m = Spinkomponente, j = Quantenzahl des Gesamtspins). Für $j = \frac{1}{2}$ kann m nur $\pm \frac{1}{2}$ sein. Die Zustände des untersten Isobarenniveaus entsprechen also genau den beiden Spinzuständen eines nackten Nucleons.

Bei den anderen Feldtypen liegen die Verhältnisse ähnlich. Man entwickelt nach einem Orthogonalsystem, so dass in H' nur gewisse q auftreten. Diese q bestimmen gewisse Winkel, die die Rolle von Drehwinkeln bei der Transformation von H' spielen und als

⁷⁾ Abstandsabhängige Terme werden hier vernachlässigt: $|x^{(\mu)} - x^{(v)}| \rightarrow \infty$.

Freiheitsgrade der Nucleonen zu interpretieren sind. In den symmetrischen Theorien hat man entweder drei „Eulersche Winkel“, wobei den beiden zyklischen Winkeln Spin und Ladung zugeordnet sind, oder zwei Paar Polarwinkel, deren eines zum Spin, das andere zur Ladung gehört. Die Isobarenenergie hat entsprechend die Form der mit S transformierten kinetischen Energie eines Kugelschwingers oder zweier unabhängiger sphärischer Pendel. Die zu den zyklischen Winkeln konjugierten Impulse sind halbzahlig gequantelt und haben die Bedeutung einer Spinkomponente und der Ladung des Nucleons. Die Zustände des tiefsten Isobarenniveaus entsprechen genau den Spin- und Ladungszuständen eines nackten Nucleons. Die in $V_{\mu\nu}$ auftretenden winkelabhängigen Funktionen verschwinden im Integral über alle Winkel. Das muss so sein, da $H^{(\nu)}$ etwa von der Form $\sum_{i\varrho} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} T_{i\varrho}^{(\nu)}$ ist und $T_{i\varrho}^{(\nu)}$ im Mittel über alle möglichen Orientierungen der Koordinatensysteme im Spin- und isotopen Spinraum verschwindet.

§ 2. Ansätze.

Die im folgenden als typische Beispiele zu betrachtenden Kopplungstypen seien durch den Wechselwirkungsterm der Hamiltonfunktion charakterisiert.

a) Neutrale Pseudoskalartheorie.

$$H' = -\frac{g}{\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(\nu)} \int dx \delta_a(x - x^{(\nu)}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (10a)$$

b) Symmetrische Pseudoskalartheorie.

$$H' = -\frac{g}{\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \sum_{\varrho=1}^3 \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx \delta_a(x - x^{(\nu)}) \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial x_i} \quad (10b)$$

($\tau_\varrho^{(\nu)}$ = isotope Spinmatrizen)

c) Symmetrische Vektorthorie.

$$H' = -\frac{g}{\sqrt{2}\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \sum_{\varrho=1}^3 \sigma_i^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx \delta_a(x - x^{(\nu)}) \operatorname{rot}_i \vec{\psi}_\varrho - \frac{f}{\mu^2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\varrho=1}^3 \tau_\varrho^{(\nu)} \int dx \delta_a(x - x^{(\nu)}) \operatorname{div} \vec{\pi}_\varrho \quad (10c)$$

f ist ein zweiter dimensionsloser Kopplungsparameter.

d) Mischung der Feldtypen (b) und (c) mit $f = 0$ ⁸⁾.

$$H' = - \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \sum_{\varrho=1}^3 \sigma_i^{(\nu)} \tau_{\varrho}^{(\nu)} \int dx \delta_a(x - x^{(\nu)}) \left(\frac{g_{PS}}{\mu_{PS}} \frac{\partial \psi_{\varrho}^{PS}}{\partial x_i} + \frac{g_V}{\mu_V} \text{rot}_i \vec{\psi}_{\varrho}^V \right) \quad (10d)$$

Für diese Kopplungstypen liefert die Methode für starke Kopplung folgende Isobaren- und Wechselwirkungsenergien.

a) Neutrale Pseudoskalartheorie.

$$H_I^{(\nu)} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sin \Theta^{(\nu)}} p_{\Theta}^{(\nu)} \sin \Theta^{(\nu)} p_{\Theta}^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta^{(\nu)}} (p_{\Phi}^{(\nu)2} + \cos \Theta^{(\nu)} p_{\Phi}^{(\nu)} + \frac{1}{4}) \right\} \quad (11a)$$

$$E_{Ij}^{(\nu)} = \varepsilon \cdot j^{(\nu)} (j^{(\nu)} + 1) \quad \varepsilon = \frac{6 \pi a \mu^2}{g^2} \quad (12a)$$

$j^{(\nu)}$ durchläuft alle positiven halbzahligen Werte. Von der anderen Spinquantenzahl $m^{(\nu)}$ ($|m^{(\nu)}| \leq j^{(\nu)}$) hängen die Energieeigenwerte nicht ab, so dass ein Isobarenniveau $2j + 1$ -fach entartet ist.

$$V_{\mu\nu} = \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 \sum_{ij} c_i(\Theta^{(\nu)}, \Phi^{(\nu)}) c_j(\Theta^{(\mu)}, \Phi^{(\mu)}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \quad (13a)$$

b) Symmetrische Pseudoskalartheorie.

$$H_I^{(\nu)} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sin \Theta^{(\nu)}} p_{\Theta}^{(\nu)} \sin \Theta^{(\nu)} p_{\Theta}^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta^{(\nu)}} (p_{\Phi}^{(\nu)2} + 2 \cos \Theta^{(\nu)} p_{\Phi}^{(\nu)} p_{\Psi}^{(\nu)} + p_{\Psi}^{(\nu)2}) \right\} \quad (11b)$$

$p_{\Phi}^{(\nu)}$ (Eigenwert $m^{(\nu)}$) ist eine Spinkomponente, $p_{\Psi}^{(\nu)} + \frac{1}{2}$ (Eigenwert $n^{(\nu)} + \frac{1}{2}$) die Ladung des ν ten Nucleons.

$$E_{Ij}^{(\nu)} = \varepsilon \cdot j^{(\nu)} (j^{(\nu)} + 1) \quad \varepsilon = \frac{3 \pi a \mu^2}{g^2} \quad (12b)$$

$j^{(\nu)}$ und $m^{(\nu)}$ haben die gleiche Bedeutung wie im Fall (a). Die Ladungsquantenzahl $n^{(\nu)}$ ist ebenfalls halbzahlige. Es muss auch $|n^{(\nu)}| \leq j^{(\nu)}$ sein, so dass ein Isobarenniveau hier $(2j + 1)^2$ -fach entartet ist.

$$V_{\mu\nu} = \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 \sum_{ij} \sum_{\varrho} s_{i\varrho}(\Theta^{(\nu)}, \Phi^{(\nu)}, \Psi^{(\nu)}) s_{j\varrho}(\Theta^{(\mu)}, \Phi^{(\mu)}, \Psi^{(\mu)}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \quad (13b)$$

⁸⁾ Eine solche Mischung wurde zuerst von MÖLLER und ROSENFELD (Kgl. Danske Vidensk. S., Math.-fys. Medd. XVII, 8.) mit $\mu_{PS} = \mu_V$ und dann von SCHWINGER (Bull. Amer. Phys. Soc. 16, Nr. 7, Note 8) mit $\mu_{PS} < \mu_V$ vorgeschlagen, um die wie $1/r^3$ singulären Tensorkräfte zu eliminieren.

Dabei sind die $s_{i\varrho}$ die 9 Koeffizienten einer orthogonalen Transformation in Abhängigkeit von drei Eulerschen Winkeln⁹⁾.

c) Symmetrische Vektorthorie.

$$\text{I. } \frac{3}{2} (f/g)^2 < 1$$

$$(11cI) = (11b), (12cI) = (12b)$$

$$V_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 \sum_e \sum_{ij} s_{je}^{(\nu)} s_{ie}^{(\mu)} \left(\delta_{ij} \Delta^{(\nu)} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \right) \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \quad (13cI)$$

Die Bedeutung der Winkel und der $s_{i\varrho}$ ist gleich wie im Fall (b).

$$\text{II. } \frac{3}{2} (f/g)^2 > 1$$

$$H_I^{(\nu)} = \varepsilon_l \left\{ \frac{1}{\sin \Theta_l^{(\nu)}} p_{\phi_l}^{(\nu)} \sin \Theta_l^{(\nu)} p_{\phi_l}^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta_l^{(\nu)}} (p_{\phi_l}^{(\nu)2} + \cos \Theta_l^{(\nu)} p_{\phi_l}^{(\nu)} + \frac{1}{4}) \right\} \\ + \varepsilon_s \left\{ \frac{1}{\sin \Theta_s^{(\nu)}} p_{\phi_s}^{(\nu)} \sin \Theta_s^{(\nu)} p_{\phi_s}^{(\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \Theta_s^{(\nu)}} (p_{\phi_s}^{(\nu)2} + \cos \Theta_s^{(\nu)} p_{\phi_s}^{(\nu)} + \frac{1}{4}) \right\} \quad (11cII)$$

$p_{\phi_s}^{(\nu)}$ (Eigenwert $m^{(\nu)}$) ist eine Spinkomponente, $p_{\phi_e}^{(\nu)} + \frac{1}{2}$ (Eigenwert $n^{(\nu)} + \frac{1}{2}$) ist die Ladung des ν ten Nucleons.

$$E_{I,kj}^{(\nu)} = \varepsilon_l \cdot k^{(\nu)} (k^{(\nu)} + 1) + \varepsilon_s \cdot j^{(\nu)} (j^{(\nu)} + 1) \\ \varepsilon_l = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2 + 3f^2} \\ \varepsilon_s = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} \quad (12cII)$$

j und m haben die gleiche Bedeutung wie oben; $|m| \leq j$. k durchläuft wie j alle positiven halbzahligen Werte und es ist $|n| \leq k$. Der Entartungsgrad eines Isobarenniveaus ist demnach $(2k+1)(2j+1)$.

$$V_{\mu\nu} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 [(\mathbf{e}_s^{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_s^{(\nu)}) \Delta^{(\nu)} - (\mathbf{e}_s^{(\mu)} \cdot \text{grad}^{(\nu)}) (\mathbf{e}_s^{(\nu)} \cdot \text{grad}^{(\nu)})] + f^2 \right\} \\ \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \quad (13cII)$$

⁹⁾ $s_{11} = \cos \Theta \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi, \dots, s_{33} = \cos \Theta$.

¹⁰⁾ Die Indizes l und s sollen auf Ladung und Spin hinweisen; sie bedeuten hier natürlich keine Komponentenbildung. Z. B. $\mathbf{e}_{l3}^{(\nu)} = \cos \Theta_l^{(\nu)}$.

d) Mischung der Feldtypen (b) und (c) mit $f = 0$.

(11d) = (11b), (12d) = (12d), wobei $g \equiv \sqrt{g_{PS}^2 + 2g_V^2}$

$$V_{\mu\nu} = \sum_{ij} \sum_{\varrho} s_{i\varrho}^{(\nu)} s_{j\varrho}^{(\mu)} \left\{ \left(\frac{g_{PS}}{\mu_{PS}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu_{PS}|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \right. \\ \left. + \left(\frac{g_V}{\mu_V} \right)^2 \left(\delta_{ij} \Delta^{(\nu)} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \right) \frac{e^{-\mu_V|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \right\} \quad (13d)$$

Diese Formeln sind unter Voraussetzung ruhender Nucleonen abgeleitet. Im folgenden sollen sie auch auf Kerne; in denen die Nucleonen natürlich nicht ruhen, angewendet werden, in der Meinung, dass die Geschwindigkeiten von unrelativistischer Grössenordnung sind.

§ 3. Die statistische Näherung.

Wir diskutieren die Energie schwerer Kerne in der statistischen Näherung. Steht q für sämtliche Koordinaten eines Nucleons, und ist $V(q', q'')$ die Wechselwirkungsenergie zweier Nucleonen mit den Koordinaten q' und q'' , so ist die potentielle Energie nach HARTREE und FOCK

$$E_{\text{Pot}} = \frac{1}{2} \int dq' \int dq'' [\varrho(q') \varrho(q'') - \varrho(q', q'') \varrho(q'', q')] V(q', q'') \quad (14)$$

WO

$$\varrho(q', q'') = \sum_{\nu=0}^{N-1} (q' | \nu) (\nu | q''), \quad \varrho(q) = \varrho(q, q) \quad (15)$$

und $(q | \nu)$ die Eigenfunktion des ν ten Nucleons ist. Aus § 2 entnehmen wir die Bedeutung von q :

$$q = \{q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3, q^4 = \cos \Theta, q^5 = \Phi\}^{11} \quad (16a)$$

$$q = \{q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3, q^4 = \cos \Theta, q^5 = \Phi, q^6 = \Psi\} \\ (16b) = (16cI) = (16d)$$

$$q = \{q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3, q^4 = \cos \Theta, q^5 = \Phi, q^6 = \cos \Theta_s, q^7 = \Phi_s\}$$

$$dq \equiv \prod_{i=1}^n dq^i \quad (16c II)$$

¹¹⁾ In diesem Fall hängen die Dichten streng genommen noch von einer zweiwertigen Ladungsvariablen ab, während $\int dq' \int dq''$ die Summation über diese einschliesst. Unter der Annahme, dass jeder Zustand durch ein Proton und ein Neutron besetzt ist (Vernachlässigung der Coulombenergie), kann man diese Ladungsvariable jedoch einfach weglassen.

Aus (14) ist ersichtlich, dass nur das Richtungsmittel von $V(q', q'')$ eine Rolle spielt, so dass in (13) überall folgende Vereinfachung angebracht werden kann:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^{(\nu)} \partial x_j^{(\nu)}} \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \rightarrow \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta^{(\nu)} \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \\ \rightarrow \frac{1}{3} \delta_{ij} \mu^2 \frac{e^{-\mu |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|}}{4\pi |x^{(\mu)} - x^{(\nu)}|} \quad (17)$$

Damit wird $V(q', q'')$ von der Form

$$V(q', q'') = J(|x' - x''|) \sum_k s_k(\omega') s_k(\omega'') \quad (18)$$

(ω steht für die Gesamtheit der Winkelkoordinaten: $\omega = \{q^4, \dots, q^n\}$), wobei

$$J(|x' - x''|) = \frac{e^{-\mu |x' - x''|}}{4\pi |x' - x''|} \quad (\text{a}), (\text{b}), (\text{c}) \quad (19)$$

$$J(|x' - x''|) = \left(\frac{g_P s}{g} \right) \frac{e^{-\mu_{PS} |x' - x''|}}{4\pi |x' - x''|} + 2 \left(\frac{g_V}{g} \right) \frac{e^{-\mu_V |x' - x''|}}{4\pi |x' - x''|} \quad (19d)$$

und

$$s_k(\omega) = \frac{g}{\sqrt{3}} e_k(\omega) \quad (20a)$$

$$s_k(\omega) = \frac{g}{\sqrt{3}} s_{i_k}(\omega) \quad (20b) = (20c \text{ I}) = (20d)$$

Die Paare i_k sind durch einen einfachen Index k durchnummeriert zu denken.

$$s_k(\omega) = \frac{g}{\sqrt{3}} e_{si}(\omega) e_{i_k}(\omega) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, 9 \quad (20c \text{ II})$$

$$s_{10}(\omega) = f e_{i1}(\omega), \quad s_{11}(\omega) = f e_{i2}(\omega), \quad s_{12} = f e_{i3}(\omega)$$

Damit ist immer

$$\int d\omega s_k(\omega) = 0 \quad \left(d\omega \equiv \prod_{i=4}^n dq^i \right) \quad (21)$$

und

$$\sum_k s_k^2 = \begin{cases} \frac{g^2}{3} & (\text{a}) \\ g^2 & (\text{b}), (\text{c I}) \text{ und } (\text{d}) \\ \frac{g^2}{3} + f^2 & (\text{c II}) \end{cases} \quad (22)$$

¹²⁾ Hier kommt streng genommen noch $\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta(x^{(\mu)} - x^{(\nu)})$ hinzu. Solange $|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}| \gg a$ ist, für welchen Fall $V_{\mu\nu}$ nur abgeleitet ist, verschwindet dies. In der statistischen Näherung wird jedoch über alle Abstände integriert. Man hat daher $V_{\mu\nu}$ für kleine Abstände zu extrapolieren, was in der Weise geschieht, dass man diesen Nahewirkungsterm weglässt. Man kann ihn immer durch einen ad hoc gemachten Zusatz in H' kompensiert denken.

Die näherungsweise Berechnung der Dichte gelingt einfach in zwei Grenzfällen:

1) Grenzfall grosser Kernradien:

Ist der Kernradius so gross, dass die maximale kinetische Energie eines Nucleons $P^2/2M$ klein gegen die Isobarenanregungsenergie ($\sim \varepsilon$) ist, so werden sich praktisch alle Nucleonen auf dem untersten Isobarenniveau befinden. Man kann dann $(q | \nu) = (x | \nu)(\omega | \nu)$ setzen, wo $(\omega | \nu)$ eine zum tiefsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion von $H_I^{(\nu)}$ ist. Unter der Annahme, dass in jedem Translationszustand alle vier Spin-Ladungszustände des tiefsten Isobarenniveaus realisiert sind (Vernachlässigung der Coulombenergie) wird dann die Dichte

$$\varrho(q', q'') = \varrho(x', x'') \frac{1}{4} \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{\lambda=1}^2 (\omega' | \lambda \kappa) (\kappa \lambda | \omega''), \quad \varrho(q) - \varrho(q, q) \quad (23)$$

wenn $(\omega | \lambda \kappa)$ die vier unabhängigen Eigenfunktionen des untersten Isobarenniveaus sind. κ numeriert die Spinzustände, λ die Ladungszustände. Aus Symmetriegründen ist $\sum_{\kappa \lambda} (\omega | \lambda \kappa) (\kappa \lambda | \omega)$ von ω unabhängig, so dass wegen (18) und (21) der erste Term in (14) verschwindet. Durch Einsetzen von (23) in (14) wird

$$E_{\text{Pot}} = -\frac{1}{2} \int dx' \int dx'' \varrho(x', x'') J(|x' - x''|) \\ - \frac{1}{16} \sum_k \sum_{\kappa' \lambda'} \sum_{\kappa'' \lambda''} (\kappa' \lambda' | s_k | \lambda'' \kappa'') (\kappa'' \lambda'' | s_k | \lambda' \kappa') \quad (24)$$

wenn $(\kappa' \lambda' | s_k | \lambda'' \kappa'') = \int d\omega (\kappa' \lambda' | \omega) s_k(\omega) (\omega | \lambda'' \kappa'')$ ist.

Diese Matrizen bestimmt man nach (20) aus den Matrizen der e_i bzw. s_{iq} , für die man findet

$$\begin{aligned} (\kappa' \lambda' | e_i | \lambda'' \kappa'') &= \frac{1}{8} \delta_{\lambda' \lambda''} (\kappa' | \sigma_i | \kappa'') \\ (\kappa' \lambda' | s_{iq} | \lambda'' \kappa'') &= -\frac{1}{8} (\kappa' | \sigma_i | \kappa'') (\lambda' | \tau_q | \lambda'') \\ (\kappa' \lambda' | e_{si} e_{eq} | \lambda'' \kappa'') &= \frac{1}{9} (\kappa' | \sigma_i | \kappa'') (\lambda' | \tau_q | \lambda'') \\ (\kappa' \lambda' | e_{eq} | \lambda'' \kappa'') &= \frac{1}{8} \delta_{\kappa' \kappa''} (\lambda' | \tau_q | \lambda'') \end{aligned} \quad (25)$$

Nach (20) und (25) ist somit

$$\frac{1}{16} \sum_k \sum_{\kappa' \lambda'} \sum_{\kappa'' \lambda''} (\kappa' \lambda' | s_k | \lambda'' \kappa'') (\kappa'' \lambda'' | s_k | \lambda' \kappa') = \begin{cases} \frac{1}{36} g^2 & \text{(a)} \\ \frac{1}{12} g^2 & \text{(b), (cI) und (d)} \\ \frac{1}{108} g^2 + \frac{1}{12} f^2 & \text{(cII) }^{13)} \end{cases} \quad (26)$$

¹³⁾ Hier ist die Bedingung für den Grenzfall grosser Kernradien

$$\frac{P^2}{2M} \ll \varepsilon_l < \varepsilon_s.$$

2) Grenzfall kleiner Kernradien $P^2/2M \gg \varepsilon$ (bzw. $P^2/2M \gg \varepsilon_s > \varepsilon_e$).

Ist umgekehrt der Kernradius so klein, dass die maximale kinetische Energie eines Nucleons gross gegen die Isobarenanregungsenergie ist, so dass viele höhere Isobaren im Kern angeregt sind, so kann man die Dichten, wie WENTZEL¹⁴⁾ gezeigt hat, in einfacher Weise mit der Thomas-Fermi-Methode berechnen, wobei die q aus (16) zusammen mit den zu ihnen konjugierten Impulsen den Phasenraum bilden. Die Metrik des q -Raumes ist natürlich nicht euklidisch; sie ist im wesentlichen dadurch bestimmt, dass die Winkelvariable Koordinaten auf einer Kugelfläche (a), auf einer dreidimensionalen Hypersphäre¹⁵⁾ ((b), (cI) und (d)) oder auf zwei Kugelflächen (cII) sind. Über den Radius dieser Kugeln kann man noch willkürlich verfügen. Es ist bequem, den Radius der zweidimensionalen Kugelflächen gleich $\frac{1}{\sqrt{2M\varepsilon}}$ und den der dreidimensionalen Hypersphären gleich $\frac{1}{2\sqrt{2M\varepsilon}}$ zu setzen. Wir erhalten dann folgende Metriken:

$$g_{ik} = \delta_{ik} \text{ wenn } i \text{ oder } k \leq 3 \text{ ist.}$$

Für i und $k > 3$ wird

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M\varepsilon(1-(q^4)^2)} & 0 \\ 0 & \frac{1-(q^4)^2}{2M\varepsilon} \end{pmatrix} (g^{ik}) = \begin{pmatrix} 2M\varepsilon(1-(q^4)^2) & 0 \\ 0 & \frac{2M\varepsilon}{1-(q^4)^2} \end{pmatrix} \quad (26a)$$

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M\varepsilon(1-(q^4)^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2M\varepsilon} & \frac{-q^4}{2M\varepsilon} \\ 0 & \frac{-q^4}{2M\varepsilon} & \frac{1}{2M\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (26b) = (26cI) = (26d)$$

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 2M\varepsilon(1-(q^4)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2M\varepsilon}{1-(q^4)^2} & \frac{2M\varepsilon q^4}{1-(q^4)^2} \\ 0 & \frac{2M\varepsilon q^4}{1-(q^4)^2} & \frac{2M\varepsilon}{1-(q^4)^2} \end{pmatrix}$$

¹⁴⁾ G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **15**, S. 685 (1942). Im folgenden als l. c. 1942 zitiert.

¹⁵⁾ Es ist eine in der Kreiseltheorie bekannte Tatsache, dass man die Euler-schen Winkel als Koordinaten auf einer dreidimensionalen Hypersphäre auffassen kann und dass ein Kugelkreisel einem sphärischen Pendel auf dieser Hypersphäre äquivalent ist. (Vgl. z. B. Hund ZS. f. Phys. **51**, S. 1, 1928.)

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M\varepsilon_l(1-(q^4)^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(q^4)^2}{2M\varepsilon_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2M\varepsilon_s(1-(q^6)^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-(q^6)^2}{2M\varepsilon_s} \end{pmatrix} \quad (26cII)$$

Vernachlässigt man die Kommutatoren der p und q , was man in der Thomas-Fermi-Näherung immer macht, so schreibt sich die Isobarenenergie in allen Fällen in der Form

$$H_I^{(v)} = \frac{1}{2M} \sum_{i=4}^n \sum_{k=4}^n g^{(v)ik} p_i^{(v)} p_k^{(v)} \equiv \frac{1}{2M} |p_\omega^{(v)}|^2 \quad (27)$$

§ 4. Sättigungscharakter der Kräfte.

Es soll in diesem § gezeigt werden, dass der von WENTZEL¹⁶⁾ in der Skalartheorie festgestellte Kernzusammenbruch in den hier betrachteten Theorien nicht stattfindet. Für eine Erläuterung des Problems beschränken wir uns vorläufig wieder auf das Beispiel des neutralen Pseudoskalarfeldes (a), um dann den gewünschten Beweis in einer für alle Fälle gültigen Form durchzuführen.

Greifen wir zunächst zwei „festgehaltene“ Nucleonen aus einem schweren Kern heraus. Ihre Energie ist nach (18) und (27)

$$H = \frac{1}{2M} |p_\omega^{(1)}|^2 + \frac{1}{2M} |p_\omega^{(2)}|^2 + \frac{g^2}{3} J(r_{12}) (\mathbf{e}(\omega^{(1)}) \cdot \mathbf{e}(\omega^{(2)})) \quad (28)$$

Durch Einführen des Winkels zwischen $\mathbf{e}^{(1)}$ und $\mathbf{e}^{(2)}$ ($(\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^{(2)}) = \cos \vartheta_{12}$) wird H separiert. Für kleine Abstände ($|J(r_{12})| \gg \varepsilon$, vgl. (26a), (27)) sind die tiefsten stationären Zustände Nullpunktsschwingungen in einer tiefen Potentialmulde und die entsprechenden Energieeigenwerte sind angenähert gleich der Tiefe dieser Potentialmulde, d. h. gleich $-|J(r_{12})|$. Die Potentialmulde liegt bei $\vartheta_{12} = 0$ für $J(r_{12}) < 0$ und bei $\vartheta_{12} = \pi$ für $J(r_{12}) > 0$. Letzteres ist hier der Fall, während das Wechselwirkungspotential in der Skalartheorie das andere Vorzeichen hat. Betrachtet man N Nucleonen ($N \gg 1$), so unterscheiden sich die beiden Fälle wesentlich. Im Fall $J(r_{12}) < 0$ können alle Winkel bei Null „einfrieren“: Man bekommt gewöhnliche Kräfte ohne Sättigungscharakter. In der Skalartheorie hat WENTZEL¹⁶⁾ gezeigt, dass die kinetische Energie eine

¹⁶⁾ l. c. 1942.

Schrumpfung des Kerns und damit das „Einfrieren“ der Winkel nicht zu verhindern vermag. Etwas ähnliches kann jedoch im Fall $J(r_{12}) > 0$ nicht eintreten. $\vartheta_{12} = \pi$ bedeutet: Die beiden Nucleonen befinden sich in zwei diametralen Punkten der Kugelfläche. Es ist klar, dass bei Anwesenheit von N Nucleonen nicht jedes Paar den Winkelabstand π haben kann. Dagegen werden die Nucleonen möglichst grosse relative Winkelabstände haben: Die Nucleonen „stossen sich ab“. Das führt zu einer homogenen Verteilung der Nucleonen über die ganze Kugelfläche. Wegen (18) und (21) folgt daraus das Verschwinden des ersten Terms in (14). Ein Kernzusammenbruch ist damit ausgeschlossen.

Bei den anderen Feldtypen lassen sich im Prinzip ähnliche Überlegungen durchführen; nur sind die geometrischen Verhältnisse komplizierter und weniger anschaulich. Die Konstanz der Dichte im Winkelbereich hat immer das Verschwinden des ersten Terms in (14) zur Folge.

Es soll nun allgemein gezeigt werden, dass in allen Theorien mit $J(r) > 0$ die nach der Thomas-Fermi-Methode berechnete Dichte von ω unabhängig ist. Es ist

$$\varrho(q) = \int d\vec{p} \varrho(q, p) \quad \left(dp \equiv \prod_{i=1}^n dp_i \right)$$

wenn $\varrho(q, p)$ die Dichte im Phasenraum ist, die sich aus der Bedingung bestimmt, dass innerhalb einer Fläche konstanter Energie jede Phasenraumzelle vom Volumen $h^n = (2\pi)^n \beta$ -fach besetzt ist, und ausserhalb alle Zellen leer sind. ($\beta = 1$ in den symmetrischen Theorien; $\beta = 2$ in der neutralen Theorie entsprechend den beiden Ladungszuständen des Nucleons.)

$$\varrho(q, p) = \begin{cases} \frac{\beta}{(2\pi)^n} \text{ für } H(q, p) = \frac{1}{2M} |p|^2 + U(q) \leq W \\ \text{und } x \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad (29)$$

wo das Thomas-Fermi-Potential

$$\begin{aligned} U(q) &= \int d\vec{q}' \varrho(q') V(q', q) \\ &= \int d\vec{x}' \int d\vec{\omega}' \varrho(x', \omega') J(|x' - x|) \sum_k s_k(\omega') s_k(\omega) \text{ ist.} \end{aligned} \quad (30)$$

Folglich

$$\varrho(q) = \begin{cases} \text{const. } (W - U(q))^{\frac{n}{2}} \text{ für } W - U(q) > 0 \\ \text{und } x \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad (31)$$

Bei Vernachlässigung von Oberflächeneffekten können wir annehmen, dass

$$\begin{aligned} \varrho(q) &= \begin{cases} \varrho(\omega) & \text{im Kerninnern} \\ 0 & \text{ausserhalb} \end{cases} \\ U(q) &= \begin{cases} U(\omega) & \text{im Kerninnern} \\ 0 & \text{ausserhalb} \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Dann wird aus (30)

$$U(\omega) = A \int d\omega' \varrho(\omega') \sum_k s_k(\omega') s_k(\omega) = \sum_k C_k s_k(\omega) \quad (33)$$

wo

$$A = \int d(x' - x) J(|x' - x|)$$

und

$$C_k = A \int d\omega \varrho(\omega) s_k(\omega)$$

Multipliziert man dies mit C_k und summiert über k , so wird mit (33)

$$\sum_k C_k^2 = A \int d\omega \varrho(\omega) U(\omega) \quad (34)$$

Wir behaupten, dass für $A > 0^{17)}$ und $\varrho(\omega) \neq \text{const}$ die rechte Seite von (34) immer negativ ist, so dass (34) nur durch $\varrho(\omega) \equiv \text{const}$, $U(\omega) \equiv 0$ befriedigt wird.

Beweis:

Seien Ω^+ und Ω^- diejenigen Teilbereiche des gesamten Winkelbereiches Ω , in denen $U(\omega) > 0$ bzw. < 0 ist. Dann ist wegen $\int_{\Omega} d\omega s_k(\omega) = 0$ und (33)

$$\int_{\Omega^+} d\omega U(\omega) = - \int_{\Omega^-} d\omega U(\omega)$$

Mit dem Mittelwertsatz ist dann

$$\int_{\Omega} d\omega \varrho(\omega) U(\omega) = (\varrho(\omega^+) - \varrho(\omega^-)) \int_{\Omega^+} d\omega U(\omega) \quad (\omega^+ \in \Omega^+, \omega^- \in \Omega^-)$$

Der zweite Faktor ist nach Voraussetzung positiv, der erste ist nach (31) immer negativ, wenn nicht $\varrho(\omega) \equiv \text{const}$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. Die hier vernachlässigte Austauschenergie ist für hinreichend kleine Kernradien sicher vernachlässigbar klein, so dass jedenfalls kein Kernzusammenbruch eintritt.

¹⁷⁾ Dies ist in allen hier betrachteten Theorien der Fall.

§ 5. Diskussion der Stabilitätsverhältnisse unter Berücksichtigung der Austauschenergie.

Im folgenden werden wir die Stabilitätsverhältnisse in den beiden im § 3 behandelten Grenzfällen kleiner und grosser Kernradien diskutieren. Es wird sich zeigen, dass eine Interpolation im Zwischengebiet sinnvoll ist. Im Fall (cII) haben die Isobaren höheren Spins und höherer Ladung verschiedene Anregungsenergien, so dass die Diskussion in diesem Fall komplizierter wird. Der Fall (cII) soll deshalb der Einfachheit halber nicht mehr berücksichtigt werden, zumal dieser Kopplungsansatz wegen der schwachen Spinabhängigkeit der Kernkräfte, die wahrscheinlich keine befriedigende Beschreibung des Deuterons erlaubt, für die Beschreibung der Wirklichkeit weniger in Frage kommt.

A) Grenzfall kleiner Kernradien $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \gg 1$:

Nach § 4 ist die für die Bestimmung der Phasenraumdichte in der Thomas-Fermi-Näherung massgebende Fläche $H(q, p) = \text{const}$ bei Vernachlässigung der Austauschenergie eine Kugel im p -Raum. Dies gilt zwar in Strenge nicht mehr, wenn man die Austauschenergie berücksichtigt, da dann nach DIRAC¹⁸⁾ $H(q, p) = \frac{1}{2M} |p|^2 - U_A(q, p)$ ($U = 0$) ist. Begnügt man sich aber mit einer groben Abschätzung des Austauscheffektes, so kann man die Fläche $H(q, p) = \text{const}$ wieder durch eine Kugel im p -Raum ersetzen, indem man die p -Abhängigkeit von U_A vernachlässigt: $U_A(q, p) \rightarrow U_A(q, 0)$. Dass nämlich $U_A(q, p)$ nicht stark von p abhängt, kann man folgendermassen einsehen. Wenn man in (14) die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten q und \bar{q} des Punktepaares q' und q'' einführt und die Dichtematrix $\varrho(q', q'')$ darstellt durch das Fourierintegral

$$\varrho(q', q'') = \int d\mathbf{p} \varrho(q, p) e^{i(p \cdot \bar{q})} = \varrho(q, \bar{q}) \quad (35)$$

$$(p \cdot q) \equiv \sum_k p_k q^k = |p| |q| \cos(p, q)$$

so wird

$$E_{\text{Pot}} = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{p} \varrho(q, p) U_A(q, p) \quad (36)$$

mit

$$U_A(q, p) = \int d\bar{q} e^{-i(p \cdot \bar{q})} \varrho(q, \bar{q}) V(\bar{q}) \quad (37)$$

Die Dichtematrix hat ein ausgeprägtes Maximum für $\bar{q} = 0$ und fällt bei $\bar{q} \approx 1/P$ rasch ab. Im Integrationsbereich des $\int d\bar{q}$ ist dann $(p\bar{q}) \lesssim 1$. Damit ist die behauptete schwache p -Abhängigkeit von U_A evident. Was die q -Abhängigkeit anlangt, ist $U_A(q, 0)$ im ω -

¹⁸⁾ DIRAC, Proc. Camr. Phil. Soc. **26**, S. 376 (1930).

Raum aus Symmetriegründen konstant, und die x -Abhängigkeit ist konsequenterweise wie in U zu ignorieren, im Sinne der Vernachlässigung von Oberflächeneffekten. Damit wird $U_A(q, p) \approx \text{const}$ (sofern x im Kerninnern).

Für die Dichte erhalten wir dann

$$\varrho(q, p) = \begin{cases} \frac{\beta}{(2\pi)^n} & \text{für } |p| \leq P \text{ und } x \text{ im Kerninnern} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (38)$$

$$\varrho(q) = \begin{cases} \frac{\beta}{(2\pi)^n} \int_{|p| < P} dp = \frac{\beta}{(2\pi)^n} \frac{K_n P^n}{\sqrt{\det g^{ik}}} = \frac{\beta}{(2\pi)^n} \frac{K_n P^n}{(2M\varepsilon)^{\frac{n-3}{2}}} \\ \quad = \frac{N}{v\Omega} \text{ im Kerninnern} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad (39)$$

(v = Kernvolumen, $\Omega = \int d\omega$)

wobei K_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist.

$$K_n = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} & \text{für gerade } n \\ \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Damit ist P als Funktion von v/N gegeben.

Mit dieser Dichte berechnet sich die Kernenergie wie folgt:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{Pot}}$$

(E_{kin} = kinetische Energie + Isobarenenergie.)

$$E_{\text{kin}} = \frac{\beta}{(2\pi)^n} \int_{|p| < P} dp \frac{1}{2M} |p|^2 = N \frac{n}{n+2} \frac{P^2}{2M} \quad (40)$$

Bei der Berechnung der potentiellen Energie nach (35), (36) und (37) ersetzen wir wieder $U_A(q, p)$ durch $U_A(q, 0)$ und beachten, dass wegen der Bedingung für unsere Thomas-Fermi-Näherung, $P^2 \gg 2M\varepsilon$, $\varrho(q, q)$ als Funktion von \bar{q} ein so schmales Maximum hat, dass in $U_A V(\bar{x}, \bar{\omega}) \approx V(\bar{x}, 0)$ gesetzt werden kann:

$$E_{\text{Pot}} = -\frac{N}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^n} \int d\bar{q} \sum_k s_k^2 \frac{e^{-\mu|\bar{x}|}}{4\pi|\bar{x}|} \int_{|p| < P} dp e^{i(p \cdot \bar{q})} \approx$$

$$-\frac{N}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^3} \sum_k s_k^2 \int d\bar{x} \int_{|p_x| < P} dp_x e^{i(p_x \cdot \bar{x})} \frac{e^{-\mu|\bar{x}|}}{4\pi|\bar{x}|} \quad (41)$$

¹⁹⁾ Im Fall (d) (Mischung pseudoskalarer und vektorieller Mesonen) gilt dies nur, wenn $\mu_V = \mu_{PS} = \mu$ ist. Andernfalls hat man $J(|\bar{x}|)$ aus (19d) einzusetzen. Wir berücksichtigen den Fall $\mu_V \neq \mu_{PS}$ der Einfachheit halber nicht mehr.

Dabei wurde näherungsweise über p_x und p_ω unabhängig integriert. Führt man hierin zuerst die Integration über \bar{x} und dann über p_x aus, so wird

$$E_{\text{Pot}} = - \frac{N}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_k s_k^2 P \left(1 - \frac{\mu}{P} \operatorname{arctg} \frac{P}{\mu} \right)^{20} \quad (42)$$

$$P \gg \mu: \frac{E_{\text{Pot}}}{N} = - \frac{1}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_k s_k^2 P \quad (43)$$

$$P \ll \mu: \frac{E_{\text{Pot}}}{N} = - \frac{1}{2} \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_k s_k^2 \frac{P^3}{3\mu^2}$$

B) Grenzfall grosser Kernradien $\frac{P^2}{2M\varepsilon} \ll 1$.

Aus (24) berechnen wir die potentielle Energie mit

$$\varrho(x', x'') = \begin{cases} \frac{4}{(2\pi)^3} \int_{|p_x| < P} dp_x e^{i(p_x \cdot x' - x'')} & \text{für } \frac{x' + x''}{2} \text{ im Kerninnern} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (44)$$

analog wie oben zu

$$E_{\text{Pot}} = - \frac{N}{2} \frac{4}{(2\pi)^2} \frac{1}{16} \sum_k \sum_{\kappa' \lambda'} \sum_{\kappa'' \lambda''} (\kappa' \lambda' | s_k | \lambda'' \kappa'') (\kappa'' \lambda'' | s_k | \lambda' \kappa') \\ P \left(1 - \frac{\mu}{P} \operatorname{arctg} \frac{P}{\mu} \right) \quad (45)$$

$$E_{\text{kin}} = N \cdot \frac{3}{5} \frac{P^2}{2M} \quad (46)$$

Die Beziehung zwischen P und v/N ergibt sich durch

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{4}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} P^3 = \frac{N}{v} & \text{im Kerninnern} \\ 0 & \text{ausserhalb} \end{cases} \quad (47)$$

Zusammenfassend ergibt sich in den symmetrischen Theorien (b), (c1), (d) ($\mu_{PS} = \mu_V$):

$$A) \frac{P^2}{2M\varepsilon} \gg 1$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4} \frac{P^2}{2M} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 P \left(1 - \frac{\mu}{P} \operatorname{arctg} \frac{P}{\mu} \right) \quad (48A)$$

nach (38), (42) und (22)

²⁰⁾ Für diese P -Abhängigkeit der potentiellen Energie, insbesondere für den linearen Anstieg bei grossen P , ist es wesentlich, dass bei uns $J(|\bar{x}|)$ das Yukawa-Potential ist. Schneidet man das Yukawa-Potential bei kleinen Abständen ab, so wird E_{Pot} konstant für P -Werte, die gross gegen die reziproke Abschneidelänge sind.

$$\left(\frac{v}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = (48\pi)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{P^2}{2M\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{P} \quad \text{nach (39)} \quad (49A)$$

$$B) \frac{P^2}{2M\varepsilon} \ll 1$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \frac{P^2}{2M} - \frac{1}{6} \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 P \left(1 - \frac{\mu}{P} \operatorname{arctg} \frac{P}{\mu}\right) \quad (48B)$$

nach (46), (45) und (26)

$$\left(\frac{v}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{P} \quad \text{nach (47)} \quad (49B)$$

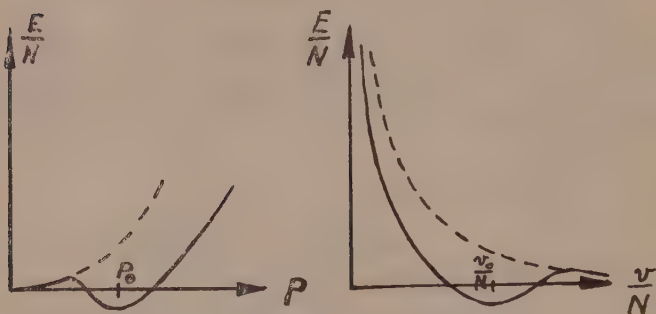


Fig. 1.

In der neutralen Pseudoskalartheorie hat man etwas andere Zahlkoeffizienten. Die folgende Diskussion kann jedoch in der gleichen Weise durchgeführt werden und liefert qualitativ die gleichen Ergebnisse. E/N hat als Funktion von P in beiden Grenzfällen den gleichen allgemeinen Verlauf, und die Zahlkoeffizienten haben die gleiche Grössenordnung. Es erscheint daher vernünftig für $P^2/2M\varepsilon \approx 1$ zu interpolieren. Der qualitative Verlauf von E/N ist in Fig. 1 dargestellt. Die punktierte Kurve gilt für kleine g , die ausgezogene für grosse g . Stabile Kerne sind nur möglich, wenn E/N ein Minimum hat. Das liefert eine einschränkende Bedingung für die Wahl von g . Da nach (48A) und (43) das Minimum der Energie nur bei $P \gtrsim \mu$ liegen kann, ist für $P_0 \gg \sqrt{2M\varepsilon}$

$$\left(\frac{v_0}{N}\right)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{\mu},$$

im Widerspruch zur Erfahrung. Werte von g und ε , die $P_0 \gg \sqrt{2M\varepsilon}$ liefern, sind daher auszuschliessen. Aus (48) ergibt sich

$$P_0^{(A)} = \frac{1}{3} M \left\{ \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4 - 9 \left(\frac{\mu}{M}\right)^2} \right\} \quad (50A)$$

$$P_0^{(B)} = \frac{5}{36} M \left\{ \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 - \left(5 \frac{\mu}{M} \right)^2} \right\} \quad (50B)$$

Stabilität haben wir danach nur, wenn

$$\left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \gtrsim 5 \frac{\mu}{M} \quad (51)$$

Damit die Näherungsformeln für starke Kopplung überhaupt anwendbar sind, muss $g \gg a\mu$ angenommen werden, d. h. nach (12b)

$$\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{g}{2\pi} \ll 1 \quad (52)$$

Ferner sollte der Protonradius klein gegen die Reichweite der Kernkräfte sein ($a\mu \ll 1$) d. h. nach (12b)

$$\frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \ll 1 \quad (53)$$

Die Bedingung (52) ist immer erfüllt, wenn (51) und (53) erfüllt sind, und braucht daher nicht weiter berücksichtigt zu werden. Sei $(g/2\pi)^2 > 1$. Dann folgt aus (53) $\varepsilon \ll \mu$.

$$\frac{P_0^{(A)}}{\sqrt{2M\varepsilon}} \cong \sqrt{\frac{2M}{9\varepsilon}} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \gg 1$$

Erfahrungsgemäss ist $\mu \approx \frac{1}{10} M$. $\left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 > 1$ ist also auszuschliessen. Sei $\left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \approx 5 \frac{\mu}{M}$. Dann folgt aus (53) $\varepsilon \ll \mu$.

$$\frac{P_0^{(A)}}{\sqrt{2M\varepsilon}} \cong \frac{1}{4} \sqrt{\frac{M}{\varepsilon}} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \approx \frac{\mu}{\sqrt{M\varepsilon}} \gtrsim 1$$

$$\left(\frac{v_0^{(A)}}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \cong 64 \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^{-4} \frac{\mu}{M} \cdot \frac{1}{\mu} \lesssim \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{P_0^{(B)}}{\sqrt{2M\varepsilon}} \cong \frac{1}{10} \sqrt{\frac{M}{\varepsilon}} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \gtrsim 1$$

$$\left(\frac{v_0^{(B)}}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \cong 2 \left(\frac{g}{2\pi} \right)^{-2} \frac{\mu}{M} \cdot \frac{1}{\mu} \approx \frac{1}{\mu}$$

Für $10^{-3} M \lesssim \varepsilon \lesssim 10^{-2} M$, d. h. $1 \text{ MeV} \lesssim \varepsilon \lesssim 10 \text{ MeV}$ sind alle Bedingungen erfüllt, und man erhält Kernradien der richtigen Grössenordnung. Es ist dann $\frac{P^{\text{II}}}{2M\varepsilon} \approx 1$, so dass einige höhere Isobaren im Kern vorhanden sind. Die Bindungsenergie pro Par-

tikel ergibt sich $< 10^{-2} M$. Das ist befriedigend, da die statistische Näherung immer zu kleine Werte für die Bindungsenergie gibt. $\varepsilon > 10 \text{ MeV}$ ist nach (52) und (53) nur möglich, wenn g entsprechend kleiner ist, was durch (51) verboten wird. (51) ist jedoch nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für Stabilität, da die statistische Näherung immer zu hohe Energiewerte liefert. Man wird also $\varepsilon > 10 \text{ MeV}$, $\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 < 5 \frac{\mu}{M}$ nicht ohne weiteres ausschliessen dürfen. Jedenfalls ist gezeigt, dass die Annahme einer starken Kopplung in den betrachteten Mesontheorien mit der Stabilität und den tröpfchenartigen Eigenschaften der Kerne verträglich ist.

§ 6. Berücksichtigung der Coulombenergie.

A) Grenzfall kleiner Kernradien $\frac{P^2}{2 M \varepsilon} \gg 1$.

In den symmetrischen Theorien (b), (cI) und (d) ist die Kernladungszahl für $\frac{P^2}{2 M \varepsilon} \gg 1$

$$Z = \int dq \int dp \varrho(q, p) (p_{\Psi} + \frac{1}{2}) \quad (p_{\Psi} \equiv p_6) \quad (54)$$

da $p_{\Psi} + \frac{1}{2}$ die Ladung eines Nucleons ist. Setzt man hierin die unter Vernachlässigung der Coulombenergie berechnete Dichte ein, so liefert p_{Ψ} aus Symmetriegründen keinen Beitrag und es wird $Z = N/2$. Die Abweichung von $N/2$ erhält man durch Berücksichtigung der Coulombenergie in (28)

$$\varrho(q, p) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^6} & \text{im Innern der Fläche } H(q, p) = \text{const} \\ \text{und } |x| < R & (R = \text{Kernradius}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (55)$$

wobei in $H(q, p)$ die Coulombenergie mitzubersichtigen ist. Wir setzen das Coulombpotential einer homogen geladenen Kugel ein und vernachlässigen die Coulombaustauschenergie.

$$H(q, p) = \frac{1}{2M} |p|^2 + U_A(q, 0) + \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right) (p_{\Psi} + \frac{1}{2}) = \text{const} \quad (56)$$

Hierin vernachlässigen wir noch den Term $\frac{1}{3} (|x|/R)^2$. Die Fläche $H(q, p) = \text{const}$ ist demnach eine Kugel im p -Raum mit der Gleichung

$$\frac{1}{2M} \sum_{ik} g^{ik} p_i p_k + \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{R} p_6 = \text{const} \quad (57)$$

Wir setzen $p_i = p_i' + d_i$ und bestimmen die d_i so, dass die Gleichung der Kugelfläche (57) $|p'| = \text{const}$ lautet.

$$\frac{1}{M} \sum_k g^{ik} d_k + \delta_{i6} \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{R} = 0$$

$$\frac{1}{M} d_6 + g_{66} \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{R} = 0$$

$$d_6 = \frac{1}{2 \varepsilon} \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{R}$$

Mit

$$\varrho(q, p') = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^6} & \text{für } |p'| < P, |x| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^6} \int dq \int dp' \varrho(q, p') (p_6' + \frac{1}{2} + d_6) = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{R} \right)$$

und daraus

$$\frac{N - 2Z}{Z} = \frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0 \varepsilon} N^{\frac{2}{3}} \quad (R \equiv r_0 N^{\frac{1}{3}}) \quad (58)$$

Bei passender Wahl von ε gibt diese Formel Z als Funktion von N in Übereinstimmung mit der Erfahrung²¹⁾. Setzt man nach § 5 $\varepsilon \approx 10$ MeV, so erhält man für $N = 200$ (Hg) eine zu kleine Kernladung $Z \approx 30$. Der wirkliche Wert $Z = 80$ würde $\varepsilon \approx 100$ MeV erfordern. Werte von ε und g , für die $P_0^2 \gg 2 M \varepsilon$ wird, wurden in § 5 bereits ausgeschlossen, da sie zu kleine Kernradien liefern. Wie man sieht würden sie zudem eine viel zu kleine Kernladung ergeben. Im Fall $P_0^2 \approx 2 M \varepsilon$, der nach § 5 der Wirklichkeit ungefähr entsprechen sollte, wird man kaum erwarten dürfen, dass die Formel (58) noch brauchbar ist, zumal die Betrachtung des anderen Grenzfalles B eine Formel mit wesentlich anderen Zahlkoeffizienten liefern wird, sodass eine Interpolation für das Zwischengebiet nicht ohne weiteres möglich erscheint.

Für die Energie erhalten wir bei Vernachlässigung der Coulomb austauschenergie

$$\frac{E}{N} = \frac{E^0}{N} + \frac{1}{2M} \sum_{ik} g^{ik} d_i d_k + \frac{3}{4} \frac{Z e^2}{R} (d_6 + \frac{1}{2}) = \frac{E^0}{N} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{Z e^2}{R} \quad (59)$$

E^0 ist die früher mit E bezeichnete Energie. Der Zahlfaktor $\frac{3}{4}$ statt

²¹⁾ Vgl. z. B. BETHE und BACHER, Rev. of mod. Phys. (1936), S. 97.

$\frac{3}{5}$ rührt von der Vernachlässigung von $\frac{1}{3} \left(\frac{|x|}{R} \right)^2$ her. Korrigiert man dies, so wird mit (58)

$$\frac{E}{N} = \frac{E^0}{N} + \frac{1}{5} \varepsilon \left(\frac{N-2Z}{N} \right)^2 + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{RN} \quad (60)$$

B) Grenzfall grosser Kernradien $\frac{P^2}{2Me} \ll 1$.

In diesem Fall erhält man in bekannter Weise²²⁾:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{kin}}}{N} &= \frac{E_{\text{kin}}^0}{N} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2Z}{N} \right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2(N-Z)}{N} \right)^{\frac{5}{2}} \right\} \\ &\cong \frac{3}{5} \frac{P^2}{2M} \left\{ 1 + \frac{5}{9} \left(\frac{N-2Z}{N} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

wo P durch (49B) definiert ist. Die potentielle Energie als Funktion von Z/N berechnen wir analog wie im § 3, wobei die Annahme, dass in jedem Translationszustand beide Ladungszustände realisiert sind, fallen zu lassen ist. Bezeichnet $\lambda = 1$ den Protonenzustand und $\lambda = 2$ den Neutronenzustand, so wird nach § 3 in den symmetrischen Theorien

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} &= -\frac{1}{2} \frac{g^2}{3} \int dx' \int dx'' \left\{ |\varrho_p(x', x'')|^2 \sum_{i \in} \sum_{\kappa \kappa'} (\kappa' 1 | s_{i \varrho} | 1 \kappa'') (\kappa'' 1 | s_{i \varrho} | 1 \kappa') \right. \\ &\quad + |\varrho_n(x', x'')|^2 \sum_{i \in} \sum_{\kappa \kappa'} (\kappa' 2 | s_{i \varrho} | 2 \kappa'') (\kappa'' 2 | s_{i \varrho} | 2 \kappa') \\ &\quad \left. + 2 \varrho_p(x', x'') \varrho_n(x'', x') \sum_{i \in} \sum_{\kappa \kappa'} (\kappa' 1 | s_{i \varrho} | 2 \kappa'') (\kappa'' 2 | s_{i \varrho} | 1 \kappa') \right\} J(|x' - x''|) \end{aligned} \quad (62)$$

Die Indizes p und n unterscheiden die zu den Protonen und Neutronen gehörigen Grössen. Nach (25) ist dann

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} &= -\frac{1}{36} g^2 \int dx' \int dx'' \left\{ |\varrho_p(x', x'')|^2 + |\varrho_n(x', x'')|^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \varrho_p(x', x'') \varrho_n(x'', x') \right\} J(|x' - x''|) \end{aligned} \quad (63)$$

Berechnet man dies analog wie in § 5, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} &= -\frac{1}{18} \left(\frac{g}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{2N-Z}{N} P_p \left(1 - \frac{\mu}{P_p} \arctg \frac{P_p}{\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{N+Z}{N} P_n \left(1 - \frac{\mu}{P_n} \arctg \frac{P_n}{\mu} \right) \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

²²⁾ Vgl. BETHE und BACHER, l. c., S. 155ff. Bei BETHE und BACHER wird an Stelle des Yukawa-Potentials die Potentialfunktion $e^{-\mu^2 r^2}$ zugrunde gelegt; sonst ist die Rechnung im Prinzip die gleiche.

wobei $P_p = P \left(1 - \frac{N-2Z}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $P_n = P \left(1 + \frac{N-2Z}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ ist. Setzt man darin $\left(\frac{v_0}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{1}{\mu}$ ein, und entwickelt nach Potenzen von $\frac{N-2Z}{N}$, so wird

$$\frac{E_{0\text{Pot}}}{N} \cong -\frac{1}{6} \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \mu \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{N-2Z}{N}\right)^2\right) \quad (65)$$

$$\frac{E_0}{N} \cong \frac{E^0}{N} + \left(\frac{\mu}{M} + \frac{1}{24} \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\right) \mu \left(\frac{N-2Z}{N}\right)^2 + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{RN} \quad (66)$$

Für die wirkliche Kernladungszahl muss dies ein Minimum werden. Man erhält somit

$$\frac{N-2Z}{N} = \frac{1}{2 \left(\frac{\mu}{M} + \frac{1}{24} \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\right) \mu} \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} N^{\frac{2}{3}} \quad (67)$$

Dies gibt Z als Funktion von N in Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn

$$\left(\frac{\mu}{M} + \frac{1}{24} \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\right) \mu \approx 10 \text{ MeV ist.}$$

Das ist für den in § 5 gefundenen Wert $\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \approx 5 \frac{\mu}{M}$ und für

kleinere g erfüllt. Dieses Ergebnis spricht dafür, dass in den wirklichen Kernen nur sehr wenige höhere Isobaren vorhanden sein können, sodass eher eine Approximation vom Fall B her tunlich erscheint.

In der neutralen Theorie berechnet man die Kernladungszahl in beiden Grenzfällen analog wie hier im Grenzfall grosser Kernradien (B); nur treten infolge des fehlenden Ladungsaustausches keine gemischten Produkte der Dichtematrizen in der potentiellen Energie auf. Das hat zur Folge, dass die potentielle Energie mit wachsendem Neutronenüberschuss abnimmt. Diese Abnahme ist jedoch für die Grössenordnung von g , die man nach § 5 fordern muss, klein gegen die entsprechende Zunahme der kinetischen Energie.

§ 7. Zusammenfassung.

In der statistischen Näherung ist die potentielle Energie eines schweren Kernes allgemein von der Form (14)

$$E_{\text{Pot}} = \frac{1}{2} \int dq' \int dq'' [\varrho(q') \varrho(q'') - \varrho(q', q'') \varrho(q'', q')] V(q', q'')$$

Die Dichten lassen sich einfach berechnen, wenn entweder sehr

viele oder praktisch keine höheren Isobaren angeregt sind (kleine oder grosse Kernradien), im ersten Fall mit der Thomas-Fermi-Methode, im zweiten aus den „kraftfreien“ Eigenfunktionen. Da $\int d\omega' V(q', q'') = 0$ ist, verschwindet der erste Term von E_{Pot} , wenn die Dichteverteilung im Winkelraum homogen ist. Dies ist immer der Fall, wenn sich praktisch alle Nucleonen auf dem untersten Isobarenniveau befinden, da die zu einem vollbesetzten Isobarenniveau gehörige Dichteverteilung aus Symmetriegründen homogen sein muss. Auch im anderen Grenzfall ist, wie wir im § 4 gezeigt haben, die Dichteverteilung im Winkelraum homogen, wenn sich die Nucleonen im Winkelraum abstossen ($J(r) > 0$). Die Berechnung des verbleibenden Terms zeigt, dass es vernünftig ist, zwischen beiden Grenzfällen zu interpolieren. Für hinreichend kleine Kernradien ist die so berechnete potentielle Energie klein gegen die kinetische Energie plus Isobarenenergie, so dass jedenfalls kein Kernzusammenbruch eintritt. Existenz und Radius stabiler Kerne hängen von den Werten des Kopplungsparameters und der Isobarananregungsenergie ab, die durch die Bedingungen (52) und (53) eingeschränkt sind. Für grosse g und kleine ε erhält man zu kleine Kernradien und zu grosse Bindungsenergien. Für $g \approx 1$ und $\varepsilon \approx 10$ MeV hat man Übereinstimmung mit der Erfahrung, soweit sie in der statistischen Näherung erwartet werden kann. Die stabilen Kerne fallen dann in das Gebiet zwischen den beiden Grenzfällen, wo nur wenige höhere Isobaren angeregt sind. Auch die Berechnung der Kernladung lässt darauf schliessen, dass in den wirklichen Kernen nur wenige höhere Isobaren angeregt sein dürften. Für wesentlich grössere ε -Werte und entsprechend kleinere g -Werte liefert die statistische Näherung keine stabilen Kerne mehr. Wenn überhaupt Stabilität besteht, sind Volumen und Energie des Kerns proportional zu N .

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. GREGOR WENTZEL, der diese Arbeit angeregt hat, möchte ich für das lebhafte Interesse und die vielen freundlichen Ratschläge, mit denen er ihre Ausföhrung gefördert hat, herzlichst danken.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

Paarerzeugung durch Elektronen und Positronen-Emission der β^- -Strahler

von Helmut Bradt.

(6. I. 1944.)

§ 1. Einleitung.

Die Diracsche Theorie des Elektrons gibt ein bestimmtes Bild von der Art der Entstehung und Vernichtung der positiven Elektronen und gestattet, quantitative Aussagen über die Häufigkeit solcher Prozesse zu machen. Schon vor der Entdeckung des positiven Elektrons war die Diracsche Theorie durch das Experiment in vielfacher Hinsicht glänzend bestätigt worden, auch für Erscheinungen, bei deren theoretischer Untersuchung die Zustände negativer Energie — als virtuelle Zwischenzustände in der Störungsrechnung — eine wesentliche Rolle spielen (z. B. *Klein-Nishina*-Formel des Compton-Effekts). Auch die Experimente mit Positronen bestätigten im allgemeinen die Voraussagen der Diracschen Theorie.

In der Beschreibung einiger Prozesse hingegen — der Paarerzeugung durch Elektronen, der elastischen Streuung und der Polarisierung von Elektronen im Kernfeld — schien die Diracsche Theorie jedoch quantitativ vollständig zu versagen. Wilsonkammer-Untersuchungen der Positronen-Emission natürlicher β -Strahler, wie sie seit 1934 im Anschluss an Beobachtungen von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI und von SKOBELZYN und STEPANOWA von verschiedenen Autoren ausgeführt worden sind, haben Ergebnisse gezeigt, welche deutlich zu zeigen schienen, dass die Häufigkeit der *Paarerzeugung durch Elektronen im Coulombfeld der Atomkerne* in Wirklichkeit einige zehntausendmal grösser ist als die theoretisch berechnete, ja, dass nicht einmal die Z-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für diesen Prozess von der Theorie richtig wiedergegeben wird.

Die Experimente, welche die quantitativen Voraussagen der Diracschen Theorie über Elektronen-Polarisation und elastische Streuung schneller Elektronen vollständig zu widerlegen schienen, sind inzwischen selbst widerlegt worden. Zumindest der Grössenordnung nach besteht sowohl bezüglich der Elektronen-Polari-

sation (siehe z. B. SHULL¹)), als auch bezüglich der elastischen Streuung (siehe z. B. BLEULER²)) Übereinstimmung zwischen Diracscher Theorie und Beobachtung. Die Frage der „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen ist bisher jedoch noch ungeklärt geblieben; die diesbezüglichen verschiedenartigen Untersuchungen führten zu einander vollständig widersprechenden Resultaten.

Die vorliegende Arbeit dient der Abklärung dieser Frage.

§ 2. Paarerzeugung und Annihilation des Positrons nach der Diracschen Theorie.

Der am häufigsten beobachtete Paarerzeugungs-Prozess ist die „Materialisation des Lichts“, die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren beim Auftreffen von γ -Strahlung auf Materie. Handelt es sich um γ -Strahlung radioaktiven Ursprungs, so ist es möglich, dass das Quant sich schon im Felde des durch die Emission umgewandelten Kerns materialisiert („Parkonversion“ der γ -Strahlen). Der Wirkungsquerschnitt für die äussere *Paarerzeugung durch γ -Strahlen* ist proportional dem Quadrat der Ladungszahl des Kerns, in dessen Feld die Materialisation stattfindet. Für die beim Zerfall der natürlichen radioaktiven Körper auftretenden harten γ -Linien ist der Wirkungsquerschnitt für Blei von der Grössenordnung 10^{-24} cm² (HEITLER³, S. 196). Der Paar-Konversionskoeffizient (Wahrscheinlichkeit der „inneren“ Paarerzeugung) der harten γ -Linien der natürlichen radioaktiven Körper ist von der Grössenordnung 10^{-4} Paare/Zerfall (JAEGER und HULME⁴)).

Die Diracsche Theorie beschreibt auch die Erzeugung von Paaren beim Durchgang eines geladenen Teilchens durch Materie. Die *Paarerzeugung durch Elektronen* im Coulombfeld eines Kerns der Ladungszahl Z wird gedeutet als Übergang eines Elektrons, auf welches das stossende Elektron Energie übertragen hat, aus einem Zustand negativer Energie in einen solchen positiver Energie. Das einfallende Elektron erleidet dabei einen Energieverlust $> 2 mc^2$, seine ursprüngliche kinetische Energie muss also diesen Betrag übertreffen. Diese „Materialisation von kinetischer Energie eines schnellen Elektrons“ ist von ANDERSON und NEDDERMEYER⁵) u. a. beobachtet worden. Auch bei der Paarerzeugung durch Elektronen ist neben der „äusseren“ Paarerzeugung (Paarerzeugung beim Durchgang durch Materie) eine „innere“ Paarerzeugung in Betracht zu ziehen: ein Teil der kinetischen Energie eines Elektrons radioaktiven Ursprungs kann sich schon im Coulombfeld des durch den β -Zerfall umgewandelten Kerns materialisieren.

Der Wirkungsquerschnitt für die äussere Paarerzeugung durch Elektronen ist, wie der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch γ -Strahlen, Z^2 -proportional; er ist für Energien

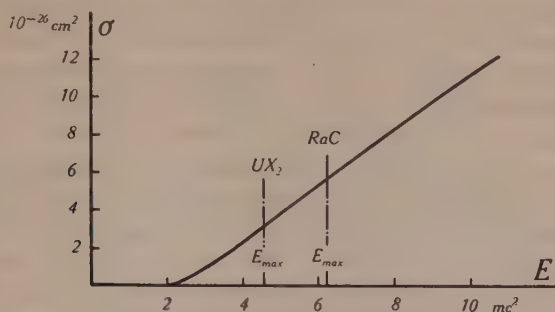


Fig. 1.

Paarerzeugung durch Elektronen in Blei.

von einigen mc^2 etwa 100-mal kleiner als derjenige für die Paarerzeugung durch γ -Strahlen gleicher Energie, also von der Grössenordnung 10^{-26} cm^2 . Fig. 1 zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Elektronenenergie nach БНАВНА⁶).

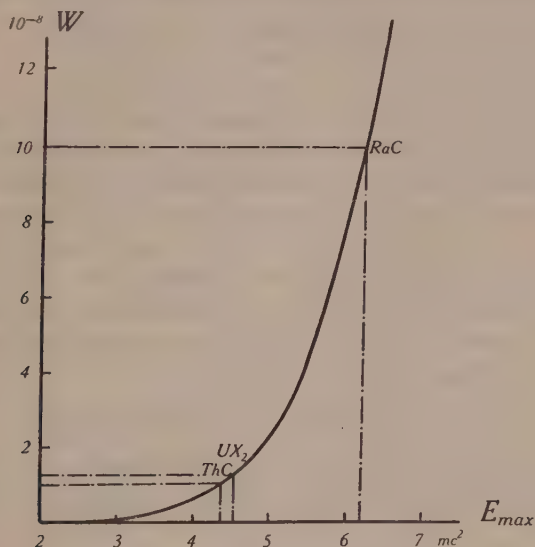


Fig. 2.

β -Paarkonversionskoeffizient.

Die Wahrscheinlichkeit der inneren Paarerzeugung durch Elektronen ist von TISZA⁷) und von ARLEY und MÖLLER⁸) berechnet worden. Fig. 2 zeigt die von ARLEY und MÖLLER berechnete

mittlere Wahrscheinlichkeit W der Paarkonversion von kinetischer Energie eines Zerfallselektrons in Funktion der oberen Grenze des β -Spektrums. (Der Rechnung ist die Fermische Theorie des β -Zerfalls zugrunde gelegt.) Diese Wahrscheinlichkeit ist ganz ausserordentlich gering: bei den natürlichen β -Strahlern führt höchstens jeder $(10^7\text{--}10^8)$ -te β -Zerfall zu einer solchen Paarkonversion. In Fig. 3 ist das von ARLEY und MÖLLER für RaC berechnete Spektrum der so erzeugten Positronen eingezeichnet.

Es ist noch die Möglichkeit zu erwähnen, dass Elektronenpaare direkt von angeregten Atomkernen emittiert werden; eine solche *direkte Paaremission* durch den, in einem bestimmten angeregten Niveau befindlichen O^{16} -Kern ist von STREIB, FOWLER und LAURITSEN⁹⁾ bei der Protonenbombardierung von Fluor beobachtet worden. Es ist anzunehmen, dass diese Elektronenpaar-Emission mit einem Übergang zwischen zwei Zuständen (dem tiefsten angeregten Zustand und dem Grundzustand des O^{16}) mit verschwindendem Drehimpuls und gleicher Parität verbunden ist. Da bei einem derartigen Übergang die Emission von γ -Strahlung — soweit nur ein Quant auf einmal ausgesandt wird — absolut verboten ist, so konkurriert dieser Prozess nur noch mit der Aussendung eines Hüllenelektrons und mit der äusserst unwahrscheinlichen gleichzeitigen Emission zweier γ -Quanten.

Die Wahrscheinlichkeit der Paar-Emission bei $0 \leftrightarrow 0$ Übergängen ist auf Grund der Diracschen Theorie von OPPENHEIMER und SCHWINGER¹⁰⁾ und von THOMAS¹¹⁾ berechnet worden. So berechnet THOMAS für den $0 \leftrightarrow 0$ Übergang beim RaC', der zur Aussendung der „100-proz. konvertierenden“ 1,414 MeV Linie Anlass gibt, das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit für die Aussendung eines Hüllenelektrons der K-Schale zur Wahrscheinlichkeit einer direkten Paaremission zu 170:1. Mit der von ELLIS¹²⁾ gemessenen Intensität der Linie ergibt sich daraus, dass der 1,414 MeV-Übergang zur Emission von

$$n_{0,0}^{(+)} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Paaren/Zerfall Ra}$$

Anlass gibt. Zum Vergleich sei angeführt, dass nach JAEGER und HULME die Paarkonversion der γ -Linien des Ra(B + C) zur Emission von

$$n_{\gamma}^{(+)} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Paaren/Zerfall Ra}$$

führt.

Als inversen Vorgang der Paarерzeugung beschreibt die Diracsche Theorie den Prozess der Paarvernichtung — der *Annihilation* eines positiven Elektrons zusammen mit einem negativen

Elektron — als Übergang eines Elektrons aus einem Zustand positiver Energie in einen unbesetzten Zustand negativer Energie. Die Energie, die beim Herabfallen des Elektrons in das „Loch“ frei wird, wird als Strahlung ausgesandt. In dichter Materie hat ein Positron nur eine kurze Lebensdauer (10^{-10} sec in Blei). Hat es seine ursprüngliche kinetische Energie durch Stösse und Ausstrahlung verloren, so vereinigt es sich mit einem negativen Elektron, wobei — auf Grund der Erhaltungssätze — zwei in diametral entgegengesetzter Richtung fortfliegende γ -Quanten der Energie mc^2 entstehen. Die Wahrscheinlichkeit nämlich, dass ein Positron zerstrahlt, während es noch in Bewegung ist, ist (ausgenommen für extrem hohe Energien) in dichter Materie klein: das Positron „hat keine Zeit“ während der Bewegung zu zerstrahlen, da es zu rasch gebremst wird. Für die späteren Schlussfolgerungen ist es wichtig, festzustellen, dass die experimentellen Untersuchungen die Theorie der Zwei-Quanten-Annihilation*) vollauf bestätigt haben (BERINGER und MONTGOMERY¹³); siehe auch § 7).

§ 3. Die „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen als Erklärung für die Ergebnisse von Wilsonkammer-Untersuchungen.

Nach dem Vorhergehenden ist es verständlich, dass β^- -Strahler in sehr geringem Ausmasse auch Positronen aussenden, wie dies beim aktiven Th- und Ra-Niederschlag von THIBAUD¹⁴) mit Hilfe der Trochoidenmethode, von ALICHANOW und KOSODAEV¹⁵) im β -Spektrographen und von anderen beobachtet worden ist.

Die *Positronenemission der β -Strahler* wurde auch mit der *Wilsonkammer* untersucht; von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁶) diejenige des Th(B + C + C''), von SKOBELTZYN und STEPANOWA¹⁷) und, anschliessend an deren eingehende Untersuchungen, von DA SILVA¹⁸) und von SIZOO und BARENDREGT¹⁹) diejenige des Ra(B + C). Diese Wilsonkammer-Untersuchungen haben — im Gegensatz zu den magnetische Fokussierung verwendenden Untersuchungen (siehe § 6) — zu ganz eigentümlichen Resultaten geführt.

*) Es sind nach der Theorie auch andere Arten der Annihilation als die Zwei-Quanten-Annihilation möglich, z. B. die Vereinigung eines Positrons mit einem in der K-Schale gebundenen Elektron unter Aussendung eines einzigen γ -Quants. Die Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse ist aber nach der Theorie viel kleiner als diejenige der Annihilation durch Emission zweier Quanten; tatsächlich ist bisher mit Sicherheit auch nur die letztere beobachtet worden.

Bei allen diesen *Wilsonkammer-Untersuchungen* war die Anordnung im Wesentlichen die gleiche. Die Beobachtung von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI z. B. ist die folgende: Ein dünner Al-Draht mit aktivem Th-Niederschlag, eingeschmolzen in eine dünnwandige Glaskapillare, wird in der Mitte der Wilsonkammer angebracht. Auf den Aufnahmen werden auf 2000 „negative“ (Elektronen-) Spuren 24 „positive“ (Positronen-) Spuren beobachtet. Da die Ersetzung des Al-Drahts durch einen Pt-Draht die relative Anzahl der beobachteten „positiven“ Spuren nicht erhöht, werden die Positronen, deren Bahnen diese Spuren sind, sicher nicht durch die γ -Strahlung im Draht erzeugt. Sie werden von den Autoren als ausgehend von den radioaktiven Atomen selbst, durch „innere“ Paarkonversion der γ - oder β -Strahlung erzeugt, betrachtet. Die späteren Wilsonkammer-Untersuchungen haben Emissionsraten der gleichen Grössenordnung 10^{-2} (eine positive Spur auf 100 negative Spuren) auch für andere β -Strahler ergeben, insbesondere für solche, die keine, oder wie UX_2 nur sehr schwache, Kern- γ -Strahlung aussenden: positive Spuren, ausgehend von einer UX-Quelle, wurden in der Wilsonkammer von BARENDREGT und SIZOO²⁰⁾, solche Spuren, ausgehend von einer P^{32} -Quelle, von SIZOO, BARENDREGT und GRIFFIOEN²¹⁾, solche, ausgehend von einer RaE-Quelle, von HEINE²²⁾ beobachtet.

Bei diesen radioaktiven Kernen kann zur Erklärung einer Positronen-Emission die Paarkonversion der γ -Strahlen überhaupt nicht herangezogen werden; von den Konversionsprozessen bleibt nur die innere Paarerzeugung durch Elektronen als mögliche Erklärung übrig. Eine solche bedeutete allerdings, dass die tatsächliche Häufigkeit der β -Paar-Konversionsprozesse (10^5 — 10^6)-mal grösser wäre als die theoretisch berechnete (und dass überdies — wie Fig. 3 zeigt — auch die Energieverteilung der Positronen von der berechneten vollständig verschieden wäre). Dennoch wurde diese Erklärung von SKOBELZYN-STEPANOWA, DA SILVA und SIZOO-BARENDREGT angenommen: Die vom UX und P^{32} , sowie der überwiegende Teil der vom Ra(B + C) und vom Th(B + C + C'') ausgehenden positiven Spuren wurden als Bahnen von durch β -Paarkonversion entstandenen Positronen betrachtet.

Eine andere Annahme schien auch kaum sinnvoll zu sein, da in der Wilsonkammer positive Spuren auch dann noch beobachtet wurden, wenn die β -Quelle von einem Absorber umgeben war, welcher — nach Ausweis des gemessenen (H ϱ)-Spektrums dieser Spuren — alle direkt von der Quelle emittierten Positronen absor-

bieren sollte. Aus dieser Beobachtung wurde von den genannten Autoren gefolgert, dass die hinter solchen Absorbern beobachteten positiven Spuren von Positronen herrühren müssen, die im Absorber selbst erzeugt worden sind. Ein derartiger Sekundärprozess konnte nur die *Paarerzeugung durch Elektronen* sein, für welche sich dann — in krassem Widerspruch zur Theorie — ein Wirkungsquerschnitt der enormen Grössenordnung $Z/82 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^2$ ergab.

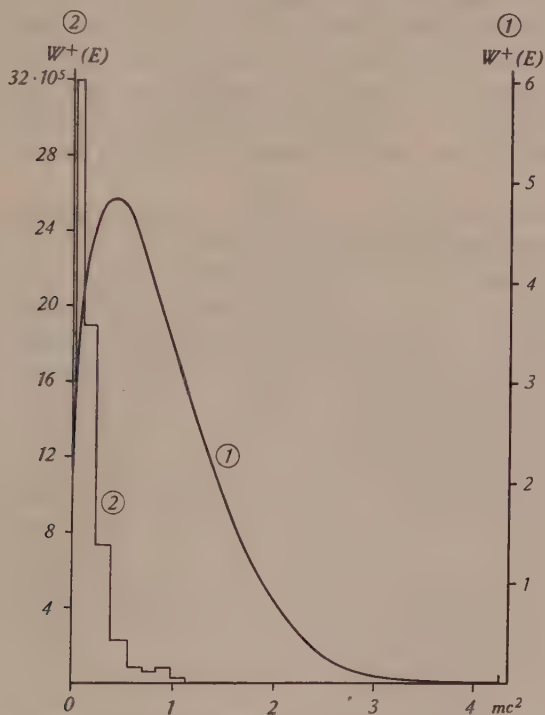


Fig. 3.

Positronenspektrum des RaC

1. Theor. Spektrum nach ARLEY und MÖLLER.
2. Spektrum der pos. Wilsonkammerspuren nach SIZOO-BAENDREGT.

Infolge Paarerzeugung durch β -Strahlen sollte nach SKOBELZYN STEPANOWA etwa ein Viertel aller Zerfallsprozesse einer mit Blei bedeckten RaC-Quelle zur Entstehung eines Positrons führen! Die durch die Wilsonkammer-Beobachtungen für unzweideutig bewiesen erachtete „Anomalie“ der äusseren Paarerzeugung durch Elektronen liess natürlich auch eine „Anomalie“ der inneren Paarerzeugung durch Elektronen erwarten, und es war kein Grund vorhanden, zur Erklärung der von unbedeckten Quellen ausge-

henden positiven (Positronen-) Spuren einen unbekannten Prozess zu postulieren.

Gegen diese an sich schon unwahrscheinlichen Schlussfolgerungen sprachen auf das Entschiedenste die Ergebnisse anderer Untersuchungen, so dass die experimentellen Resultate von SKOBELZYN-STEPANOWA, DA SILVA und SIZOO-BARENDREGT angezweifelt worden sind. Es konnte nämlich, unter einwandfreien und durchsichtigeren Bedingungen, nie verifiziert werden, dass schnelle Elektronen beim Auftreffen auf Materie Paare in auch nur annähernd dem behaupteten, einem Wirkungsquerschnitt der Grössenordnung 10^{-22} cm² entsprechenden, gewaltigen Ausmass erzeugen. Zwischen den tatsächlichen Beobachtungen und der Interpretation dieser Beobachtungen war daher sorgfältig zu unterscheiden.

Zur experimentellen Abklärung des Sachverhalts schien Folgendes notwendig*):

1. Die Resultate von SKOBELZYN-STEPANOWA, DA SILVA und SIZOO-BARENDREGT mit der Wilsonkammer kritisch nachzuprüfen. Dies ist von HEINE²²⁾ ausgeführt worden, dessen Ergebnisse diejenigen der genannten Autoren grössenordnungsmässig bestätigen und entschieden dafür sprechen, dass die erwähnten positiven Spuren in der Tat Bahnen von aus der Quelle emittierten positiven Teilchen sind.

2. Unabhängig von den Wilsonkammer-Untersuchungen mit anderen experimentellen Hilfsmitteln zu entscheiden, ob die behauptete „Anomalie“ der Paarerzeugung durch schnelle Elektronen vorhanden ist und ob die β -Strahler Positronen im Ausmasse $(10^{-3}—10^{-2})e^+$ /Zerfall aussenden. Über einen solchen Versuch wird im Folgenden berichtet.

§ 4. Messungen von $UX_2-(\gamma, \gamma)$ -Koinzidenzen: Versuch zum Nachweis der Annihilations-Strahlung.

1. Methode.

SKOBELZYN hat in einer seiner ersten Mitteilungen auf eine Folgerung der von ihm behaupteten „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen hingewiesen: eine von schnellen Elektronen bombardierte Antikathode sollte eine intensive Quelle von Annihilationsstrahlung sein. Ebenso müsste auch von einem Absorber, der ein β -aktives Präparat bedeckt, Annihilationsstrahlung aus-

*) Eine kurze Zusammenfassung aller Resultate ist in dem Bericht von BRADT, HEINE und SCHERBER²³⁾ enthalten.

gehen, deren Intensität in manchen Fällen beträchtlich grösser sein müsste als die im Absorber erregte Bremsstrahlung.

FEATHER und DUNWORTH²⁴⁾ versuchten die Annihilationsstrahlung, welche von einer mit Pb, Cu und Al bedeckten UX-Quelle ausgehen sollte, durch Messung von (γ, γ) -Zählrohrkoinzidenzen nachzuweisen. Die UX-Quelle befand sich, wie in Fig. 4A,

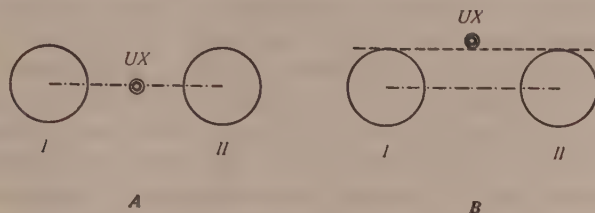


Fig. 4.

Anordnungen zum Nachweis einer Annihilationsstrahlungs-Komponente durch (γ, γ) -Koinzidenzmessungen.

in der Mitte zwischen den Zählrohren. Da die Annihilationsstrahlung aus paarweise in diametral entgegengesetzter Richtung emittierten Quanten besteht, so muss stets, wenn ein Quant das eine Zählrohr durchsetzt, das andere Zwillingsequant das zweite Zählrohr durchsetzen. Durch Registration der simultanen Entladungen beider Zählrohre kann also eine von der Quelle ausgehende Annihilationsstrahlung nachgewiesen werden, welche bei blosser Registration von Einzelstössen vom Untergrund der Kern- γ -Strahlung und der Bremsstrahlung verdeckt wäre.

Die von FEATHER und DUNWORTH beobachtete Zahl von Koinzidenzen übertraf nun in der Tat — allerdings nicht sehr erheblich — die Gesamtsumme von zufälligen Koinzidenzen, Höhenstrahlungs-Koinzidenzen und UZ- (γ, γ) -Koinzidenzen (siehe § 4, 2). Der Überschuss, die „unerklärten Koinzidenzen“, werden der Annihilationsstrahlung der im Absorber durch die UX_2 - β -Strahlen erzeugten Positronen zugeschrieben*). Unbefriedigend an diesen Messungen ist, dass die Zahl der „unerklärten“, der Annihilationsstrahlung zugeschriebenen Koinzidenzen nur einen kleinen Bruchteil der gesamten beobachteten Koinzidenzzahl ausmachte, so dass der statistische Fehler des Resultats notwendigerweise sehr gross war. Unbefriedigend ist hauptsächlich, dass ein Beweis für die

*) Aus der Rate der „unerklärten“ Koinzidenzen wurde ein mittlerer Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch UX_2 -Zerfallselektronen von der Grössenordnung $(10^{-23}—10^{-22})$ cm² berechnet. Diese Messungen schienen eine, mit einem anderen Hilfsmittel als der Wilsonkammer gewonnene, quantitative Bestätigung der „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen darzustellen.

Richtigkeit der gegebenen Interpretation der „unerklärten“ Koinzidenzen fehlt.

Da die Methode jedoch für den Nachweis einer erheblichen Positronen-Emission der β -Strahler—Folge der behaupteten „Anomalie“ der Paarerzeugung — sehr geeignet ist, wurde die Untersuchung von FEATHER und DUNWORTH mit wesentlich verbesserten experimentellen Hilfsmitteln fortgesetzt. (Über einen vorbereitenden Versuch von BRADT, GUILLISSEN und SCHERRER²⁵) ist früher berichtet worden.) Um zu prüfen, ob die „unerklärten“ Koinzidenzen tatsächlich durch die Annihilationsstrahlung ausgelöst werden, wurde die Zahl der simultanen Entladungen eines Zählrohrpaares in den beiden in Fig. 4 dargestellten geometrischen Anordnungen von UX-Quelle und Zählrohren bestimmt. In Anordnung A muss stets, wie schon bemerkt, wenn ein Quant der Annihilationsstrahlung das Zählrohr I durchsetzt, das gleichzeitig emittierte Quant das Zählrohr II durchsetzen. In Anordnung B ist dies gerade ausgeschlossen: die Annihilationsstrahlung verursacht hier keine systematischen Koinzidenzen (s. § 7). Da die Anzahl aller anderen, von der γ -Strahlung der UX-Quelle herührenden Koinzidenzen in beiden Anordnungen (wenigstens nahezu*) gleich ist, so kann die Anzahl der von der Annihilationsstrahlung ausgelösten Koinzidenzen als Differenz der in Anordnung A und Anordnung B gemessenen Koinzidenzen bestimmt werden.

Zu dieser Nachweismethode ist noch folgendes zu bemerken: Ob die Positronen, die Anlass zur Annihilationsstrahlung geben, durch Paarerzeugung im Absorber entstehen, oder ob sie von der radioaktiven Quelle direkt emittiert werden, lässt sich auf Grund einer solchen Messung nicht entscheiden. Durch sie kann nur die Frage beantwortet werden, ob und mit welcher Häufigkeit Positronen entstehen, aber nicht die Frage, durch welchen Prozess sie entstehen. Ein grosser Vorteil dieser Nachweismethode ist hingegen, dass die *Absorption* der Positronen, deren Berücksichtigung bei den Wilsonkammer-Messungen und den Messungen nach der Trochoidenmethode zu sehr grossen Korrekturen Anlass gab,

*) Zwischen den Emissionsrichtungen zweier Quanten, die von einem Kern sukzessiv emittiert werden, besteht allerdings eine Korrelation (HAMILTON²⁶). Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(\theta)$, die diese Richtungskorrelation beschreibt, ist von den Drehimpulszahlen der drei beteiligten Niveaus und der Multipolordnung der ausgesandten Strahlung abhängig. Im allgemeinen ist diese Richtungskopplung schwach; wenn sie bei den sukzessiv emittierten UZ-Quanten überhaupt merklich ist, so kann sie zur Differenz der Koinzidenzraten in den Anordnungen A und B nur einen sehr geringen Beitrag liefern.

hier in die Rechnung gar nicht eingeht. Der Absorber, welcher die Quelle umgibt, muss nur dick genug sein, um alle Positronen zu absorbieren.

2. UX-Quelle. UZ-(γ, γ)-Koinzidenzen.

Die beschriebene Methode zum Nachweis der Annihilationsstrahlung ist offenbar nur bei β -Strahlern, welche keine intensiven γ -Linien emittieren, anwendbar; aber die Untersuchung einer Positronen-Emission solcher β -Strahler ist für unser Problem gerade am aufschlussreichsten. Die Auswahl unter den natürlichen β -Strahlern ist also stark eingeschränkt. RaE emittiert zwar keine Kern- γ -Strahlung, hingegen ist seine β -Strahlung nur wenig energiereich und nur ein äusserst geringer Bruchteil der Zerfallelektronen hat Energien grösser als $2mc^2$. UX_2 ist deshalb der für unseren Zweck geeignetste natürliche β -Strahler, da er ein energiereiches β -Spektrum besitzt (etwa $\frac{1}{3}$ der Zerfallselektronen hat Energien zwischen 1,02 MeV und 2,32 MeV) und nur eine sehr schwache Kern- γ -Strahlung emittiert, deren Energie für eine Paarerzeugung überdies garnicht ausreicht. Störend ist allerdings das Vorhandensein des mit dem UX_2 isomeren UZ in den verwendeten UX-Präparaten ($UX_1 + UX_2 + UZ$). Es ist zwar im radioaktiven Gleichgewicht nur ein UZ-Atom auf 670 UX_2 -Atome anwesend (FEATHER und BRETSCHER²⁷); der UZ-Zerfall führt jedoch (nach FEATHER und DUNWORTH²⁸) zu einem angeregten U_{II} -Kern, der unter sukzessiver Emission zweier Quanten von ca. 700 keV Energie in den Grundzustand übergeht. Wenn so das UZ zu der harten γ -Strahlung des UX zwar nur wenig beiträgt, so stellen doch die UZ-(γ, γ)-Koinzidenzen die wichtigste Komponente des Koinzidenz-Untergrundes dar und begrenzen die Anwendbarkeit der Methode: die Intensität der nachzuweisenden Annihilationsstrahlung muss gross genug sein, dass die Anzahl der durch sie ausgelösten Koinzidenzen grösser ist, als die statistische Schwankung der Anzahl der UZ-Koinzidenzen.

Künstlich radioaktive β -Strahler, wie P^{32} , die für diese Messungen noch günstiger als UX_2 gewesen wären, liessen sich mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht in ausreichender Stärke herstellen.

Das UX wurde zusammen mit einigen mg Cer als Fluorid gefällt und in eine dünnwandige Glaskapillare eingeschmolzen, welche in einen zylindrischen Absorber, dessen Wandstärke etwas grösser als die Reichweite der UX_2 -Elektronen war, gesteckt wurde. *Intensitätsbestimmungen*, welche mit den zur Messung ver-

wendeten *Zählrohren* (Messingzylinder von 1 mm Wandstärke und 2,5 cm Innendurchmesser, wirksame Drahtlänge 5,5 cm, Argon-Alkoholfüllung unter einem Gesamtdruck von ca. 120 mm Hg) ausgeführt wurden, ergaben folgendes Resultat: Eine punktförmige UX_2 -Quelle, im radioaktiven Gleichgewicht befindlich mit 1 kg $UO_2(NO_3)_2$ ($7,13 \cdot 10^6$ Zerfallsprozesse/sec), die mit einem 1,2 mm dicken Pb-Absorber bedeckt ist und sich im Abstand (3–5) cm von den Zählrohren befindet, bewirkt in diesen pro Einheit des Raumwinkels eine Einzelstosszahl von $Z = 1,69 \cdot 10^2$ Stößen/sec ($2,13 \cdot 10^3$ Stösse/sec bezogen auf den ganzen Raumwinkel 4π). Wird der Blei-Absorber durch einen 5 mm starken Aluminium-Absorber ersetzt bei gleichzeitiger Bedeckung der Zählrohre mit einem 1 mm dicken Bleimantel, so sinkt dabei die Zahl der Einzelstösse auf 61,0% herab. Da die Intensität der im Absorber durch die β -Strahlen erzeugten Bremsstrahlung Z -proportional ist, so beträgt demnach der Anteil der vom UX selbst ausgehenden γ -Strahlung an der durch die gesamte γ -Strahlung bewirkten Stosszahl fast genau 50%. Diese Daten gestatten, aus den gemessenen Einzelstosszahlen die absolute Intensität der UX_2 -Quelle zu berechnen*).

3. Raumwinkel, Zählrohrsensibilität und Koinzidenzrate.

a) Der von einer punktförmigen Quelle und einem Zählrohr aufgespannte *Raumwinkel* kann näherungsweise als von vier Ebenen begrenzt angenommen werden. Liegt die Quelle im Symmetriezentrum zwischen den Zählrohren, so gilt (s. Fig. 5)

$$\sin \frac{\Omega}{4} = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

(Eine genauere Formel wird von NORLING²⁹⁾ angegeben.) Bei den Messungen wurden stets praktisch lineare, zur Zählrohrachse parallel orientierte Quellen verwendet, deren Länge gegenüber der wirksamen Zählrohrlänge nicht immer zu vernachlässigen war. Der Raumwinkel für eine punktförmige Quelle im Abstände x von der zur Achse der Zählrohre senkrechten Symmetrieebene ist für Einzelstösse und „isotrope“ Koinzidenzen

$$\Omega(x) = \Omega_1 + \Omega_2,$$

*) Die Zahl der von UX_2 -Kern pro Zerfall ausgesandten γ -Quanten berechnet sich mit ihnen zu

$$n_{\gamma}^K \sim \frac{Z(Pb)}{2 N_{\epsilon}} \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ Quanten/Zerfall.}$$

für durch Annihilationsstrahlung ausgelöste Koinzidenzen

$$\Omega'(x) = 2 \cdot \Omega_2.$$

Für eine lineare Quelle der Länge a wird der mittlere Raumwinkel

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \Omega(x) dx$$

durch graphische Integration bestimmt.

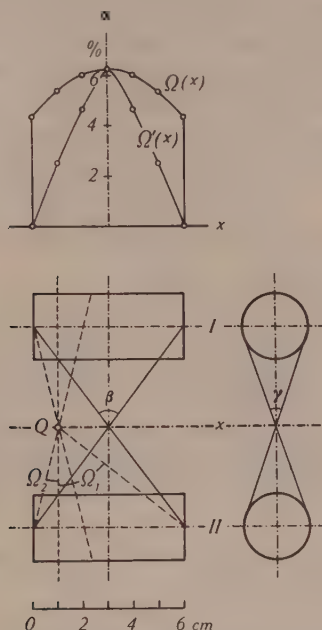


Fig. 5.

Raumwinkel, aufgespannt von Quelle und Zählrohr.

b) Die *Sensibilität der Messing-Zählrohre* wurde vorerst mit der durch verschiedene Absorber gefilterten γ -Strahlung geeichter Radium-Quellen bestimmt, wobei für die Abhängigkeit der Zählrohrsensibilität von der Quantenenergie die halbempirische Kurve von v. DROSTE³⁰⁾, die durch Messungen von DUNWORTH³¹⁾ und NORLING²⁹⁾ bestätigt worden ist, benutzt wurde. Der aus

$$Z = n \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \sum_k p_k \varepsilon_k e^{-\mu_k d}$$

(Z = Zählrohr-Stosszahl, n = Zahl der Zerfallprozesse/sec,
 p_k = abs. Intensität der Linie $h\nu_k$, d = Absorberdicke.)

erhaltene Absolutwert der Sensibilität der Messingzählrohre für 510 keV-Strahlung

$$\varepsilon_{510 \text{ keV}}^{\text{Messing}} = 3 \cdot 10^{-3}$$

ist in Übereinstimmung mit dem Wert von v. DROSTE.

Direkt wurde die Sensibilität $\varepsilon_{510 \text{ keV}}$ durch Messung von Annihilationsstrahlungs- (γ, γ) -Koinzidenzen in der Anordnung von Fig. 4A für Zählrohre mit 1 mm dicker Bleikathode bestimmt. Diese Zählrohre erwiesen sich für 510 keV-Strahlung als wesentlich empfindlicher wie die Zählrohre mit Messingkathode (s. auch NORLING²⁹). Annihilationsstrahlungs-Quelle war ein von 1,3 mm Blei umgebenes Cu^{61} -Präparat, hergestellt durch Bestrahlung von Nickel mit Protonen im ETH-Cyclotron: $\text{Ni}^{60}(p, \gamma)\text{Cu}^{61}$. Nach GENTNER und SEGRÉ³²) emittiert Cu^{61} keine Kern- γ -Strahlung; es gilt also für die Zahl der Koinzidenzen pro Zeiteinheit

$$K = 2 N \int \varepsilon^2 e^{-2\mu \bar{d}} d\alpha,$$

und für die Zahl der Einzelstöße

$$Z = 2 N \int \varepsilon e^{-\mu \bar{d}} d\alpha.$$

(N = Zahl der Cu^{61} -Zerfallsprozesse/sec, $\alpha = \frac{\Omega}{4\pi}$, \bar{d} = Absorberdicke.)

Die Koinzidenzrate, d. h. das Verhältnis der korrigierten Zahl der beobachteten Koinzidenzen zur Einzelstosszahl

$$R_{\text{Ann. Str.}} = K/Z = \frac{\int \varepsilon^2 d\alpha}{\int \varepsilon d\alpha} e^{-\mu \bar{d}} \quad (1)$$

ist unabhängig von N und im wesentlichen auch unabhängig vom Raumwinkel. Für die Form der verwendeten Cu^{61} -Quelle wurde

$$\frac{\int \varepsilon^2 d\alpha}{\int \varepsilon d\alpha} = 0,80 \cdot \varepsilon$$

berechnet.

Die γ -Strahlen hatten in der Zählrohrwand und in dem die Quelle umgebenden Absorber einen mittleren Weg von ca. 3,2 mm Blei und 1,0 mm Messing zu durchlaufen: $e^{+\mu \bar{d}} = 1,87$.

Aus dem mit Cu^{61} als Positronenquelle gemessenen Wert für die Koinzidenzrate

$$R_{\text{Ann. Str.}} = (2,90 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$$

berechnet sich demnach die Sensibilität der Bleizählrohre für Annihilationsstrahlung zu

$$\underline{\varepsilon_{510 \text{ keV}}^{\text{Pb}} = (6,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-3}}.$$

Im angegebenen Fehler ist die Unsicherheit der Korrekturfaktoren mitberücksichtigt worden.

Das Verhältnis der Sensibilitäten der fast gleich grossen Blei- und Messingzählrohre wurde aus dem Verhältnis der Einzelstosszahlen $Z^{\text{Pb}}/Z^{\text{M}} = (3,1 \pm 0,1)$ bei Bestrahlung mit der Annihilationsstrahlung der Cu^{61} -Positronen bestimmt, unter Berücksichtigung des geringen Raumwinkelunterschieds und der Absorption in den Zählrohrwänden:

$$(\varepsilon^{\text{Pb}}/\varepsilon^{\text{M}})_{510 \text{ keV}} = 3,4.$$

Damit ergibt sich

$$\underline{\varepsilon_{510 \text{ keV}}^{\text{Messing}} = 2,0 \cdot 10^{-3}}.$$

Dieser Wert darf wohl vorläufig als der zuverlässigste betrachtet werden.

c) Im Allgemeinen kann aus der Koinzidenzrate $R = K_{\text{kor}}/Z$ bei bekannter Zählrohrsensibilität die „Emissionsrate“ bestimmt werden, das ist bei den folgenden Ausführungen stets der Bruchteil k aller Zerfallsprozesse, bei dem gleichzeitig zwei γ -Quanten zusammen emittiert werden. Zum Beispiel gilt für die $\text{UZ}(\gamma, \gamma)$ -Koinzidenzen beim Fehlen einer Richtungskorrelation der sukzessiv emittierten Quanten

$$R_{\text{UZ}} = 2 \alpha \cdot \frac{k_{\text{UZ}}}{n_{\gamma}} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\bar{\varepsilon} + \frac{k_{\text{UZ}}}{n_{\gamma}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (2)$$

(n_{γ} = Zahl der pro Zerfall ausgesandten Quanten der harten Bremsstrahlung und der $\text{UX}_2\gamma$ -Strahlung; $\bar{\varepsilon}$ = mittlere Zählrohrsensibilität für diese Strahlung; k_{UZ} = Verzweigungsverhältnis $\text{UZ} : \text{UX}_2$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ = Zählrohrsensibilitäten für die beiden sukzessiv emittierten UZ -Quanten).

Führt der Bruchteil $k^{(+)}$ der UX_2 -Zerfallsprozesse — sei es direkt, sei es infolge Paarerzeugung durch die schnellen β -Strahlen — zur Emission eines Positrons, so gilt für die Rate der durch die entstehende Annihilationsstrahlung verursachten Koinzidenzen ($k^{(+)} \ll n_{\gamma}$ vorausgesetzt):

$$R^{(+)} \sim 2 \cdot \frac{k^{(+)}}{n_{\gamma}} \cdot \frac{(\varepsilon_{510 \text{ keV}})^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (3)$$

Selbstverständlich ist die Absorption der γ -Strahlung in den Absorbern, Zählrohrwänden usw. noch zu berücksichtigen.

4. Apparatur.

Die Apparatur ist früher³³⁾ beschrieben worden. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, dass der Koinzidenz-Untergrund bei den Messungen, welche in einem mehrere Meter unter der Erde befindlichen Raum ausgeführt wurden, sehr klein war. Die zufälligen Koinzidenzen spielten infolge des hohen Auflösungsvermögens der Koinzidenzmischung ($\tau \sim 1 \cdot 10^{-7}$ sec) nur eine geringe Rolle; die Höhenstrahlungs-Koinzidenzen wurden stark reduziert durch eine, über den Messzählrohren angeordnete, in Antikoinzidenz geschaltete Zählrohrbatterie.

5. Ergebnis der Messungen.

Das Resultat einer ersten Messung, ausgeführt ohne die Antikoinzidenz-Abschirmung der Höhenstrahlung, ist in Tabelle I wiedergegeben. Die Messzählrohre waren in einer, zur Vermeidung von Streustrahlung sehr leicht gebauten, Mikafilhalterung im Abstände $d = 8$ cm fixiert.

Tabelle I.

Absorption der β -Strahlen in Blei.

Messingzählrohre von 0,15 mm Wandstärke in 8 cm Distanz.

$$\alpha_A = \frac{\Omega_A}{4\pi} = 0,0625, \tau = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

Reduktion aller Ablesungen auf das Datum 21.8.1941.

	Anordnung	
	A	B
Einzelstösse/min	4480	4040
$K_{\text{beob.}}/\text{h}$	$40,4 \pm 2,0$	$51,0 \pm 2,4$
K_0/h	$7,4 \pm 0,5$	$7,4 \pm 0,5$
$K_{\text{zuf.}}/\text{h}$	$5,5 \pm 0,6$	$4,5 \pm 0,5$
$K_{\text{korrr.}}/\text{h}$	$27,5 \pm 2,2$	$39,1 \pm 2,6$
R	$(10,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-5}$	$(16,1 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$

Die Einzelstosszahl in Anordnung B ist kleiner als in Anordnung A, da der Raumwinkel α_B etwas kleiner ist als der Raumwinkel α_A . Die Differenz der Raumwinkel wurde übereinstimmend durch Rechnung (§ 4, 3) und durch Vergleich der Einzelstosszahlen in den beiden Anordnungen bestimmt:

$$\frac{\alpha_A - \alpha_B}{\alpha_A} = \begin{cases} 9,8\% & \text{für } d = 8 \text{ cm} \\ 20,8\% & \text{für } d = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

Der Koinzidenz-Untergrund beträgt ein Drittel bis ein Viertel der gesamten Koinzidenzzahl. Es ist ein deutlicher Unterschied in der Grösse der Koinzidenzraten vorhanden, aber im umgekehrten Sinne als es beim Vorhandensein von Annihilationsstrahlung zu erwarten gewesen wäre. Die Koinzidenzrate R_B ist 1,5₈-mal grösser als R_A , während sie bei vollständigem Fehlen einer Richtungskorrelation der die Koinzidenzen auslösenden Quanten um ca. 10% (relative Raumwinkeldifferenz) hätte kleiner sein müssen als R_A . Wäre in der die Koinzidenzen auslösenden Strahlung in merklichem Ausmass auch Annihilationsstrahlung enthalten, so hätte R_B entsprechend um mehr als nur 10% kleiner als R_A sein müssen.

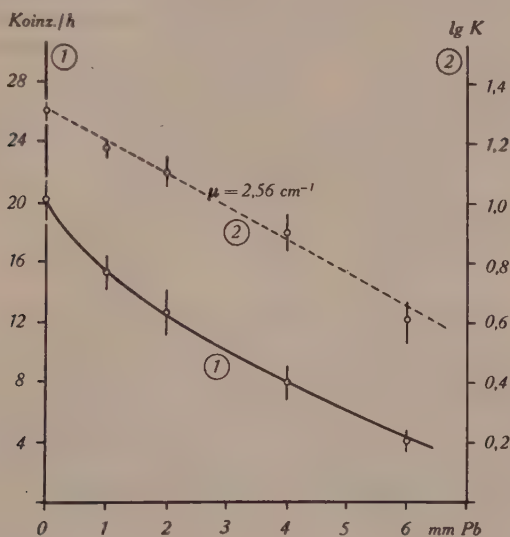


Fig. 6.

Absorption der UX-(γ, γ)-Koinzidenzen (bei unbedeckten Zählrohren).

Es sollte nun zuerst festgestellt werden, ob eine weiche Komponente der γ -Strahlung zur Koinzidenzrate beiträgt. Zu diesem Zweck wurde eine Absorptionsmessung der Koinzidenzen ausgeführt, bei der die UX₂-Quelle ausser mit einem 1,4 mm dicken Bleifilter zur Absorption der β -Strahlen mit weiteren zylindrischen Bleiabsorbern umgeben wurde. Die auf diese Weise gemessene Absorptionskurve der γ -Strahlung (Einzelstösse) ist in guter Übereinstimmung mit dem Resultat der Absorptionsmessungen von Sizoo und Coumou³⁴); dies zeigt, dass trotz der für Absorptionsmessungen ungünstigen Geometrie — einerseits gelangt vom Absorber ausgehende Streustrahlung ins Zählrohr, andererseits ist

der Weg der γ -Strahlen im Absorber im Mittel grösser als dessen Wandstärke — die genannten Fehlerquellen sich einigermaßen kompensieren. Tabelle II gibt das Resultat der *Absorptionsmessung der Koinzidenzen* wieder. Die Absorptionskurve der A-Koinzidenzen (Fig. 6) ist exponentiell ($\mu = \mu_1 + \mu_2 = 2,56 \text{ cm}^{-1}$), entsprechend einem mittleren Absorptionskoeffizienten der koinzidenzauslösenden Strahlung von $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = 1,28 \text{ cm}^{-1} \text{ Pb}$ (Quantenenergie 630 keV).

Tabelle II.

Absorption der β -Strahlen in *Blei*.

Messinzählrohre von 1 mm Wandstärke in 8 cm Distanz.

$\alpha_A = 0,056$, $\tau = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$, Nulleffekt $K_0 = (1,6 \pm 0,6)/\text{h}$.

Reduktion aller Ablesungen auf das Datum 4.10.1941.

Anordnung	Absorber (mm Pb)	$K_{\text{beob.}}/\text{h}$	$K_{\text{zuf.}}/\text{h}$	$K_{\text{kor.}}/\text{h}$	R
B	0	$32,5 \pm 2,4$	2,9	$28,0 \pm 2,4$	$(13,0 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
A	0	$26,2 \pm 1,4$	4,4	$20,2 \pm 1,4$	$(8,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-5}$
„	1	$19,6 \pm 1,1$	2,7	$15,3 \pm 1,1$	
„	2	$16,6 \pm 1,5$	2,3	$12,7 \pm 1,5$	
„	4	$11,1 \pm 1,1$	1,5	$8,0 \pm 1,1$	
„	6	$6,8 \pm 0,7$	1,1	$4,1 \pm 0,7$	

Der Koinzidenz-Untergrund ist jetzt — nach der Antikoinzidenz-Abschirmung der Höhenstrahlung — in Anordnung B nicht einmal mehr $\frac{1}{7}$ der gemessenen Koinzidenzzahl. In Übereinstimmung mit der ersten Messung ist die Koinzidenzrate in Anordnung B 1,5₄-mal grösser als in Anordnung A.

Um die Koinzidenzrate $R_A^I = (10,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-5}$ der ersten Messung (Raumwinkel $\alpha_A = 0,062_5$) mit der A-Koinzidenzrate dieser Messung vergleichen zu können, wird sie auch auf den Raumwinkel 0,056 bezogen; es wird auch noch die geringe Absorption von 5% in den dickeren Zählrohrwänden berücksichtigt. R_A^I geht dann über in

$$R_A^{I'} = 0,95 \cdot 5,6/6,25 \cdot 10,2 \cdot 10^{-5} = (8,7 \pm 0,7) \cdot 10^{-5},$$

was mit $R_A^{II} = (8,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-5}$ sehr gut übereinstimmt.

Diese Koinzidenzrate (wir nehmen das Mittel beider Messungen) von

$$\underline{R_A = (8,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-5}} \quad (\alpha_A = 0,056)$$

ist nun erheblich zu gross, als dass sie sich allein durch die UZ- γ -Strahlung erklären liesse. Nach (2) ist für die Rate der UZ-Koinzi-

denzen, bei Berücksichtigung der Absorption im 1,4 mm Pb-Absorber durch den Faktor f , der Wert*)

$$R_{\text{UZ}} = 2 \cdot \frac{k_{\text{UZ}}}{n_\gamma} \cdot \alpha \cdot f \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon + \frac{k_{\text{UZ}}}{n_\gamma} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sim 3 \cdot 10^{-5}$$

zu erwarten. Dies ist aber weniger als die Hälfte der beobachteten Koinzidenzrate.

Die Tatsache, dass die B-Koinzidenzrate grösser ist als die A-Koinzidenzrate lässt vermuten, dass ein gewisser Bruchteil der Koinzidenzen durch ein einziges γ -Quant ausgelöst wird. Dafür kommt in erster Linie ein doppelter Comptonprozess an den Zähl-

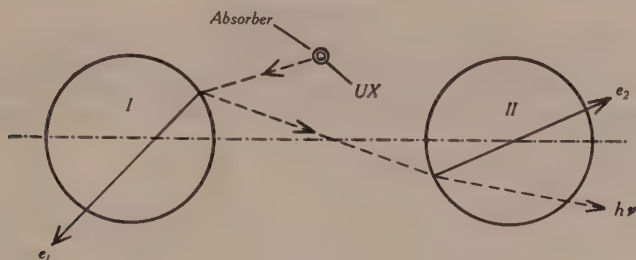


Fig. 7.

Koinzidenzauslösung durch sukzessive Compton-Streuung an den Zählrohrwänden.

rohrwänden in Frage (Fig. 7): Das von der Quelle emittierte Quant wirkt durch Comptoneffekt aus der Wand des Zählrohrs I ein Elektron heraus, welches dieses Zählrohr zum Ansprechen bringt; das gestreute Quant durchsetzt das Zählrohr II und wirkt aus dessen Wand nochmals ein Comptonelektron heraus, durch welches auch dieses Zählrohr zum Ansprechen gebracht wird. Es ist klar, dass durch einen solchen Prozess in Anordnung B mehr Koinzidenzen als in Anordnung A verursacht werden, einerseits wegen der ausgeprägten Richtungsabhängigkeit der Intensität der Streustrahlung, hauptsächlich aber, weil in Anordnung B das gestreute Quant auf dem Wege zum Zählrohr II nicht in dem die Quelle umgebenden Bleifilter absorbiert werden kann. Für die Energie des gestreuten Quants gilt die Beziehung

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + h\nu/mc^2(1 - \cos \Theta)};$$

*) Mit: $k_{\text{UZ}} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ (FEATHER und BRETSCHER²⁷))

$n_\gamma \sim 2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-2}$ (STAHEL und COUMOU³⁵) und STAHEL und KIPFER³⁶).

$f = e^{-2 \cdot 1,1 \cdot 0,14} = 0,74$ $\varepsilon \sim \varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim 6 \cdot 10^{-3}$

bei einer Energie des primären Quants von 800 keV hat also das z. B. unter 150° gestreute Quant eine Energie von nur 200 keV: es wird in wenigen mm Pb absorbiert.

Zur Prüfung dieser Erklärung wurde folgende Vergleichsmessung ausgeführt: Die Zählrohre, die sich in einem Abstand von 5 cm voneinander befanden, wurden mit 1 mm dicken Bleimänteln bedeckt und die Koinzidenzhäufigkeit gemessen; danach wurden die Bleimäntel entfernt und die Quelle wurde dafür mit einem gleich dicken Absorber umhüllt. Solche Messungen wurden abwechselnd hintereinander ausgeführt. Tabelle III gibt das Resultat wieder.

Tabelle III.

Absorption der β -Strahlen in Blei.

Messingzählrohre von 1 mm Wandstärke in 5 cm Distanz.

$\alpha_A = 0,125$, $\tau = 1,1 \cdot 10^{-7}$ sec, Nulleffekt $K_0 = (3,0 \pm 0,5)/h$.

Reduktion der Ableungen auf das Datum 18.11.1941 (3.12.1941 für Zeile 4).

Pb-Be- deckung der	An- ord- nung	Z/min	$K_{\text{beob.}}/h$	$K_{\text{zuf.}}/h$	$K_{\text{kor.}}/h$	R
Quelle	A	5520	$53,6 \pm 2,8$	6,5	$54,1 \pm 2,8$	$(16,4 \pm 0,9) \cdot 10^{-5}$
Zählrohre	A	5500	$33,2 \pm 2,4$	6,4	$33,8 \pm 2,4$	$(7,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$
„	B	4350	$27,2 \pm 1,8$	4,3	$19,9 \pm 1,8$	$(7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$
„	A*)	3650	$21,0 \pm 1,5$	2,8	$15,2 \pm 1,5$	$(7,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$

*) spätere Messung.

Umhüllt der Blei-Absorber die Zählrohre, so ist die Koinzidenzrate nicht einmal halb so gross als wenn er die Quelle umgibt; die Einzelstosszahl bleibt unverändert. Dies zeigt, dass im letzteren Falle mehr als die Hälfte der Koinzidenzen durch die vom Zählrohr ausgehende Streustrahlung bewirkt wird; auch die Tatsache der ausserordentlichen starken Reduktion der Koinzidenzhäufigkeit durch die Zählrohr-Bleimäntel von zusammen 2 mm Dicke spricht für die Richtigkeit der gegebenen Erklärung.

Wir sehen, dass nach Abschirmung der Zählrohre durch die Bleimäntel die B-Koinzidenzrate innerhalb der Messgenauigkeit gleich gross ist wie die A-Koinzidenzrate. Der mittlere Wert von R_A

$$\underline{R_A = (7,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-5} \quad (\alpha = 0,125)}$$

ist von der Grösse der für diesen Raumwinkel zu erwartenden UZ-Koinzidenzrate von

$$R_{\text{UZ}} \sim 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,125 / 0,056 \cdot e^{-0,11} = 6 \cdot 10^{-5}.$$

Die nach Abschirmung der Zählrohre beobachteten Koinzidenzen

sind — nach Subtraktion des Untergrunds — praktisch nur noch die UZ-Koinzidenzen. Angesichts der Ungenauigkeit des berechneten Werts von R_{UZ} ist die Übereinstimmung von R_A mit R_{UZ} als befriedigend anzusehen.

Es wurde auch direkt verifiziert, dass die *Bremsstrahlung* nicht in merklicher Weise zu Koinzidenzen Anlass gibt. Der die Quelle umhüllende Bleizylinder zur Absorption der β -Strahlen wurde durch einen 5 mm dicken Aluminiumzylinder ersetzt, wodurch die Einzelstosszahl — infolge der starken Verminderung der äusseren Bremsstrahlung — von 3840 Stösse/min auf 2340 Stösse/min reduziert wurde. Die Ergebnisse dieser Messung sind in Tabelle IV wiedergegeben.

Tabelle IV.

Absorption der β -Strahlen in *Aluminium*.

Messingzählrohre von 1 mm Wandstärke in 8 cm, resp. 5 cm Distanz, mit Bleimänteln von 1 mm Dicke bedeckt.

	$\alpha = 0,056$		$\alpha = 0,125$
	A	B	A
$Z/\text{min} \dots$	2340	2120	4020
$K_{\text{beob.}}/\text{h} \dots$	$7,9 \pm 1,3$	$7,6 \pm 1,1$	$32,9 \pm 1,5$
$K_0/\text{h} \dots$	1,6	1,6	3,0
$K_{\text{zuf.}}/\text{h} \dots$	1,2	1,0	3,6
$K_{\text{kor.}}/\text{h} \dots$	$5,1 \pm 1,3$	$5,0 \pm 1,1$	$26,3 \pm 1,5$
$R \dots$	$(3,6 \pm 0,6) \cdot 10^{-5}$	$(3,9 \pm 0,6) \cdot 10^{-5}$	$(10,9 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$

Beim Raumwinkel $\alpha = 0,125$ ist die Koinzidenzrate jetzt grösser als bei der früheren Messung, bei der die β -Strahlen in Blei absorbiert worden waren (Tabelle III). Dies erklärt sich durch die, infolge Verminderung der Bremsstrahlung, geringere Einzelstosszahl. In der Tat ist das Verhältnis der Koinzidenzraten bei Absorption der β -Strahlen in Aluminium resp. in Blei

$$R_A^{\text{Al}}/R_A^{\text{Pb}} = \frac{(10,9 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}}{(7,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}} = 1,54 \pm 0,14$$

innerhalb der Messgenauigkeit gleich dem reziproken Verhältnis der entsprechenden Einzelstosszahlen

$$Z^{\text{Pb}}/Z^{\text{Al}} = \frac{3840}{2340} = 1,64$$

wie es zu erwarten ist, wenn die Bremsstrahlung selbst keine systematischen Koinzidenzen verursacht.

Die Tatsache, dass mit $\alpha = 0,056 R_B$ eher noch etwas grösser (innerhalb der Messgenauigkeit), aber jedenfalls nicht kleiner ist als R_A — während sie beim Fehlen einer Richtungskorrelation der sukzessiv emittierten UZ-Quanten um 10% kleiner sein sollte — ist wohl ein Zeichen dafür, dass der diskutierte, durch Comptonstreuung an den Zählrohren bewirkte Störeffekt in Anordnung B noch nicht ganz vollständig unterdrückt ist.

6. Obere Grenze für den mittleren Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung durch schnelle UX_2 -Elektronen und für die UX_2 - e^+ -Emissionsrate.

Der Ursprung der beobachteten UX-(γ, γ)-Koinzidenzen ist somit als aufgeklärt zu betrachten: diese Koinzidenzen sind verursacht durch die γ -Strahlung des mit dem UX_2 isomeren UZ. Die γ -Strahlung des UX_2 -Kerns und die Bremsstrahlung liefern keinen merklichen Beitrag zur Koinzidenzrate.

Von einer intensiven, von der UX-Quelle ausgehenden Annihilationsstrahlung ist absolut nichts zu bemerken: bei Abschirmung der Zählrohre durch Bleimäntel zur Unterdrückung des Effekts der Compton-Streustrahlung ist die Koinzidenzrate in Anordnung A gleich gross wie die Koinzidenzrate in Anordnung B. Eine eventuell doch vorhandene schwache Annihilationsstrahlung müsste jedenfalls so wenig intensiv sein, dass die durch sie verursachte Differenz $R_{\text{Ann. Str.}} \sim R_A - R_B$ sicher kleiner als $1 \cdot 10^{-5}$ wäre (Tabellen III und IV). Nach § 4, 3, Gleichung (3) ergibt sich daraus eine Maximalabschätzung der Positronen-Emissionsrate:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \frac{k^{(+)} }{n_\gamma} \cdot \frac{(\varepsilon_{510 \text{ keV}})^2}{\bar{\varepsilon}} f &< 1 \cdot 10^{-5}, \\
 k^{(+)} &< 1 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{n_\gamma}{2 f \varepsilon_{510 \text{ keV}}} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{510 \text{ keV}}} \\
 k^{(+)} &< 1 \cdot 10^{-4} e^+ / e^- \quad (4) \\
 (n_\gamma \sim n_\gamma^K = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ für Tabelle IV nach STAHEL und COUMOU}^{35}); \\
 \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{510 \text{ keV}}} &= 2 \text{ nach v. DROSTE}^{30); \\
 \varepsilon_{510 \text{ keV}} &= 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ nach § 4,3; } f = e^{-2 \cdot 1,73 \cdot 0,1} = 0,7.
 \end{aligned}$$

Beziehen wir die Emissionsrate auf die Zahl e^- der pro Zerfall emittierten UX_2 -Elektronen mit Energien $> 2 \text{ mc}^2$ — das sind nahezu ein Drittel aller Zerfallselektronen —, so lautet die Abschätzung

$$\underline{e} < 3 \cdot 10^{-4} e^+ / e^- \quad (5)$$

Der theoretisch berechnete Wert von ϱ (siehe BRADT, GUILLISSEN und SCHERRER²⁵), d. i. die Anzahl der, durch äussere Paarerzeugung in dem die UX-Quelle umgebenden Bleiabsorber erzeugten Paare, dividiert durch die Anzahl der Zerfallselektronen mit Energien $> 2\text{ mc}^2$,

$$\varrho_{\text{theor.}} = 0,8 \cdot 10^{-5} e^+/e'^- \quad (6)$$

ist noch ca. 40mal kleiner als die angegebene, experimentell bestimmte obere Grenze. Der Nachweis einer so ausserordentlich seltenen Positronen-Emission dürfte mit Hilfe dieser Methode nur dann noch möglich sein, wenn mit β^- -Strahlern, die wie P^{32} überhaupt keine Kern- γ -Strahlung emittieren, gearbeitet werden könnte. Für die Beurteilung der behaupteten „Anomalie“ der (inneren und äusseren) Paarerzeugung durch Elektronen ist die erreichte Genauigkeit aber bei weitem genügend: geben doch BARENDREGT und SIZOO²⁰) allein für die Positronen-Emission einer unbedeckten UX-Quelle einen fast 100mal grösseren Wert für ϱ als (5) an. Entspräche dies den Tatsachen, so hätten z. B. bei den in Tabelle III wiedergegebenen Messungen als Differenz der Koinzidenzzahlen in Anordnung A und Anordnung B einige 100 Koinzidenzen pro Stunde beobachtet werden müssen, weit mehr als die Gesamtzahl der in einer der Anordnungen allein beobachteten Koinzidenzen.

Da $\bar{\sigma}_{\text{theor.}}^{\text{Pb}} \sim 2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$, so ist in (5) auch die folgende Abschätzung enthalten:

$$\bar{\sigma}_{(\text{UX}_2)}^{\text{Pb}} < 8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \sim 40 \bar{\sigma}_{\text{theor.}}^{\text{Pb}} \quad (7)$$

Diese obere Grenze ist gut 300mal kleiner als der von BARENDREGT und SIZOO²⁰) für den mittleren Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung durch schnelle UX_2 -Elektronen angegebene Wert $\sigma = 2,2 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^2$.

Das negative Resultat des Versuchs, eine vom UX ausgehende Annihilationsstrahlung nachzuweisen, widerlegt die Behauptung der „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen: *der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess kann den theoretisch berechneten keinesfalls um mehrere Zehnerpotenzen übertreffen*. Das Resultat des Versuchs zeigt überdies, dass UX_2 nicht — wie es die Wilsonkammer (BARENDREGT und SIZOO²⁰), HEINE²²) zu zeigen scheint — Positronen im Ausmass $10^{-2} e^+/\text{Zerfall}$ emittiert, sondern *höchstens* 100mal weniger.

§ 5. Die γ -Strahlung des P^{32} und des RaE.

Das Ergebnis der Untersuchung der γ -Strahlung des P^{32} und des RaE durch CHIEN-SHIUNG-WU³⁷⁾ resp. durch STAHEL und GUILLISSEN³⁸⁾ zeigt, dass auch diese β -Strahler sicherlich nicht (10^{-3} — 10^{-2}) Positronen pro Zerfall emittieren. Intensität und Absorbierbarkeit der γ -Strahlung des P^{32} wie des RaE sind genau von der Grösse, die für reine Bremsstrahlung zu erwarten ist; von einer Annihilationsstrahlungs-Komponente ist nichts zu bemerken*).

1. Die äusserst schwache γ -Strahlung des P^{32} ist zuletzt von CHIEN-SHIUNG-WU untersucht worden (siehe auch SIZOO, EIJKMANN und GROEN³⁹⁾). Die Aufteilung der γ -Strahlung in *innere* (im Coulombfeld des durch den β -Zerfall umgewandelten Kerns entstandene) und in *äussere* (von den β -Strahlen im Absorber, in welchem sie gebremst werden, erzeugte) *Bremsstrahlung* wird dabei von CHIEN-SHIUNG-WU nach der von STAHEL und KIPFER³⁶⁾ angegebenen Methode bestimmt. Es wird mit verschiedenen, die Quelle umhüllenden Absorbern der β -Strahlen die Intensität der γ -Strahlung gemessen und diese so in Funktion der Ordnungszahl Z des Absorbers der β -Strahlen bestimmt: die Extrapolation für $Z = 0$ ergibt die Intensität der inneren Bremsstrahlung allein.

BARENDREGT, GRIFFIOEN und SIZOO²¹⁾ beobachteten in der Wilsonkammer auf 100 von einem unbedeckten P^{32} -Präparat ausgehende „negative“ Spuren 0,9 „positive“ Spuren. Da die Intensität der Annihilationsstrahlung, welche durch eine Positronen-Emission von $0,9 \cdot 10^{-2} e^+$ /Zerfall verursacht werden muss, unabhängig ist von der Ordnungszahl des Materials in dem die Positronen absorbiert werden, so hätte bei den Messungen von CHIEN-SHIUNG-WU diese Annihilationsstrahlung als „innere“ γ -Strahlung beobachtet werden müssen. (Sie wäre von CHIEN-SHIUNG-WU als innere Bremsstrahlung betrachtet worden.)

Die Theorie von KNIPP und UHLENBECK⁴⁰⁾ ergibt für die in Form von *innerer Bremsstrahlung* ausgesandte Energie den Wert

$$J = 0,002 \text{ mc}^2/\text{Zerfall}.$$

Für die Energie der *äusseren Bremsstrahlung*, deren Intensität der Ordnungszahl Z des Absorbers der β -Strahlen fast genau proportional ist, ergibt sich nach BETHE und HEITLER⁴¹⁾ für Aluminium der Wert

$$E_{Al} = 0,0089 \text{ mc}^2/\text{Zerfall}.$$

*) Weder bei CHIEN-SHIUNG-WU noch bei STAHEL und GUILLISSEN ist von Annihilationsstrahlung die Rede. Diese Autoren diskutieren ihre Resultate nicht in bezug auf die hier interessierende Frage.

Bei einer Emission von $0,9 \cdot 10^{-2}$ e^+ /Zerfall (nach BARENDREGT, GRIFFIOEN und SIZOO) ist für die Annihilationsstrahlung eine Energie

$$A = 2 \cdot 0,9 \cdot 10^{-2} = 0,018 \text{ mc}^2/\text{Zerfall}$$

zu erwarten.

Experimentell ergibt sich für die Energie der „inneren“ γ -Strahlung — d. h. für $(J + A)$ — der Wert $0,002 \text{ mc}^2/\text{Zerfall}$ und für die Energie der in Al erzeugten Bremsstrahlung der Wert $0,0082 \text{ mc}^2/\text{Zerfall}$, in vollständiger Übereinstimmung mit der Theorie der Bremsstrahlung. Von einer Annihilationsstrahlung, die nach dem Ergebnis der Wilsonkammer-Untersuchung BARENDREGT, GRIFFIOEN und SIZOO's zu erwarten ist, und deren Intensität das Neunfache des gemessenen Werts betragen sollte, ist nichts zu bemerken.

Genauer und direkter als die absoluten Intensitätswerte wird das Verhältnis $J : E_{\text{Al}}$ bestimmt. Die Theorie der Bremsstrahlung liefert für es den Wert

$$J/E_{\text{Al}} = 0,23$$

während eine $0,9 \cdot 10^{-2}$ e^+ /Zerfall entsprechende Annihilationsstrahlung den Wert auf $(0,002 + 0,018)/0,0089 = 2,3$ erhöhen würde. Beobachtet wird der Wert 0,24, der mit einer Positronenemissionsrate der genannten Grössenordnung unverträglich ist.

Schliesslich ist zu erwähnen, dass auch die *Absorptionsmessungen Wu's* nichts vom Vorhandensein einer Annihilationsstrahlung andeuten. In der zitierten Arbeit finden wir eine Absorptionskurve der γ -Strahlung einer mit Al bedeckten P^{32} -Quelle; diese Strahlung setzt sich also energiemässig zusammen aus $\frac{1}{5}$ innerer und $\frac{4}{5}$ in Al erzeugter γ -Strahlung. Ich habe zum Vergleich mit der gemessenen Absorptionskurve (Kurve 2 von Fig. 8) die Absorptionskurve der inneren Bremsstrahlung nach KNIPP und UHLENBECK berechnet (Kurve 1); die Absorptionskurve der äusseren Bremsstrahlung ist von derjenigen der inneren Bremsstrahlung nicht sehr verschieden. Es ist in Fig. 8 auch noch die Absorptionskurve für 510 keV-Annihilationsstrahlung eingezeichnet (Kurve 3). Wie wir sehen, schliesst die gemessene Absorbierbarkeit der P^{32} - γ -Strahlung also ebenfalls aus, dass sie zu einem erheblichen Teil Annihilationsstrahlung darstellt.

Für diese Diskussion ist es gleichgültig, ob Positronen direkt vom P^{32} emittiert werden, oder ob sie durch „anomale“ Paarerzeugung im Absorber entstehen. Wäre der Wirkungsquerschnitt für diese Paarerzeugung nämlich — wie behauptet — Z -proportional, so wäre die Intensität der Annihilationsstrahlung, welche

bei einer solchen „anormalen“ Paarerzeugung entstehen müsste, vom Absorbermaterial nahezu unabhängig, und würde bei den Messungen von Wu ebenfalls als „innere“ γ -Strahlung in Erscheinung treten. Die Messungen Wu's sprechen also auch gegen die behauptete „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen.

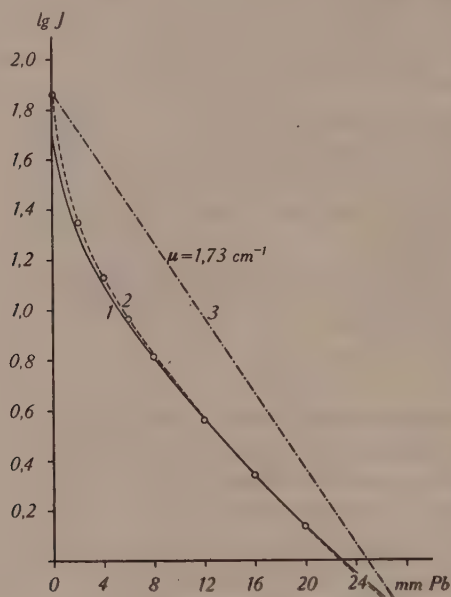


Fig. 8.

Bremsstrahlung des P^{32} .

1. Theor. Absorptionskurve der inneren Bremsstrahlung (KNIPP und UHLENBECK).
2. Exp. Absorptionskurve der γ -Strahlung einer von Al bedeckten P^{32} -Quelle (CHLEN-SHIUNG-WU).
3. Absorptionskurve der 510 keV-Annihilations-Strahlung.

2. Die Messungen von STAHEL und GUILLISSEN der Intensität und Härte der γ -Strahlung des RaE beweisen, dass es sich auch bei dieser äusserst schwachen γ -Strahlung um reine Bremsstrahlung handelt. Jedoch zeigen auch die von HEINE²²⁾ mit RaE-Quellen ausgeführten Aufnahmen, genau wie die mit UX- und RdTh-Quellen ausgeführten, von der Quelle ausgehende positive Spuren: auf etwa 300 negative Spuren ist eine solche positive Spur zu beobachten. Es kann aber von einer Emission von $0,3 \cdot 10^{-2}$ Positronen pro Zerfall des RaE keine Rede sein. Die einer so häufigen Emission entsprechende Annihilationsstrahlung müsste zur Energie der RaE- γ -Strahlung im Mittel pro Zerfall einen Beitrag von $2 \cdot 0,003 \text{ mc}^2 = 3000 \text{ eV}$ liefern; das ist das neunfache

der theoretisch (unter Zugrundelegung des RaE- β -Spektrums nach FLAMMERSFELD⁴²⁾) berechneten mittleren Energie — $0,00068 mc^2 = 350$ eV — der inneren Bremsstrahlung. Die „innere“ RaE- γ -Strahlung müsste bei einer so häufigen Positronen-Emission als nahezu monochromatische 510 keV-Strahlung erscheinen. Das ist nun nicht im mindesten der Fall: im Gegenteil bestätigt das experimentelle Resultat von STAHEL und GUILLISSEN genau die Voraussage der KNIPP-UHLENBECK'schen Theorie, sowohl was die absolute Intensität, als auch was die Absorbierbarkeit anbetrifft. Es ist also daraus der gleiche Schluss zu ziehen wie aus der vorangehenden Diskussion der Messungen von CHIEN-SHIUNG-WU: Eine Emission von $0,3 \cdot 10^{-2}$ Positronen pro Zerfall des RaE ist gänzlich ausgeschlossen.

§ 6. Die Versuche zum direkten Nachweis der Paarerzeugung durch Elektronen. Messungen der Positronen-Emission der β^- -Strahler mit dem β -Spektrographen.

1. Paarerzeugung durch Elektronen.

Die Tatsache, dass bei den Untersuchungen der γ -Strahlung des UX₂, des P³² und des RaE von einer 510 keV-Annihilationsstrahlung nichts zu bemerken ist, zeigt, dass die behauptete „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen nicht vorhanden ist. Dies wird bestätigt durch die in der Literatur beschriebenen Versuche zum direkten Nachweis der Paarerzeugung durch Elektronen.

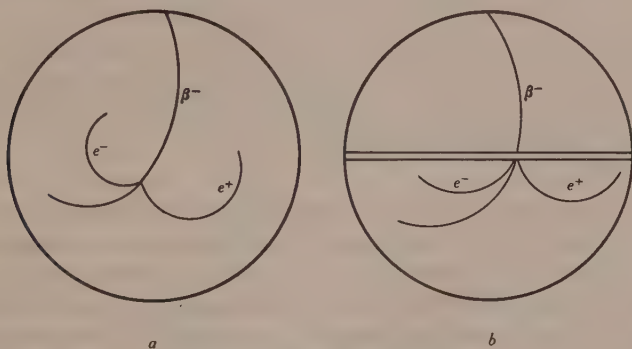


Fig. 9.

Paarerzeugung durch β -Strahlen.

- a) im Felde des Kernes eines der Gasatome,
- b) beim Durchgang durch eine Folie.

a) *Wilsonkammer-Untersuchungen.* Nach Aufnahmen der in Fig. 9 skizzierten Art ist vielfach gesucht worden, sowohl mit sehr

schnellen Elektronen ($E \sim 10$ MeV) als auch mit den Zerfallselektronen der natürlichen β -Strahler.

CRANE und HALPERN⁴³⁾ untersuchten den Durchgang schneller Elektronen mit Energien zwischen 1 MeV und 10 MeV durch in der Mitte der Wilsonkammer angebrachte Folien. Auf insgesamt 2588 Elektronenspuren fanden sie kein einziges Paar oder Positron, weder von der Folie ausgehend (Fall b), noch von einem Punkt der Elektronenspuren (Fall a). Die obere Grenze für den fraglichen Wirkungsquerschnitt wird für Luft und Glimmer zu $4 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$, für Blei zu $1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ angegeben. FOWLER und SHEPPARD⁴⁴⁾ beobachteten 2000 Durchgänge sehr schneller Elektronen ($E \sim 10$ MeV) durch eine Bleifolie, ohne Paare feststellen zu können.

SEN GUPTA⁴⁵⁾ beobachtete in einer zu 50% mit Xenon gefüllten Wilsonkammer Spuren von Elektronen der Energie 2,1 MeV mit einer gesamten Bahnlänge von 330 m, ohne Positronen zu finden; die Abschätzung für den Wirkungsquerschnitt ist $\sigma_{Xe} \lesssim 2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. CHAMPION⁴⁶⁾ konnte in einer mit Stickstoff gefüllten Wilsonkammer bei 200 m Bahnlänge der Elektronenspuren (RaE-Elektronen mit Energien > 1 MeV) keine Paarbildung beobachten. ZUBER⁴⁷⁾ beobachtete in einer mit Argon gefüllten Wilsonkammer Spuren von Elektronen mit Energien zwischen 1,7 MeV und 2,4 MeV, ohne, bei einer Bahnlänge von insgesamt 350 m, einen einzigen Fall von Paarerzeugung feststellen zu können. STAUB⁴⁸⁾ fokussierte mit einer magnetischen Elektronenlinse β -Strahlen von 1,9 MeV Energie auf eine an der Kammerwand angebrachte Absorberfolie (C, Al und Pb). Auf 1467 β -Spuren fand er eine einzige von der Folie ausgehende Spur positiver Krümmung, die aber höchst wahrscheinlich von einem an der Kammerwand reflektierten negativen Elektron herrührt. Es wird die Abschätzung $\sigma/Z < 10^{-25} \text{ cm}^2$ angegeben. Diese Liste liesse sich noch erheblich verlängern*).

b) *Untersuchungen mit anderen Methoden:* Nur Versuche mit durch Hochspannung beschleunigten Elektronen könnten auch noch Wirkungsquerschnitte von der Grössenordnung des theoretischen Werts $(Z/82)^2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$ der Messung zugänglich machen. Der einzige Versuch dieser Art ist — soweit mir bekannt — derjenige von FELDMEIER und COLLINS⁴⁹⁾. Die Energie der Elektronen wurde zwischen 0,9 MeV und 1,5 MeV variiert; bombardiert

*) Von allen gleichartigen Beobachtungen widersprechen einzig diejenigen von SKOBELZYN und STEPANOWA¹⁷⁾⁵⁰⁾ und von CHAMPION und BARBER⁵¹⁾ diesen Resultaten. Ihre Beobachtungen sind durch die oben angeführten Versuche als widerlegt zu betrachten.

wurde eine $1\ \mu$ dicke Goldfolie mit einem Elektronenstrom von 10^{-5} Amp. Die in der Goldfolie entstehenden Positronen wurden mit Hilfe der Trochoidenmethode nachgewiesen. Für einen Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung von $10^{-22}\ \text{cm}^2$ war pro μA des einfallenden Elektronenstroms vom Faradaykäfig aus, in dem die Positronen aufgefangen wurden, ein Strom von 10^{-11} Amp zu erwarten. Ströme dieser Grössenordnung wurden nicht beobachtet; angedeutet war ein Strom von 10^{-15} Amp pro μA des Elektronenstroms, entsprechend einem Wirkungsquerschnitt der Grössenordnung $10^{-26}\ \text{cm}^2$. Damit ist auf die direkteste Art bewiesen, dass im Energiebereich (1,0—1,5) MeV die Häufigkeit der Paarerzeugung durch Elektronen der Voraussage der Diracschen Theorie entspricht.

ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW⁵²⁾ haben die Paarerzeugung durch $\text{RaC-}\beta$ -Strahlen mit Hilfe des magnetischen Spektrographen untersucht. Sie konnten zeigen, dass der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch $\text{RaC-}\beta$ -Strahlen entschieden kleiner ist als derjenige für die Paarerzeugung durch die γ -Strahlen des RaC .

2. Positronen-Emission der β -Strahler.

a) Die *Positronen-Emission des $\text{Th}(\text{C} + \text{C}'')$ und des RaC* ist von ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW⁵²⁾ und von ALICHANOW und SPIWAK⁵³⁾ mit dem β -Spektrographen (magnetische Halbkreisfokussierung) untersucht worden. Fig. 10 ist eine Wiedergabe des von ihnen gemessenen $\text{Th}(\text{C} + \text{C}'')$ -Positronenspektrums. (Die Spektren wurden bis zu Energien von mindestens 170 keV herab getreu wiedergegeben.) Bei einer Energie von 1,6 MeV ist ein steiler Abfall der Intensität zu sehen, der den Ursprung wenigstens eines erheblichen Teils der Positronen aus der Paarkonversion der 2,62 MeV γ -Linie des ThC'' beweist. Die Positronen-Emissionsrate wurde auf zwei verschiedene Arten experimentell bestimmt. Eine direkte Messung ergab den Wert $2 \cdot 10^{-4}\ e^+/\text{Th}(\text{C} + \text{C}'')$ -Zerfallselektron. In Übereinstimmung damit ist der Wert $2,25 \cdot 10^{-4}\ e^+/\text{Th}(\text{C} + \text{C}'')$ -Zerfallselektron, der sich aus dem experimentell bestimmten Verhältnis 1:4 der Zahl der Positronen, emittiert von einer unbedeckten $\text{Th}(\text{B} + \text{C} + \text{C}'')$ -Quelle, zur Zahl derjenigen, emittiert von einer mit Blei bedeckten, gleich intensiven Quelle, unter Verwendung des Werts der BETHE-HEITLER'schen Theorie für den Wirkungsquerschnitt der äusseren Paarerzeugung durch γ -Strahlen, ergibt. Diese Emissionsrate ist von der Grössenordnung, welche die Theorie von JAEGER und HULME⁴⁾ für die innere

Paarkonversion der 2,62 MeV-Linie (Quadrupolstrahlung) erwarten lässt; sie ist 50mal kleiner als die relative Anzahl der positiven Wilsonkammerspuren nach CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁶⁾. Auch mit RaC wird eine fast gleich intensive Positronen-Emission gefunden: $n_{\text{RaC}}^+ = (2,5 \div 4) \cdot 10^{-4}$.

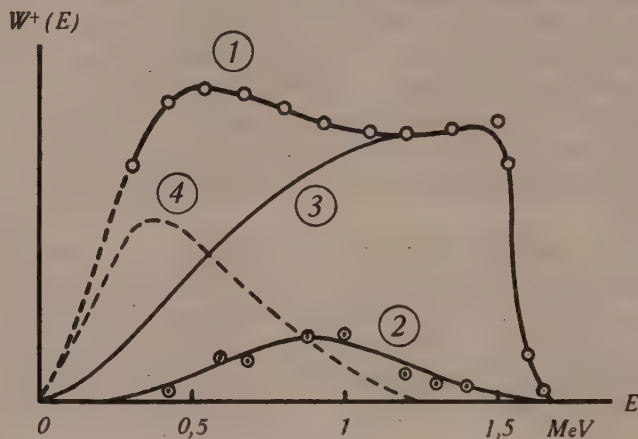


Fig. 10.

Positronenspektrum des Th(C + C'') nach ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW.

1. gemessenes Spektrum,
2. Untergrund,
- 3: Spektrum der durch γ -Paarkonversion entstandenen Positronen nach JAEGER und HULME (theor.),
4. verbleibendes Spektrum.

Ebenso wie beim Positronenspektrum des Th(C + C'') (Fig. 10, Kurve 4) zeigt auch das Positronenspektrum des RaC bei kleinen Energien einen Überschuss der beobachteten Positronenzahl über diejenige, die auf Grund des theoretisch berechneten Spektrums als durch Paarkonversion der γ -Linien erklärt anzusehen ist. In beiden Fällen ist dieser Überschuss aber nur von der gleichen Grössenordnung wie die Zahl der letzteren. Eine Positronen-Emissionsrate des Th(C + C'') und des RaC von der Grössenordnung $10^{-2} e^+/\text{Zerfall}$ ist jedenfalls mit dem Ergebnis dieser Autoren völlig unvereinbar*).

*) Diese Ansicht wird nicht geteilt von SIZOO und BARENDREGT²⁰⁾, welche den quantitativen Widerspruch zwischen dem Ergebnis der Wilsonkammer-Untersuchung und demjenigen von ALICHANOW und Mitarbeitern mit dem Hinweis auf die ausserordentlich geringe Energie der Positronen (Fig. 3) zu lösen glauben. Infolge Streuung und Absorption in den die Zählrohrfenster bedeckenden Folien treten für kleine Energien (erst unterhalb 170 keV bei den Messungen von ALICHANOW und Mitarbeitern) bei der Registrierung im β -Spektrographen allerdings

b) Eine *Positronen-Emission des UX_2 und des RaE* habe ich in Zusammenarbeit mit H. G. Heine (HEINE²²) mit dem β -Spektrographen nachzuweisen versucht. Eine solche war nicht festzustellen. Die spektrographische Messung ergibt, dass die UX_2 -Positronen-Emissionsrate jedenfalls kleiner als $3 \cdot 10^{-4} e^+/\text{Zerfall}$ sein muss. Dieses Resultat bestätigt das Ergebnis der (γ, γ) -Koinzidenzmessungen (siehe § 4, 6). Für RaE ergibt sich eine Abschätzung der gleichen Grössenordnung.

c) Versuche zum Nachweis der Positronen-Emission der β -Strahler mit der THIBAUD'schen *Trochoidenmethode* sind von BENEDETTI⁵⁴), MONADJEMI⁵⁵) und SHINOHARA⁵⁶) ausgeführt worden. Die Ergebnisse von BENEDETTI's und SHINOHARA's Messungen sind in guter Übereinstimmung mit denjenigen von ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW*). (SHINOHARA beweist durch Beobachtung des zeitlichen Verlaufs der Positronen-Emission des $Ra(B + C)$, dass die Positronen tatsächlich nur vom RaC herühren.)

Zusammenfassend ist festzustellen: Die Ergebnisse der Versuche, bei denen magnetische Fokussierungsmethoden verwendet wurden, sprechen gegen eine Positronen-Emission der natürlichen β -Strahler von $(10^{-3} - 10^{-2}) e^+/\text{Zerfall}$.

§ 7. Anhang: Die Zwei-Quanten Annihilation des Positrons.

Wie schon am Schluss von § 2 erwähnt wurde, ist durch BERINGER und MONTGOMERY die theoretische Voraussage der (praktisch) genau kollinearen Emission der paarweise ausgesandten

beträchtliche Verluste ein. Aber die Folien der Zählrohrfenster sind immer noch sehr viel dünner als die Wände der Glaskapillaren, welche die radioaktiven Präparate in der Wilsonkammer umhüllen. Es ist auch zu entgegnen, dass unter Zugrundelegung des Spektrums von SZOO und BARENDREGT die Anzahl von Positronen und Energien $> 170 \text{ keV}$ beträchtlich genug sein sollte, um einen mächtigen Anstieg der Positronen-Intensität bei geringen Energiewerten erwarten zu lassen. Die Messungen von ALICHANOW und Mitarbeitern zeigen jedoch von 250 keV abwärts einen Abfall der Intensität.

*) Nur MONADJEMI, der die Beobachtungen BENEDETTI's mit geänderter Apparatur fortgesetzt hat, findet eine $Th(C + C'')$ - und RaC -Positronen-Emissionsrate von $(3 - 4) \cdot 10^{-3}$ resp. $(2 - 3) \cdot 10^{-3}$. Auch lässt ihn das Ergebnis seiner Messungen mit $Th(C + C'')$ - und RaC -Positronen auf einen Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch schnelle Elektronen von der Grössenordnung 10^{-23} cm^2 schliessen. Seine eigenen Messungen mit UX , mit dem von ihm keine Positronenerzeugung im Absorber der β -Strahlen beobachtet wurde, widerlegt aber diese Schlussfolgerung. (Die obere Grenze des UX_2 - β -Spektrums liegt bei 2,3 MeV!). Die Arbeit MONADJEMI's ist vom experimentellen Standpunkt aus nicht unangefochten geblieben (THIBAUD, CARTAN et COMPARAT⁵⁷), S. 44). Die an der Apparatur vorgenommenen Verbesserungen erscheinen zur Erklärung des Widerspruchs zwischen den Ergebnissen MONADJEMI's und BENEDETTI's nicht ausreichend.

Annihilationsstrahlungs-Quanten vollständig bestätigt worden; ihre Resultate waren aber zur Zeit, als die Koinzidenz-Untersuchung der UX- γ -Strahlung ausgeführt wurde, noch nicht veröffentlicht. Die früheren Versuche vom KLEMPERER⁵⁸⁾ und von ALICHANOW, ALICHANIAN und ARZIMOWITSCH⁵⁹⁾ reichten nicht aus, um die Korrelation der Emissionsrichtungen der beiden, bei der Annihilation gleichzeitig emittierten Quanten, genau zu bestimmen. Da diese Frage für die vorliegende Arbeit von entscheidender Wichtigkeit ist, wurde deshalb die vorausgesetzte Kollinearität der Emissionsrichtungen der Annihilationsstrahlungs-Quanten experimentell nachgeprüft.

1. Annihilationsstrahlung der Zerfallspositronen des Zn^{63} .

Die Annihilationsstrahlungs-Quelle in den beiden Anordnungen A und B von Fig. 4 ist jetzt ein von 1,2 mm Blei umgebenes Zn^{63} -Präparat, hergestellt durch Bestrahlung von Kupfer mit Protonen im ETH-Cyclotron: $\text{Cu}^{63}(p,n)\text{Zn}^{63}$. Als Zählrohre wurden die früher verwendeten Messingzählrohre und die für 510 keV-Strahlung empfindlicheren Bleizählrohre (s. § 4, 3) benutzt. Die folgende Tabelle enthält das Ergebnis einer mit den Bleizählrohren ausgeführten Messreihe.

Tabelle V.

$$(T_{\text{Zn}^{63}} = (38,3 \pm 0,5) \text{ min}; \quad \tau = (1,50 \pm 0,15) \cdot 10^{-7} \text{ sec}).$$

Messzeit	Anordnung	Koinzidenzen			Einzelstöße $Z (\text{min}^{-1})$	Koinz.-Rate $R \cdot 10^3$
		$K_{\text{beob.}}$ (min^{-1})	$K_{\text{zuf.}}$ (min^{-1})	$K_{\text{korr.}}$ (min^{-1})		
0—10'	A	$69,0 \pm 2,6$	$8,0 \pm 0,8$	$61,0 \pm 2,7$	39 800	$1,54 \pm 0,07$
11'—15'	B	$5,5 \pm 1,2$	$6,0 \pm 0,6$	$-0,5 \pm 1,4$	35 500	—
17'—28'	A	$49,2 \pm 2,1$	$3,9 \pm 0,4$	$45,3 \pm 2,2$	27 700	$1,63 \pm 0,08$
30'—34'	B	$4,8 \pm 1,1$	$2,8 \pm 0,3$	$2,0 \pm 1,2$	23 600	—

Dieses Resultat bestätigt also augenfällig die theoretische Voraussage. Der Wert der Koinzidenzrate

$$R_A^{\text{Zn}^{63}} = (1,59 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}$$

ist kleiner als der mit Cu^{61} gemessene Wert für reine Annihilationsstrahlung

$$R_A^{\text{Cu}^{61}} = (2,90 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$$

(s. § 4, 3). Wie Absorptionsmessungen an der Zn^{63} - γ -Strahlung zeigen, rührt in der Tat die Einzelstosszahl der Zählrohre nur etwa zur Hälfte von der Annihilationsstrahlung her und zur Hälfte von einer härteren Kern- γ -Strahlung.

2. Annihilationsstrahlung der durch die γ -Strahlen des Ra in Blei erzeugten Positronen.

Da es sich bei den Versuchen des § 4 um den Nachweis einer Paarerzeugung handelte, sollte — obwohl ein anderes Verhalten natürlich nicht zu erwarten war — die Tatsache der kollinearen Emission der Annihilationsstrahlungs-Quanten schliesslich auch noch verifiziert werden für den Fall, dass die annihilierenden Positronen durch Paarerzeugung entstanden sind.

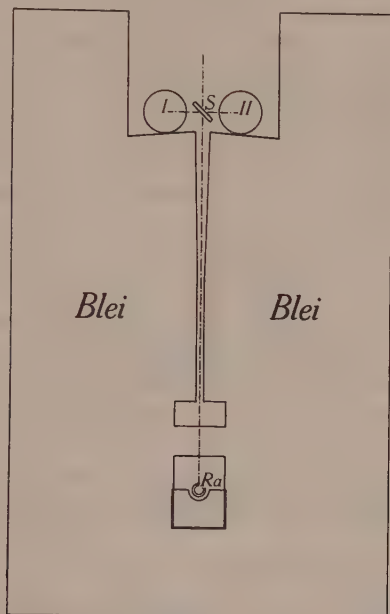


Fig. 11.

Paarerzeugung durch Ra- γ -Strahlen.

Fig. 11 zeigt die Anordnung. Die γ -Strahlung einer Radium-Quelle, ausgeblendet durch einen zur Hälfte konischen Kanal in einem Bleiberg von 1,5 t Gewicht und gefiltert durch 2,4 cm Blei, fällt auf ein 0,25 cm dickes Bleiplättchen *S*, in welchem die härtesten γ -Linien Paare erzeugen, die zum grössten Teil in diesem Plättchen stecken bleiben. Nur in Anordnung A (Fig. 12) sollte die in *S* entstehende Annihilationsstrahlung Zählrohrkoinzidenzen verursachen können.

Zum Schutz gegen die weichste Compton-Streustrahlung waren die Zählrohre mit Bleimänteln bedeckt. Die Form des Kanals, die Distanz der Zählrohre, die Dicke des Bleiplättchens *S*

usw. wurden nach längeren Vorversuchen so gewählt, dass einerseits der Untergrund Z_0 — die Zahl der Einzelstösse, registriert bei Abwesenheit des Bleiplättchens S , die durch an den Wänden des Kanals gestreute Strahlung verursacht wird — möglichst gering war, und andererseits das Verhältnis der Zahl der in Anordnung A registrierten Einzelstösse zum Untergrund möglichst gross. Es konnte für dieses Verhältnis ein Wert $Z/Z_0 = 2,3$ (Messingzählrohre) erreicht werden.

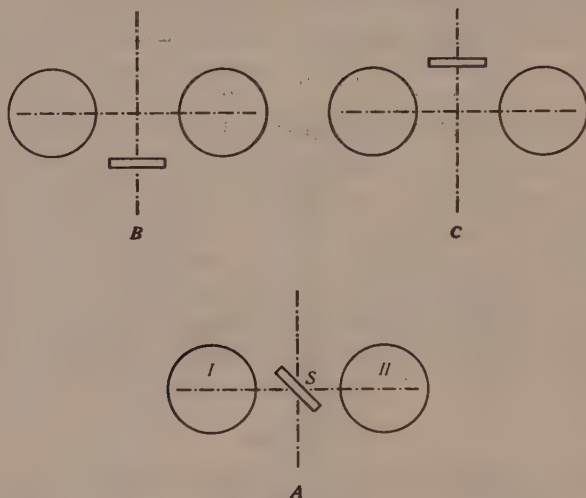


Fig. 12.

Anordnungen des Bleiplättchens S zwischen den Zählrohren in Fig. 11.

Tabelle VI zeigt als Beispiel das Resultat einer Messreihe, in der bei einer Messdauer von 28 h insgesamt 308 Koinzidenzen registriert wurden.

Tabelle VI.

(Int. der Ra-Quelle 173 mC, Achsendistanz der Messingzählrohre 6,0 cm)

An- ord- nung	Einzelst. $Z - Z_0$ (min^{-1})	Koinz. $K_{\text{beob.}}$ (h^{-1})	Koinz.- Unter- grund (h^{-1})	Zufäll. Koinz. (h^{-1})	Rest $K_{\text{kor.}}$ (h^{-1})	Koinz.-Rate R
B	1670	$10,6 \pm 0,8$	5,0	1,4	$4,2 \pm 0,8$	$(4,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-5}$
A	1150	$13,4 \pm 1,0$	5,0	0,8	$7,6 \pm 1,0$	$(11,0 \pm 1,5) \cdot 10^{-5}$
C	520	$5,9 \pm 1,2$	5,0	0,3	$0,6 \pm 1,2$	—

Während die Einzelstosszahl in Anordnung A — infolge der überwiegenden Emission der Compton-Streustrahlung in der Primärriichtung — nur zwei Drittel derjenigen von Anordnung B

beträgt, ist die Koinzidenzzahl in dieser Anordnung nach Subtraktion des Untergrunds fast doppelt so gross wie in der letzteren. Die Koinzidenzrate in Anordnung A ist fast dreimal so gross wie diejenige von Anordnung B.

In Tabelle VII ist das Ergebnis einer Messreihe wiedergegeben, bei welcher der effektive Raumwinkel fast dreimal kleiner war als bei der Messreihe von Tabelle VI.

Tabelle VII.

(Int. der Ra-Quelle 214 mC, Achsendistanz der Messingzählrohre 10,0 cm)

Anordnung	Einzelst. $Z - Z_0$ (min ⁻¹)	Koinz. $K_{\text{beob.}}$ (h ⁻¹)	Koinz.- Unter- grund (h ⁻¹)	Zufäll. Koinz. (h ⁻¹)	Rest $K_{\text{kor.}}$ (h ⁻¹)	Koinz.-Rate R
B	1000	$5,2 \pm 0,4$	$3,0 \pm 0,5$	0,9	$1,3 \pm 0,6$	—
A	920	$8,5 \pm 0,7$	$3,0 \pm 0,5$	0,8	$4,7 \pm 0,9$	$(9 \pm 2) \cdot 10^{-5}$

Aus den Tabellen VI und VII geht klar hervor, dass die Wahrscheinlichkeit einer Koinzidenzauslösung durch ein Quantenpaar der Annihilationsstrahlung in Anordnung A zumindest etwa dreimal grösser ist als in Anordnung B. Innerhalb der Messgenauigkeit ist die Koinzidenzrate in Anordnung A vom Raumwinkel unabhängig. Dadurch ist die Tatsache der kollinearen Emission der Annihilationsstrahlungs-Quanten auch hier bewiesen.

Das seltene Auftreten von Koinzidenzen auch in Anordnung B lässt sich durch die Bremsstrahlung der schnellen Comptonelektronen erklären (STAHEL und KETELAAR⁶⁰). Die Grösse der Koinzidenzrate in Anordnung A

$$R_A = 1 \cdot 10^{-4}$$

führt auf einen Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch die härtesten Ra- γ -Strahlen von $\sigma \sim 10^{-24}$ cm², in Übereinstimmung mit der Theorie.

§ 8. Zusammenfassung.

Zur Erklärung der Ergebnisse von Wilsonkammer-Untersuchungen ist von SKOBELZYN und STEPANOWA u. a. eine „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen angenommen worden. Im Gegensatz zur Voraussage der Diracschen Theorie sollte der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch Elektronen von einigen mc² Energie in Blei von der Grössenordnung 10^{-22} cm² sein; d. h. die β -Strahler sollten infolge Materialisation von kinetischer Energie der Zerfallselektronen (10^{-3} — 10^{-2}) Positronen pro Zerfall aussenden.

Um dies nachzuprüfen wird die von einer mit Blei, resp. Aluminium, bedeckten UX-Quelle ausgehende γ -Strahlung mit Koinzidenz-Zählrohren untersucht. (γ, γ)-Koinzidenzen werden in zwei verschiedenen geometrischen Anordnungen gemessen, um eine vom Absorber der β -Strahlen ausgehende Annihilationsstrahlung als Differenzeffekt nachweisen zu können. Es ergibt sich, dass die Zahl der beobachteten UX-Koinzidenzen die Zahl der zu erwartenden UZ-Koinzidenzen nicht übertrifft. *Ein durch Annihilationsstrahlung verursachter Effekt wird nicht beobachtet.* Dieses Resultat zeigt, dass UX_2 , wenn überhaupt, dann weniger als $1 \cdot 10^{-4}$ Positronen pro Zerfall emittiert, und dass der mittlere Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch schnelle UX_2 -Elektronen in Blei sicher kleiner als etwa $8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ ist. Der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch Elektronen von einigen mc^2 Energie kann im Mittel den theoretisch berechneten Wirkungsquerschnitt keinesfalls um mehrere Zehnerpotenzen übertreffen.

Die Ergebnisse der Untersuchung der γ -Strahlung des P^{32} (CHIEN-SHIUNG-WU) und des RaE (STAHEL und GUILLISSEN) werden diskutiert: Da keine von diesen β -Strahlern ausgehende Annihilationsstrahlung beobachtet worden ist, so ist eine Emission von $(10^{-3}—10^{-2}) e^+$ /Zerfall ebenfalls ausgeschlossen: P^{32} und RaE — wie UX_2 — emittieren, wenn überhaupt, so höchstens etwa $10^{-4} e^+$ /Zerfall. Für UX_2 und RaE wird dies durch Messungen mit dem β -Spektrographen verifiziert.

Die theoretische Voraussage der kollinearen Emission der Quantenpaare der Annihilationsstrahlung wird durch Versuche bestätigt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Scherrer möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein unermüdliches, förderndes Interesse herzlich danken. Dem Jubiläumsfonds der E.T.H. bin ich für die Überlassung von Mitteln zu grossem Dank verpflichtet.

Physikalisches Institut der E.T.H., Zürich.

Literaturverzeichnis:

- 1) SHULL, Phys. Rev. **61**, 198, 1942.
- 2) BLEULER, Helv. Phys. Acta **15**, 613, 1942.
- 3) HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936.
- 4) JAEGER und HULMI, Proc. Roy. Soc. **148**, 708, 1935.
- 5) ANDERSON und NEDDERMEYER, Int. Conf. on Physics, London 1934.
- 6) BHABHA, Proc. Roy. Soc. **152**, 559, 1935.
- 7) TISZA, Physik. Zeitschr. d. Sowjetunion **11**, 425, 1937.
- 8) ARLEY und MÖLLER, Det. Kgl. Danske Vid. Selskab. **15**, 9, 1938.
- 9) STREIB, FOWLER und LAURITSEN, Phys. Rev. **59**, 253, 1941.
- 10) OPPENHEIMER und SCHWINGER, Phys. Rev. **56**, 1066, 1939.
- 11) THOMAS, Phys. Rev. **58**, 714, 1940.
- 12) ELLIS, Proc. Roy. Soc. **143**, 350, 1933.
- 13) BERINGER und MONTGOMERY, Phys. Rev. **61**, 222, 1942.
- 14) THIBAUD, Comptes Rendus **197**, 915, 1933.
- 15) ALICHANOW und KOSADAEW, Zeitschr. f. Physik **90**, 249, 1934.
- 16) CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI, Proc. Roy. Soc. **144**, 235, 1934.
- 17) SKOBELZYN und STEPANOWA, Journ. de phys. **6**, 1, 1935.
- 18) DA SILVA, Ann. de phys. **11/12**, 504, 1939.
- 19) SIZOO und BARENDREGT, Physica **6**, 1085, 1939.
- 20) BARENDREGT und SIZOO, Physica **7**, 490, 1940.
- 21) SIZOO, BARENDREGT und GRIFFIOEN, Physica **7**, 860, 1940.
- 22) HEINE, Helv. Phys. Acta (1944).
- 23) BRADT, HEINE und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 491, 1943.
- 24) FEATHER und DUNWORTH, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34**, 435, 1938.
- 25) BRADT, GUILLISSEN und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **13**, 259, 1940.
- 26) HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122, 1940.
- 27) FEATHER und BRETSCHER, Proc. Roy. Soc. **165**, 530, 1938.
- 28) FEATHER und DUNWORTH, Proc. Roy. Soc. **168**, 566, 1938.
- 29) NORLING, Phys. Rev. **58**, 277, 1940.
- 30) v. DROSTE, Zeitschr. f. Physik **100**, 529, 1936.
- 31) DUNWORTH, Rev. Sci. Instr. **11**, 167, 1940.
- 32) GENTNER und SEGRÉ, Phys. Rev. **55**, 814, 1939.
- 33) BRADT und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 251, 1943.
- 34) SIZOO und COUMOU, Physica **3**, 921, 1936.
- 35) STAHEL und COUMOU, Physica **2**, 707, 1935.
- 36) STAHEL und KIPFER, Helv. Phys. Acta **9**, 492, 1936.
- 37) CHIEN-SHIUNG-WU, Phys. Rev. **59**, 481, 1941.
- 38) STAHEL und GUILLISSEN, Journ. de Phys. **1**, 12, 1940.
- 39) SIZOO, ELJKMANN und GROEN, Physica **6**, 1057, 1939.
- 40) KNIPP und UHLENBECK, Physica **3**, 425, 1936.
- 41) BETHE und HEITLER, Proc. Roy. Soc. **146**, 83, 1934.
- 42) FLAMMERSFELD, Zeitschr. f. Physik **112**, 727, 1939.
- 43) CRANE und HALPERN, Phys. Rev. **55**, 838, 1939.
- 44) FOWLER und SHEPPARD, Phys. Rev. **57**, 273, 1939.
- 45) SEN GUPTA, Proc. Phys. Soc. **51**, 355, 1939.

- 46) CHAMPION, Proc. Roy. Soc. **153**, 353, 1935.
 - 47) ZUBER, Helv. Phys. Acta **11**, 370, 1938.
 - 48) STAUB, Helv. Phys. Acta **9**, 306, 1936.
 - 49) FELDMEIER und COLLINS, Phys. Rev. **58**, 200, 1940.
 - 50) SKOBELZYN und STEPANOWA, Nature **137**, 272, 1936.
 - 51) CHAMPION und BARBER, Proc. Roy. Soc. **153**, 353, 1935.
 - 52) ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODA EW, Journ. de phys. **7**, 163, 1936.
 - 53) ALICHANOW und SPIWAK, Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion **11**, 351, 1937.
 - 54) BENEDETTI, Journ. de phys. **7**, 205, 1936.
 - 55) MONADJEMI, Journ. de phys. **8**, 347, 1937.
 - 56) SHINOHARA, Sc. Pap. Inst. of phys. and chem. Res. Tokyo **31**, 174, 1937.
 - 57) THIBAUD, CARTAN et COMPARAT, Quelques techniques actuelles en physique nucléaire, Paris 1938.
 - 58) KLEMPERER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **30**, 347, 1934.
 - 59) ALICHANOW, ALICHANIAN und ARZIMOWITSCH, Nature **137**, 703, 1936.
 - 60) STAHEL und KETELAAR, Journ. de phys. **7**, 379, 1936.
-

Kernreaktionen von Chlor mit Neutronen

von A. Gibert, F. Roggen und J. Rossel.

(24. I. 1944.)

Zusammenfassung. 1. Es werden die (n, p) - und (n, α) -Reaktionen von Chlor untersucht. Mit schnellen Neutronen erhält man eine grosse Zahl schwer identifizierbarer Protonen- und α -Teilchengruppen.

2. Die Energietönungen der (n, p) - und (n, α) -Reaktionen liegen unterhalb 1,16 MeV, woraus folgt, dass die Masse von Cl^{35} kleiner sein muss als 34,98053.

3. Der Prozess $\text{Cl}^{35}(n, p)\text{S}^{35}$ geht als einziger der untersuchten Reaktionen merklich auch mit langsamen Neutronen vor sich. Seine Energietönung beträgt $0,52 \pm 0,04$ MeV, sein Wirkungsquerschnitt $\frac{1}{4}$ desjenigen der Reaktion $\text{N}^{14}(n, p)\text{C}^{14}$.

4. Die mittlere Ionisationsarbeit in Chlor wurde für α -Teilchen bestimmt. Sie beträgt $23,5 \pm 1,2$ eV/Ionenpaar.

Einleitung.

Eine Untersuchung der (n, α) - und (n, p) -Reaktionen von Chlor schien aus zwei Gründen interessant: Erstens kann eine genaue Kenntnis der Energietönung des Prozesses $\text{Cl}^{35}(n, \alpha)\text{P}^{32}$ mit Hilfe der gut bekannten Masse von P^{32} einen Massenwert für Cl^{35} liefern, über den sich widersprechende Messresultate vorliegen. Zweitens war die Frage die, ob der Prozess $\text{Cl}^{35}(n, p)\text{S}^{35}$, der als einer der wenigen (n, p) -Reaktionen exotherm verläuft (vgl. S. 99), trotz des relativ hohen Potentialwalls von Chlor, mit langsamen Neutronen einen merklichen Wirkungsquerschnitt zeigt.

Die gegebene Methode für solche Untersuchungen besteht in der Verwendung einer Ionisationskammer, die das umzuwandelnde Element in Gasform enthält. Die vorliegende Arbeit wurde mit einer chlorefüllten Ionisationskammer und einem Proportionalverstärker ausgeführt. Zur Umwandlung des Chlors wurden Neutronen der (d, d) -Reaktion verwendet, einerseits mit der einheitlichen Energie 2,87 MeV, andererseits nach Verlangsamung in Paraffin.

Bei den betrachteten Reaktionen entstehen stark ionisierende Teilchen, Protonen oder α -Partikel und Restkerne. Die Zahl der bei einer Kernumwandlung entstehenden Ionen wird ermittelt; denn sie ist ein Mass für die zu bestimmende Gesamtenergie der gebildeten Teilchen. Um aber aus der gemessenen Ladung diese

Energie zu berechnen, muss die mittlere Ionisationsarbeit in Chlor bekannt sein, d. i. die Energie, die es im Mittel zur Bildung eines Ionenpaares braucht. Diese für Chlor bis jetzt nicht bekannte Grösse wurde gemessen. Die diesbezüglichen Versuche werden im zweiten Teil dieser Arbeit beschrieben. Im ersten Teil sind die Untersuchungen über die Chlorreaktionen dargestellt unter Vorwegnahme des Messergebnisses für die Ionisationsarbeit.

ERSTER TEIL.

Untersuchung der Kernreaktionen von Chlor.

A. Erwartete Reaktionen.

Chlor besitzt zwei stabile Isotope mit den Massenzahlen 35 und 37 und den prozentualen Häufigkeiten 75,4% und 24,6%. Die genauen Massenwerte wurden einerseits von japanischen Forschern¹⁾ massenspektrographisch bestimmt. Ihre Messungen werden unter Zugrundelegung neuerer Werte für H^1 und C^{12} von MATTAUCH und FLÜGGE im Isotopenbericht 1940²⁾ und in ihren kernphysikalischen Tabellen (1942)³⁾ übernommen:

$$Cl^{35}: 34, 97884 \pm 0,00019$$

$$Cl^{37}: 36, 97770 \pm 0,00009.$$

Im Gegensatz dazu stehen Massenbestimmungen, die auf älteren massenspektrographischen und auf kernphysikalischen Messungen beruhen. So beträgt die von ASTON⁴⁾ spektrographisch bestimmte Masse von Cl^{35} , nach Neuberechnung durch MATTAUCH und FLÜGGE:

$$Cl^{35}: 34, 9810 \pm 0,0007.$$

Aus der von BRASEFIELD und POLLARD⁵⁾ gemessenen Energietönung von — 2,1 MeV des Prozesses $S^{32}(\alpha, p) Cl^{35}$ ergibt sich ein Massenwert:

$$Cl^{35}: 34, 9805 \pm 0,0003.$$

Aus der Energietönung von 9,1 MeV für den Prozess $Cl^{35}(d, \alpha) S^{33}$, wie sie von SHRADER und POLLARD⁶⁾ gemessen wurde, folgt

$$Cl^{35}: 34, 98093 \pm 0,00033.$$

Auf diese Arbeiten stützen MATTAUCH und FLÜGGE⁷⁾ ihre Angabe im Isotopenbericht 1941; sie führen als sichersten Wert an:

$$Cl^{35}: 34, 9807 \pm 0,0002.$$

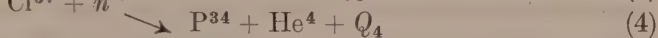
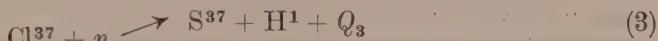
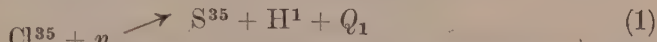
Eine weitere Massenbestimmung liegt vor von POLLARD⁸⁾ aus Untersuchungen von (d, p) - und (d, α) -Reaktionen. Er findet:

$$\text{Cl}^{35}: 34, 98107$$

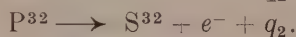
$$\text{Cl}^{37}: 36, 97829.$$

Aus diesen Angaben geht die schon erwähnte Tatsache hervor, dass der Wert der Chlormasse noch keineswegs gesichert ist, und dass insbesondere die aus kernphysikalischen Messungen gewonnenen Daten wesentlich höher sind als der neueste massenspektrographisch bestimmte Wert.

Prinzipiell können in der Ionisationskammer folgende 4 Reaktionen registriert werden:



Von den entstehenden Elementen sind die Elektronenstrahler S^{35} und P^{32} bekannt. Sie zerfallen auf folgende Weise:



S^{35} besitzt eine Halbwertszeit von 88 Tagen⁹⁾-¹³⁾. (Dass diese schon lange bekannte Periode wirklich dem S^{35} und nicht S^{37} zuzuordnen ist, wurde von KAMEN¹³⁾ gezeigt.) Das β -Spektrum ist von LIBBY und LEE¹⁰⁾ magnetisch ausgemessen worden. Die obere Grenze des Spektrums beträgt

$$q_1 = 0,107 \pm 0,020 \text{ MeV.}$$

Es besteht nun ja bei jedem (n, p) -Prozess die Beziehung, dass die Summe von Energietönung der Reaktion und oberer Grenze des β -Spektrums des nachfolgenden radioaktiven Zerfalls (der zum Ursprungselement zurückführt) gleich der in Energie ausgedrückten Massendifferenz von Neutron und Wasserstoffatom ist. Im vorliegenden Fall gilt also:

$$Q_1 + q_1 = (n^1 - \text{H}^1) = 0,758 \text{ MeV}; \quad Q_1 = 0,758 \text{ MeV} - q_1.$$

Mit dem angeführten Wert von $0,107 \pm 0,020 \text{ MeV}$ für die obere Grenze des β -Spektrums von S^{35} erhält man als zu erwartende Energietönung des Prozesses $\text{Cl}^{35} (n, p) \text{S}^{35}$:

$$Q_1 = 0,650 \pm 0,020 \text{ MeV.}$$

Diese Reaktion kann energetisch also auch mit langsamen Neutronen vor sich gehen. Während aber O'NEAL¹²⁾ die 88-tägige Periode von S^{35} nur mit schnellen Neutronen erregen konnte, fand KAMEN¹³⁾ eine starke Wirkung von thermischen Neutronen.

Vom Phosphorisotop P^{32} sind Masse, Halbwertszeit und β -Spektrum gut bekannt³⁾. Aus dem Massenwert $P^{32}: 31,98437$ berechnet man folgende Energietönung des $Cl^{35}(n, \alpha)$ -Prozesses, je nach der verwendeten Chlormasse:

$$Q_2 = -0,414 \text{ MeV, Cl-Masse nach OKUDA u. a.}^{1)}$$

$$Q_2 = 1,66 \text{ MeV, Cl-Masse nach POLLARD}^{8)}$$

$$Q_2 = 1,32 \text{ MeV, Cl-Masse nach Isotopenbericht 1941}^{7)}.$$

Die Halbwertszeit von P^{32} beträgt 14,3 Tage, die obere Grenze des β -Spektrums 1,72 MeV. Der Prozess $Cl^{35}(n, \alpha) P^{32}$ scheint mit langsamen Neutronen nicht merklich aufzutreten¹⁴⁾. Diese Tatsache braucht aber nicht zu bedeuten, dass der Prozess wirklich endotherm verläuft; es kann sein, dass er mit langsamen Neutronen wegen des relativ hohen Potentialwalls nur sehr unwahrscheinlich ist.

Im Gegensatz zu S^{35} und P^{32} sind die aus dem schweren Chlorisotop entstehenden radioaktiven Körper S^{37} und P^{34} nicht bekannt. HUBER, LIENHARD und WÄFFLER¹⁵⁾ haben jedoch gefunden, dass mindestens einer davon nur unter der Einwirkung energiereicher Neutronen der Ra-Be-Quelle, nicht aber durch $d-d$ -Neutronen mit 2,87 MeV entsteht und eine Periode von 14,7 sec besitzt.

Zusammenfassend kann man somit sagen, dass von den vier betrachteten Reaktionen höchstens drei mit $d-d$ -Neutronen und mindestens eine mit langsamen Neutronen energetisch möglich sind.

B. Apparatur.

1. Füllgas.

Bei der Wahl des Füllgases mussten folgende Bedingungen berücksichtigt werden. Das Gas soll, wenn möglich bei Zimmertemperatur, einen Druck von einigen Atmosphären besitzen; es darf keinen Wasserstoff enthalten, da sonst störende Rückstossprotonen auftreten und schliesslich sollte sein chemisches Verhalten nicht allzu aktiv sein. Es gibt jedoch keinen Stoff, der alle Bedingungen erfüllt; in Betracht kamen Tetrachlorkohlenstoff (CCl_4), Phosgen ($COCl_2$) und Chlor selbst. Tetrachlorkohlenstoff hätte eine Temperatur der Ionisationskammer von ungefähr 200°C

notwendig gemacht, wodurch Schwierigkeiten bei der Isolation und der Dichtung aufgetreten wären. Phosgen besitzt neben einem niedrigen Dampfdruck eine beträchtliche chemische Aktivität und eine sehr grosse Giftigkeit und bot somit keine entscheidenden Vorteile. Aus diesen Gründen wurde Chlor gewählt, wobei die grosse Reaktionsfähigkeit dieses Gases in Kauf zu nehmen war. Dafür besitzt Chlor den Vorteil eines bei Zimmertemperatur genügend hohen Dampfdruckes (ca. 6 Atm.). Das Chlor stammte aus Bomben, wo es in flüssigem Zustand aufbewahrt wurde*). Die Zusammensetzung des Bombeninhaltes wurde von der Herstellerfirma wie folgt angegeben:

Chlor	99,5 Vol%
CO ₂	0,4 „
Luft	0,1 „

2. Ionisationskammer.

Anfängliche Schwierigkeiten bereitete der einwandfreie Betrieb einer chloregefüllten Ionisationskammer. Von Auge kaum sichtbare Veränderungen an Isolationen oder auf den Elektroden, insbeson-

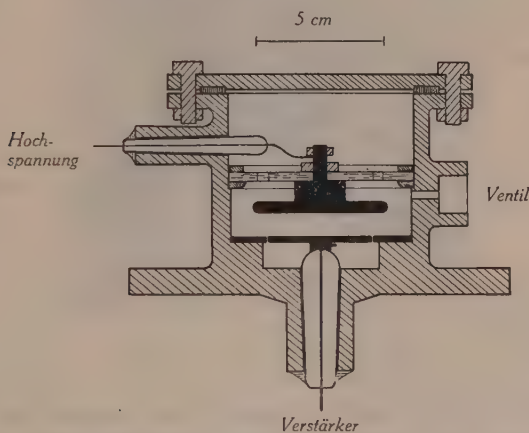


Fig. 1.

Ionisationskammer im Schnitt.

dere die Bildung von Spuren flüssiger Chlorverbindungen können bei der Empfindlichkeit der Anordnung grosse Störungen verursachen. Die Konstruktion, die nach vielen Vorversuchen schliesslich gewählt wurde und sich gut bewährt hat, ist in Fig. 1 darge-

*) Wir danken der Firma Ciba, Gesellschaft für chemische Industrie, in Basel für die freundliche Überlassung von Chlor.

stellt. Sie besteht in einem Schutzringkondensator, der in ein druckfestes Gehäuse eingebaut ist. Als Kammer- und Elektrodenmaterial erwies sich sorgfältig verchromtes Eisen als vorteilhaft. Die Hauptbedingung ist dabei, dass das Eisen sehr gut poliert wird und keine Poren aufweist und dass auch die Chromschicht möglichst kompakt und auf Hochglanz poliert ist. Trotzdem wurde das Chrom punktweise angegriffen unter Bildung feinsten, grünlicher Tröpfchen, was allerdings jeweils erst nach mehrwöchigem Betrieb zu Störungen führte und eine Reinigung der Kammer notwendig

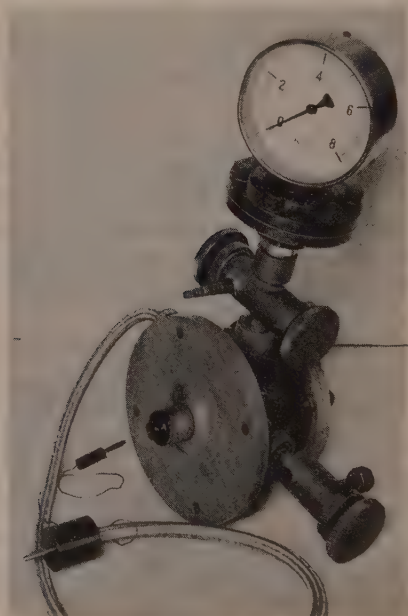


Fig. 1a.
Ionisationskammer für Chlor.

machte. Als Isoliermaterialien konnten keine organischen Stoffe verwendet werden. Kunstharze, Pizein, Hartgummi und Paraffin werden in Chlor in kurzer Zeit leitend, ebenso Porzellan; es bewährten sich einzig Glas und Quarz mit ganz glatter Oberfläche. Deswegen wurden als Halterung der Hochspannungselektrode eine Glasplatte, für diejenige der Auffängerelektrode und für die elektrische Durchführung Glasschliffe mit eingeschmolzenem Durandraht verwendet. Die Glasplatte wird mit Hilfe eines Schraubenringes fixiert. Die Hochspannungselektrode ist an der Glasplatte festgeschraubt. Der Abstand der beiden Elektroden kann zur Berechnung der Kapazität

genau ausgemessen werden. Die Glasschliffe sind von innen eingesetzt, da sie einen Überdruck von mehreren Atmosphären aushalten müssen, und mit wenig Pizein eingekittet. So kann nur ein schmaler Streifen des Pizeins zwischen Glas und Metall vom Chlor angegriffen werden, während es in den mittleren und äusseren Partien des Schliffes geschützt ist. Der Deckel der Kammer sowie die Druckventile sind ausschliesslich mit Bleiringen gedichtet, die sich an den dem Chlor ausgesetzten Stellen nur mit einer harmlosen Schicht weissen Bleichlorids überziehen.

Zur Messung des Chlordrucks wurde ein Plattenmanometer gebraucht, das direkt an die Kammer angeschraubt war. Das Innere wurde verchromt, doch war es nicht möglich, diese Schutzschicht überall genügend kompakt zu machen. Dadurch bildeten sich anfänglich grosse Verunreinigungen von Eisenchlorid, wobei so viel Chlor verbraucht wurde, dass der Druck in der Kammer fortwährend abnahm. Aus diesem Grunde wurde zwischen Ionisationskammer und Manometer ein Doppelventil eingefügt. Dieses gestattet einerseits, nach der Druckmessung das Manometer gegen die Kammer abzuschliessen und zu evakuieren, anderseits bei der Füllung einen Strom von Chlor durch die Kammer zu pressen. Zur Kontrolle des Druckes wurde die Verbindung mit dem gut evakuierten Manometer wieder hergestellt; aus dem sich einstellenden Druck und dem bekannten Volumenverhältnis von Kammer und Manometer kann der ursprüngliche Druck in der Kammer berechnet werden. Es zeigte sich, dass der Druck in der abgeschlossenen Kammer während mehreren Wochen praktisch konstant blieb, ein Zeichen dafür, dass sich keine wesentlichen chemischen Reaktionen mehr abspielten.

Die Hochspannung (bis 11000 Volt) wird durch ein abgeschirmtes Kabel zugeführt. Die Lötstelle zwischen Kabel und Durandraht befindet sich in der Achse eines an die Kammer angeschraubten Rohrstückes, welches zur Vermeidung von Überschlägen mit Pizein ausgefüllt ist. Im Innern der Kammer ist der Durandraht an die Hochspannungselektrode angeschraubt, da Lötstellen dem Chlor nicht standhalten.

3. Füllung der Ionisationskammer.

Bei der Füllung der Ionisationskammer ist zu berücksichtigen, dass sowohl die Kammer als auch das Gas möglichst trocken sein müssen, da Spuren von Feuchtigkeit dem Chlor eine viel grössere Reaktionsfähigkeit verleihen. Es erwies sich jedoch als überflüssig,

das aus der Bombe kommende Chlor zu trocknen. Die Kammer wurde vor dem Füllen längere Zeit evakuiert. Das Durchblasen von Heissluft verbesserte das Resultat nicht. Eine Ausheizung der Kammer bei höherer Temperatur verbot sich mit Rücksicht auf die pizeinierten Glasschliffe. Dadurch, dass alle dem Chlor ausgesetzten Oberflächen möglichst glatt gemacht werden, wird auch eine eventuell anhaftende Wasserhaut verkleinert.

Für die vorliegende Arbeit ist es wichtig, den Gehalt des Füllgases an Stickstoff zu kennen. Stickstoff ist die einzige Beimengung, welche mit den verwendeten Neutronen Kernreaktionen ausführt. Wie sich zeigen wird, fällt die Energietönung einer Chlorreaktion fast genau mit derjenigen einer Stickstoffreaktion zusammen, so dass zuerst eine Verunreinigung der Kammer mit Stickstoff vermutet wurde. Die Bestimmung des Fremdgasgehaltes des in der Ionisationskammer befindlichen Chlors bewies jedoch eindeutig, dass es sich um eine Kernumwandlung von Chlor handelt.

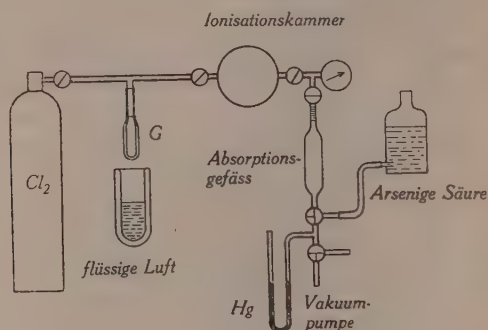


Fig. 2.

Einrichtung zur Füllung der Ionisationskammer mit Cl_2 .

Fig. 2 gibt eine schematische Darstellung der Füllanordnung. Im dickwandigen Glasgefäß G werden einige cm^3 flüssiges Chlor ausgefroren, wodurch die in der Bombe enthaltenen öligen Verunreinigungen niedergeschlagen werden. Durch langsames Verdampfen wird die Ionisationskammer und das angeschlossene Absorptionsgefäß gründlich mit Chlor gespült und die Kammer schliesslich mit ca. 5 Atm. Cl_2 gefüllt. Im Absorptionsgefäß kann mit Hilfe von arseniger Säure als Absorptionsflüssigkeit¹⁶⁾ der Gehalt des Chlores an Fremdgasen festgestellt werden; er betrug 0,6%. Dieser Wert ist nur unbedeutend höher als der von der Ciba angegebene (vgl. S. 101). Aus diesen beiden Angaben kann mit Sicherheit geschlossen werden, dass der Gehalt an Stickstoff in der Ionisationskammer nicht mehr als 0,2% ausmachte. Zur Kontrolle ist nach

der Ausführung mehrerer Messungen mit Neutronen der Inhalt der Ionisationskammer nochmals in analoger Weise auf Fremdgase geprüft worden. Dabei konnte das oben angeführte Ergebnis bestätigt werden.

4. Linearer Verstärker.

Der verwendete 5-stufige lineare Verstärker ist in einer Arbeit von HUBER¹⁷⁾ beschrieben worden. Ein Messinggehäuse, das direkt an die Ionisationskammer angeschraubt wird, enthält die erste Röhre, eine Triode RE 134. Diese wird mit 2 Volt Heiz- und 12 Volt Anodenspannung betrieben. Ihr Gitter ist frei und direkt mit der Auffängerelektrode der Ionisationskammer verbunden. Die Endstufe des Verstärkers betreibt einen Schleifenzosillographen, dessen Lichtzeigerausschläge auf einem Papierfilm registriert werden. Die Eichung des Verstärkers erfolgt dadurch, dass man durch Anlegen genau bekannter Spannungsstöße zwischen Hochspannungsplatte und Erde eine leicht berechenbare Influenzladung auf die Auffängerelektrode bringt und die entstehenden Ausschläge misst. Diese Eichungen werden für jeden Messfilm mehrmals ausgeführt, um Schwankungen in der Empfindlichkeit des Verstärkers bei der Auswertung berücksichtigen zu können. Während des Ausschaltens der Hochspannung vor der Ausführung der Eichung muss die Auffängerplatte geerdet werden, wodurch man eine unter Umständen unerwünschte negative Aufladung dieser Elektrode vermeidet.

5. Neutronenquelle.

Auch die zur Erzeugung der Neutronen verwendete Apparatur ist verschiedentlich beschrieben worden¹⁷⁾¹⁸⁾.

Ein Kanalstrahl von schwerem Wasserstoff, der eine Beschleunigungsspannung von 130 kV durchläuft und eine Stromstärke von maximal 60 μ A besitzt, trifft auf eine Schicht von schwerem Eis. Hierbei erfolgt u. a. der Neutronen liefernde Prozess $\text{H}^2(\text{H}^2, n)\text{He}^3$. Aus neuern Messungen¹⁹⁾ über die Energietönung dieser Reaktion (3,31 MeV) berechnet man die maximale Energie der Neutronen zu 2,87 MeV. Bei 50 μ A Deutonenstrom beträgt die Gesamtzahl der pro sec erzeugten Neutronen ungefähr $2,5 \cdot 10^7$.

C. Messungen und Ergebnisse.

Ionisationskammer und linearer Verstärker wurden mehrmals geprüft durch Messung der Energietönung der (n, p) -Reaktion von Stickstoff mit langsamen Neutronen. Die Übereinstimmung unserer Resultate mit dem gut bekannten Wert²⁰⁾ $Q = 0,55 \pm 0,03$ MeV war sehr zufriedenstellend.

1. Messungen mit schnellen Neutronen*).

Die Ionisationskammer wurde mit 3—5 Atm. Chlor gefüllt. Ihr minimaler Abstand von der Zertrümmerungssubstanz betrug 22,5 cm. Die Neutronen traten dann unter dem Winkel $\Theta = 0^\circ \pm \pm 5,5^\circ$ gegen die Richtung des Deutonenstrahles in das Zählvolumen der Kammer ein. Unter diesen Umständen hatte die Neutronenenergie, wie schon erwähnt, den Wert 2,87 MeV. Die durch den genannten Winkelbereich bewirkte Variation der Neutronenenergie macht weniger als 0,1% aus. Ebenso sind kleine Schwankungen der Beschleunigungsspannung zu vernachlässigen.

Das in der Kammer zur Sammlung der entstehenden Ionen angelegte Feld betrug 6200—9100 V/cm. Bei einer Änderung der Feldstärke in diesem Bereich war keine Verschiebung der Ausschlagsstatistik festzustellen, was beweist, dass Sättigung vorhanden war.

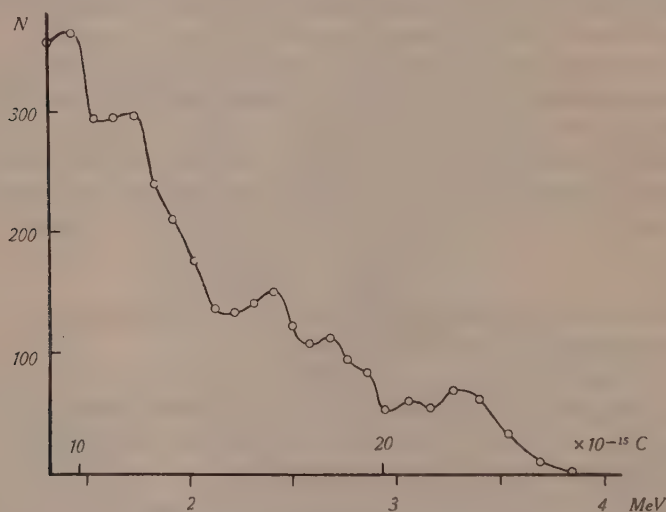


Fig. 3.

Messung mit schnellen Neutronen.

Zahl der Reaktionen in Funktion der entstehenden Ladung Q bzw. der Energie:
 $E = Q/e \cdot 23,5 \text{ eV}.$

Die Stelle $E = 2,87 \text{ MeV}$ entspricht der Energietönung 0.

Fig. 3 zeigt als Beispiel das Ergebnis einer Messung von 50 Minuten Dauer. Die registrierten Ausschläge wurden in Intervalle von 1 mm Breite eingeteilt, beginnend mit einer minimalen Länge von

*) Diese unveröffentlichten Resultate wurden uns von J. ROSSEL und A. SÜSTRUNK vom hiesigen Institut freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

6 mm. Die Abszisse der Messpunkte gibt die Ladung, die mit Hilfe der Eichkurve der mittleren Ausschlagslänge in einem Intervall entspricht, die Ordinate die Zahl der Ausschläge, welche in dieses Intervall fallen. Ausser der gemessenen Ladung ist auch die entsprechende Energie angegeben, die unter Verwendung des Wertes $J_{\text{Cl}} = 23,5 \text{ eV/Ionenpaar}$ für die Ionisationsarbeit in Chlor berechnet wurde, wie er im zweiten Teil dieser Arbeit bestimmt wird (vgl. S. 125). Die Kurve gibt nur den oberen Teil des Energiespektrums wieder, doch zeigt die Ausschlagsverteilung auch im gesondert untersuchten Gebiet kleiner Energien denselben auffallenden Charakter: eine mit zunehmender Energie im wesentlichen abnehmende Häufigkeit der Ausschläge, wobei dennoch eine grössere Anzahl (mindestens 12) mehr oder weniger ausgeprägter Maxima auftreten. Diese Maxima waren bei jeder der zahlreichen Messungen gut reproduzierbar und sind daher als Protonen- und α -Teilchen-Gruppen anzusprechen. Da, wie früher ausgeführt, nur 3 Reaktionen vor sich gehen können, müssen die meisten Maxima Umwandlungen zugeschrieben werden, die nicht in den Grundzustand, sondern — und zwar vornehmlich — in angeregte Zustände eines oder mehrerer der entsprechenden Kerne führen. Eine Zuordnung der verschiedenen Gruppen zu bestimmten Kernreaktionen ist angesichts der Kompliziertheit des Energiespektrums undurchführbar. Es kann einzig vermutet werden, dass das oberste Maximum bei 3,35 MeV von einer Protonengruppe herrührt, da diese dem Randeffect stark unterliegt, wodurch der flache Abfall dieses Maximums verständlich würde. Diese Vermutung wird auch durch die Messungen mit langsamen Neutronen wahrscheinlich gemacht.

In allen Messungen deutlich erkennbar ist die Existenz einer maximalen Energie. Nimmt man dafür den extrapolierten Wert des obersten Maximums, so erhält man $E_{\text{extr.}} = 3,73 \pm 0,30 \text{ MeV}$. In diesem Fehler sind die maximalen Fehler in der extrapolierten Ladung und in der Ionisationsarbeit enthalten. Die zu dem extrapolierten Wert gehörende Energietönung findet man durch Subtraktion der Neutronenenergie: $Q_{\text{extr.}} = 0,86 \pm 0,30 \text{ MeV}$. Die obere Schranke für die Energietönung sämtlicher (n, α) - und (n, p) -Prozesse von Chlor beträgt somit

$$Q_{\text{max}} = 1,16 \text{ MeV.}$$

Dieses Resultat wird uns eine obere Grenze für die Masse von Cl^{35} liefern (vgl. S. 116).

2. Messungen mit langsamen Neutronen.

Die Versuche mit schnellen Neutronen haben gezeigt, dass eine, eventuell mehrere Chlorreaktionen exotherm verlaufen. Die Bestimmung der Energietönung dieser Prozesse kann mit wesentlich grösserer absoluter Genauigkeit erfolgen, wenn die Umwandlung mit langsamen Neutronen ausgelöst wird. Deswegen wurde in längern Messungen die Wirkung langsamer Neutronen auf Chlor untersucht.

Fig. 4 zeigt die Anordnung der Ionisationskammer bei diesen Messungen. Eine 20 cm dicke Paraffinschicht bewirkt die Verlang-

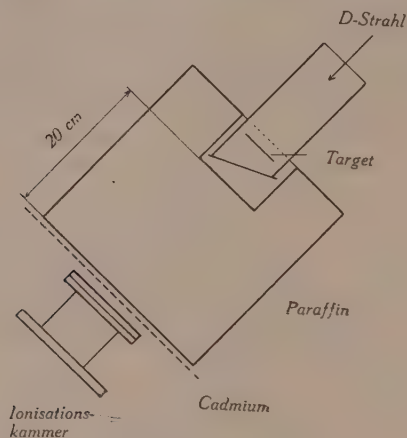


Fig. 4.

Anordnung der Ionisationskammer.

samung der *d-d*-Neutronen. Um die spezifische Wirkung der thermischen Neutronen zu beobachten, kann zwischen Paraffinblock und Ionisationskammer ein Cadmiumblech ($1\frac{1}{2}$ mm) eingeschoben werden, welches die thermischen Neutronen absorbiert. Die Differenz der Messungen ohne und mit Cd-Absorber gibt den Anteil an den Kernreaktionen, der vornehmlich den thermischen Neutronen zugeschrieben werden muss.

Fig. 5 zeigt das Resultat einer Messung bei einer mittleren Empfindlichkeit des Verstärkers. Die ausgezogene Kurve wurde ohne, die gestrichelte mit Cd-Absorber erhalten. Es zeigte sich sofort, dass nur ein einziges scharfes Maximum auftritt, welches bei ungefähr $3,6 \cdot 10^{-15}$ C liegt. Absorbiert man die thermischen Neutronen, so wird das Maximum stark verkleinert. Dieses kleine Maximum rührt z. T. noch von gestreuten Neutronen her, da die

Kammer nicht allseitig abgeschirmt war. Die Reaktion wird also in hohem Masse von thermischen Neutronen ausgelöst. Es werden aber auch Ausschläge registriert, die von der Wirkung schneller Neutronen herrühren müssen, da sie in beiden Kurven innerhalb der statistischen Schwankungen gleich häufig auftreten. So ist der steile Abfall bei $2,4 \cdot 10^{-15}$ C ausser durch den Untergrund besonders durch Rückstosskerne bedingt, deren maximale Energie man zu 0,31 MeV berechnet. Ferner finden sich über den ganzen Messbereich verteilte Ausschläge, die auf Kernreaktionen mit schnellen Neutronen zurückzuführen sind, und die vor allem oberhalb des

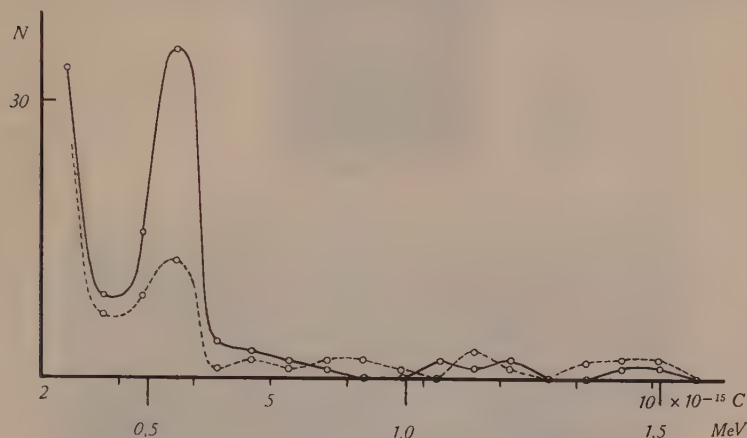


Fig. 5.

Messung mit langsamen Neutronen.

----- mit Cadmium-Absorber. ——— ohne Cadmium-Absorber.

Maximums deutlich in Erscheinung treten. Dass die beiden genannten Anteile an der Ausschlagstatistik von schnellen Neutronen verursacht werden, zeigte sich auch dadurch, dass sie in den ersten Messungen, bei welchen eine nur 12 cm dicke Paraffinschicht gebraucht wurde, bedeutend intensiver waren. Durch die Vergrößerung der Paraffinschicht auf 20 cm konnte zwar das Verhältnis der Anzahl der langsamen zu derjenigen der schnellen Neutronen erhöht, das Maximum also deutlicher hervorgehoben werden; dafür sank natürlich auch die absolute Intensität der langsamen Neutronen, und zwar etwa um einen Faktor 3. Es konnten dann pro Minute im Mittel nur 2 bis 5 dem Maximum zugehörige Ausschläge registriert werden, je nach Chlordruck und Deutonenstromstärke.

Um die Lage des Maximums auf der Energieskala genauer

bestimmen zu können, wurden Messungen mit grosser Empfindlichkeit des Verstärkers ausgeführt. Das Resultat eines Filmes ist in Fig. 6 aufgezeichnet. Es wurde dabei je 80 Minuten mit und ohne Cd-Absorber gemessen. Die Wirkung der thermischen Neutronen tritt sehr deutlich hervor. Fig. 7 zeigt Ausschnitte aus dem Registrierfilm. Das Maximum liegt hier etwas höher, bei einer Ladung von $3,7 \cdot 10^{-15}$ C, entsprechend einer Energietönung von 0,54 MeV.

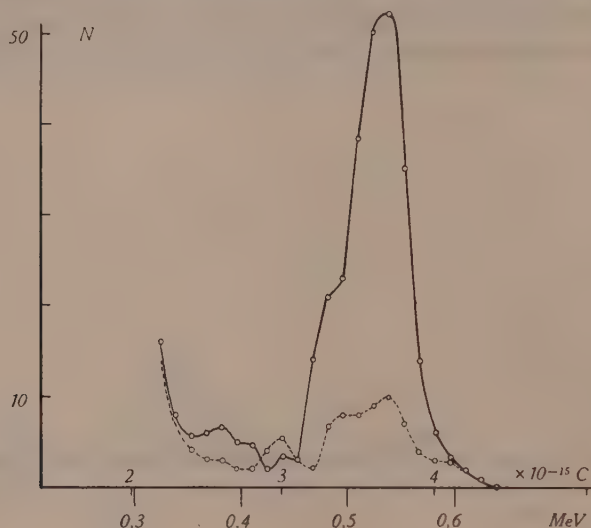


Fig. 6.

Messung mit langsamen Neutronen.

----- mit Cadmium-Absorber. ——— ohne Cadmium-Absorber.

Zur Sicherstellung der Energiemessung müssen auch der Einfluss des Randeffektes und der Rekombination der Ionen untersucht werden. Der erste kann vernachlässigt werden, da α -Teilchen und Protonen einer Energie von 0,52 MeV in Chlor von 3 Atm. eine Reichweite von nur 0,7 bzw. 1,6 mm besitzen. Die Rekombination wurde dadurch untersucht, dass die Lage des Maximums in Funktion der elektrischen Feldstärke und des Gasdruckes eingehend gemessen wurde. Insbesondere wurde eine Sättigungskurve aufgenommen bei variabler Spannung und dem konstanten Druck von 4 Atm. Sie ist in Fig. 8 dargestellt. Die meisten Punkte entsprechen einer Messdauer von 20 Minuten, einzig der Punkt bei 9000 Volt/cm wurde durch längere Messungen gewonnen und ist deshalb der am besten gesicherte. Man sieht, dass ungefähr von

6000 Volt/cm an die Sättigung erreicht ist, was mit dem früher gefundenen Resultat (vgl. S. 106) übereinstimmt. Auch eine Erniedrigung des Druckes auf 1,5 Atm. bei 9300 Volt/cm ergab keine Erhöhung der gemessenen Ladung mehr.

Zur endgültigen Energiebestimmung wurden 6 Messungen verwendet, die unter folgenden Bedingungen erhalten wurden:

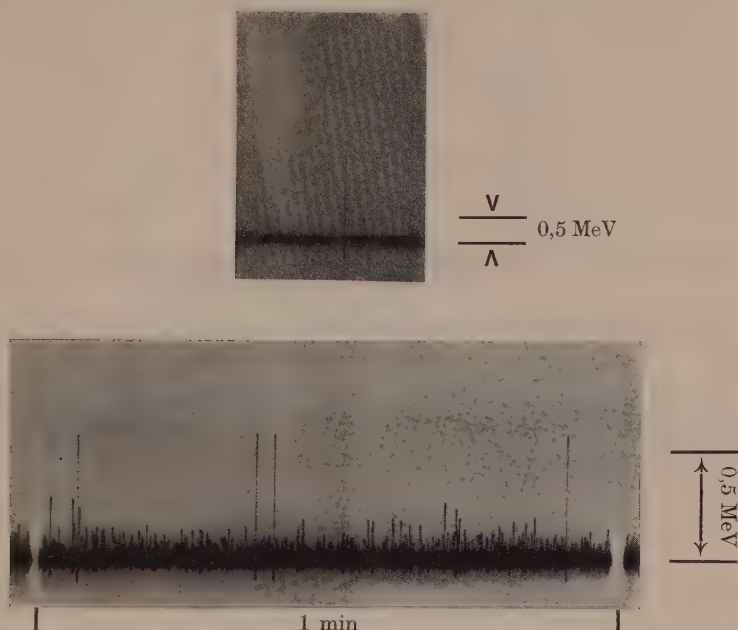


Fig. 7.

Ausschnitte aus dem Registrierfilm.
Messung mit langsamen Neutronen.

Druck 2,6 bis 4,0 Atm., Feldstärke: 9100 bis 11 600 Volt/cm. Eine Fälschung der Energiemessung durch Wiedervereinigung von Ionen ist daher ausgeschlossen. Die sechs Messungen ergaben gut übereinstimmende Werte für die Ladung; sie liegen alle im Bereich von $3,45 \cdot 10^{-15}$ bis $3,70 \cdot 10^{-15}$ C. Die Wirkung der schnellen Neutronen wurde nicht subtrahiert. In Fig. 9 ist die Summenkurve dieser Messungen dargestellt. Das Maximum liegt bei $3,55 \cdot 10^{-15}$ C. Die statistisch bedingten Unregelmässigkeiten der einzelnen Kurven heben sich bei der Summenbildung auf. Aus den 6 Teilmessungen wurde der mittlere Fehler berechnet; er beträgt $\pm 0,10 \cdot 10^{-15}$ C. Mit dem im zweiten Teil (vgl. S. 125) bestimmten Wert für die

Ionisationsarbeit von $23,5 \pm 1,2$ eV erhält man für die Energietönung der vorliegenden Reaktion:

$$Q = 0,52 \pm 0,04 \text{ MeV.}$$

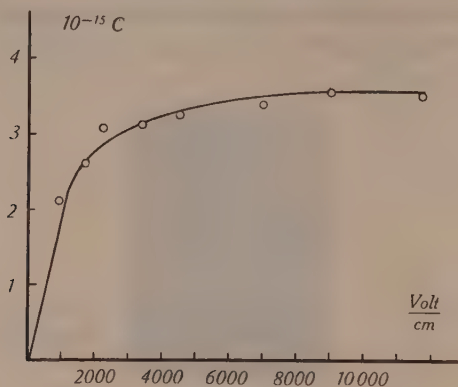


Fig. 8.

Sättigungskurve in Chlor.

Die Grösse dieser Reaktionsenergie fällt sehr nahe zu derjenigen der Stickstoffreaktion $N^{14}(n,p)C^{14}$, die $0,55 \pm 0,03$ MeV beträgt. Diese Tatsache erklärt folgendes Ergebnis: Nach einer Messung mit

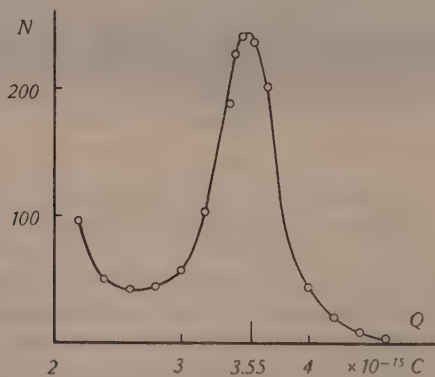


Fig. 9.

Chlorreaktion mit langsamen Neutronen.

Summe von 6 Messungen, Maximum bei $3,55 \cdot 10^{-15} C$, entspricht einer Energietönung von 0,52 MeV.

2,5 Atm. Chlor wurden noch 0,5 Atm. Stickstoff in die Ionisationskammer eingefüllt. Eine Messung von gleicher Dauer mit dem genannten Gemisch ergab dann nicht das Auftreten von zwei ge-

trennten Maxima, sondern es erhöhte sich lediglich die Fläche unter dem einzigen Maximum, d. h. die Zahl der Reaktionen, um einen Faktor 2, ohne genau feststellbare Formveränderung der Kurve. Dies bedeutet, dass der Wirkungsquerschnitt dieser Chlorreaktion etwa $\frac{1}{5}$ desjenigen der Stickstoffreaktion beträgt. Aus einer grösseren Anzahl von Chlormessungen und drei Messungen mit Stickstoff wurde die Zahl der pro μA Deutonenstrom, pro Atm. Gasdruck und pro Minute registrierten Kernreaktionen bestimmt. Es ergab sich:

$$\varrho_{Cl} = \frac{R_{Cl}}{i \cdot t \cdot p_{Cl}} = 0,025 \text{ } (\mu\text{A min Atm.})^{-1}$$

$$\varrho_N = \frac{R_N}{i \cdot t \cdot p_N} = 0,13 \text{ } (\mu\text{A min Atm.})^{-1}$$

Dabei bedeuten:

R_{Cl}, R_N = Zahl der zu dem Chlor- bzw. Stickstoff-Maximum gehörenden Reaktionen.

p_{Cl}, p_N = Chlor- bzw. Stickstoff-Druck in Atm. in der Ionisationskammer.

i = mittlerer Deutonenstrom in μA .

t = Messdauer in Minuten.

Daraus berechnet man den relativen Wirkungsquerschnitt der Chlorreaktion zur Reaktion $\text{N}^{14} (n, p) \text{C}^{14}$:

$$\frac{\sigma_{Cl}}{\sigma_N} = \frac{\varrho_{Cl}}{\varrho_N} = 0,19 \pm 0,04$$

Andere Protonen- oder α -Gruppen, die wegen einer sehr kleinen Intensität der Beobachtung entgangen sein könnten, sind natürlich nicht völlig auszuschliessen. Aus unsern Messungen geht jedoch hervor, dass eine Reaktion mit einer Energietönung von mehr als 0,6 MeV einen Wirkungsquerschnitt haben müsste, der mindestens 20mal kleiner wäre als der dem grossen Maximum entsprechende.

Zwar ist damit die Existenz einer exothermen Chlorreaktion sichergestellt, doch muss noch entschieden werden, ob es sich dabei um einen (n, α) - oder einen (n, p) -Prozess handelt. Eine Unterscheidung zwischen α - und p -Gruppen kann oft dadurch vorgenommen werden, dass man die Formveränderungen untersucht, denen die Maxima bei abnehmendem Druck in der Ionisationskammer infolge des Randeffectes unterliegen. Da Protonen eine bedeutend grössere Reichweite besitzen als α -Teilchen gleicher Energie, so bewirkt der Randeffect mit abnehmendem Druck zuerst eine Deformation der

Protonen-Maxima. Dieses Verfahren eignet sich im vorliegenden Fall nicht, da erstens wegen der kurzen Reichweite der Teilchen der Druck oder das Zählvolumen so klein gemacht werden müsste, dass die Zahl der Reaktionen viel zu gering würde, und zweitens die Vergleichsmöglichkeit zwischen zwei verschiedenen Maxima fehlt, so dass eine Entscheidung sehr unsicher würde. Bei der zur Verfügung stehenden Neutronenintensität ist auch die Untersuchung der Reaktion mit Hilfe der Wilsonkammer undurchführbar. Da aber mit langsamen Neutronen in der Messung mit der Ionisationskammer merklich nur eine einzige Reaktion auftritt, kann die Art dieses Prozesses durch Aktivitätsmessungen entschieden werden. In der Tat hat KAMEN¹³⁾ in der schon früher zitierten Arbeit festgestellt, dass der Prozess $\text{Cl}^{35}(n,p)\text{S}^{35}$ stark auf thermische Neutronen anspricht. Er hat zwei Gefäße mit CCl_4 , wovon eines ganz mit Cadmiumblech umgeben war, in Paraffin mit den Neutronen eines Cyclotrons bestrahlt und die entstehende Aktivität von S^{35} gemessen. Das abgeschirmte CCl_4 zeigte eine 6mal schwächere Aktivität als das unabgeschirmte. Gestützt auf dieses Ergebnis kann man den mit der Ionisationskammer gemessenen Prozess als die Reaktion $\text{Cl}^{35}(n,p)\text{S}^{35}$ identifizieren. Proton und Schwefelkern bekommen also eine Gesamtenergie von 0,52 MeV.

3. Aktivitätsmessungen.

Eigene Aktivitätsmessungen sind in Übereinstimmung mit den Resultaten von KAMEN. Zwei Zylinder aus gepresstem Kochsalz wurden in einem Paraffinblock symmetrisch zu einer Ra-Be-Neutronenquelle (50 mg Ra) angeordnet, wobei die minimale Schichtdicke an Paraffin zwischen Quelle und Kochsalz 5 cm betrug. Der eine Zylinder war ganz von Cadmium umgeben, so dass er nur der Wirkung schneller Neutronen unterlag. Nach einer Bestrahlungsdauer von $3\frac{1}{2}$ Monaten wurde die Aktivität des Kochsalzes gemessen. Messungen mit einem Al-Zählrohr von $\frac{1}{10}$ mm Wandstärke zeigten nach dem Abklingen der Perioden von Cl^{38} (37,5 min) und Na^{24} (14,8 h) eine Periode von 14 Tagen, die vom Phosphorisotop P^{32} herrührte. Diese Aktivität war bei den beiden Zylindern gleich stark, was beweist, dass die Reaktion $\text{Cl}^{35}(n,\alpha)\text{P}^{32}$ mit langsamen Neutronen nicht merklich auftritt. Um die sehr weiche β -Strahlung von S^{35} nachzuweisen, wurde der Phosphor und der Schwefel aus dem Kochsalz getrennt ausgefällt*) und ein sog.

*) Herrn Dr. JACOBI danken wir für die Ausführung der chemischen Trennung.

„screen wall counter“ benutzt. Dieses Zählrohr besitzt als Kathode ein Messingnetz, durch dessen Maschen die β -Teilchen ungehindert in das wirksame Volumen eintreten können. Es wird mitsamt dem zu untersuchenden Präparat in ein weiteres Rohr eingeschlossen, welches mit dem Alkohol-Luft-Gemisch gefüllt wird. Mit diesem Gitterzählrohr zeigten nun die aus dem NaCl gewonnenen Schwefelpräparate eine deutliche langperiodige Aktivität, die von S^{35} herühren muss, während eine solche mit Hilfe des erwähnten Al-Zählrohrs wegen der geringen Energie der β -Strahlung nicht nachzuweisen war. In der Tat werden 100 kV-Elektronen durch $1/10$ mm Al völlig absorbiert. Im Gegensatz zu den Phosphorpräparaten, die beide gleich intensiv waren, besass der aus dem nicht mit Cd abgeschirmten Kochsalz stammende Schwefelniederschlag eine etwa $2\frac{1}{2}$ mal grössere Aktivität als der aus dem abgeschirmten Kochsalz stammende. Dieser Unterschied ist auf die Wirkung der thermischen Neutronen zurückzuführen. Dass die Differenz nicht so deutlich in Erscheinung tritt wie bei den Messungen mit der Ionisationskammer, ist durch die Tatsache zu erklären, dass infolge der kleinern Paraffinschicht und der grössern Neutronenenergie die Zahl der schnellen Neutronen im Kochsalz relativ gross ist. Die Verstärkung der Aktivität von S^{35} durch langsame Neutronen könnte somit durch die Verwendung einer dickeren Paraffinschicht gesteigert werden, doch würde das gleichzeitig eine bedeutend intensivere Neutronenquelle erfordern. Der Versuch wurde daher nicht mehr wiederholt.

D. Diskussion.

1. Der Prozess $Cl^{35}(n,p)S^{35}$.

Als Energietönung dieses Prozesses erwartet man auf Grund des β -Spektrums von S^{35} :

$$Q = 0,650 \pm 0,020 \text{ MeV.}$$

In der Ionisationskammer wurde aber gemessen:

$$Q = 0,52 \pm 0,04 \text{ MeV.}$$

Die Diskrepanz zwischen diesen Werten, welche die Fehlergrenzen übersteigt, rechtfertigt folgende Annahme: Bei der Reaktion entsteht der Schwefelkern vorwiegend in einem angeregten Zustand, der $0,13 \pm 0,06$ MeV oberhalb des Grundzustandes liegt. Von diesem Niveau aus geht er unter Emission eines γ -Quants mit einer Energie von $0,13 \pm 0,06$ MeV in den Grundzustand über. In der Ionisationskammer wird nicht die volle Energietönung des Pro-

zesses gemessen, da das beobachtete Maximum der Entstehung eines angeregten Kernes entspricht, während das Maximum, das von der Bildung des unangeregten Kernes herrühren würde, infolge seiner Kleinheit der Beobachtung entgeht. Eine Abschätzung der γ -Strahlintensität zeigt, dass der direkte Nachweis der γ -Strahlung des angeregten S^{35} sehr schwierig wäre.

Überraschend ist die Tatsache, dass der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\text{Cl}^{35}(n,p)\text{S}^{35}$ nur 4mal kleiner ist als jener der analogen Reaktion $\text{N}^{14}(n,p)\text{C}^{14}$. Wäre das Verhältnis $\frac{\sigma_N}{\sigma_{Cl}}$ der beiden Wirkungsquerschnitte im wesentlichen durch die Durchlässigkeit der Potentialschwellen bedingt, so müsste es ungefähr den Wert 3000 haben. Berechnet man nämlich für Stickstoff und Chlor und die zugehörigen Protonenenergien die Höhe des Gamow-Berges B und den Gamow-Faktor G^{24} , so findet man die Werte:

$$\begin{array}{lll} B_N = 2,37 \text{ MeV}, & G_N = 12,7 \cdot 10^{-2}, & \frac{G_N}{G_{Cl}} = 3000. \\ B_{Cl} = 4,56 \text{ MeV}, & G_{Cl} = 4,1 \cdot 10^{-5}, & \end{array}$$

Die (n,p) -Reaktionen verlaufen im allgemeinen endotherm. Die Prozesse $\text{N}^{14}(n,p)\text{C}^{14}$ und $\text{Cl}^{35}(n,p)\text{S}^{35}$ sind die einzigen, welche auch mit langsamen Neutronen beobachtet worden sind. Nur wenige andere wären energetisch noch möglich, z. B. $\text{B}^{10}(n,p)\text{Be}^{10}$ und $\text{Zn}^{64}(n,p)\text{Cu}^{64}$.

2. Die Massen von Cl^{35} .

Die Protonengruppe der Reaktion $\text{Cl}^{35}(n,p)\text{S}^{35}$ tritt natürlich auch mit schnellen Neutronen auf. In Fig. 3 ist ihr wohl das oberste, flache Maximum zuzuordnen. Bei Berücksichtigung der Messfehler kann man jedoch nicht entscheiden, ob darin auch die der Entstehung des Grundzustandes entsprechende Gruppe und eventuell von andern Chlorreaktionen herrührende kleine Maxima enthalten sind. Wie früher angegeben (S. 107), liegen jedoch die Energietönungen sämtlicher Prozesse sicher unterhalb 1,16 MeV, entsprechend $1,25 \cdot 10^{-3}$ Masseinheiten*). Aus der Reaktionsgleichung (2) (S. 99) folgt daher für die Chlormasse:

$$\begin{array}{l} \text{Cl}^{35} < \text{P}^{32} + \alpha - n + 1,25 \cdot 10^{-3} \\ \text{Cl}^{35} < 31,98437 + 4,00386 - 1,00895 + 0,00125 = 34,98053 \\ \text{Cl}^{35} < 34,98053 \end{array}$$

*) Die einzige Veröffentlichung, die sich mit der Untersuchung der Chlorreaktionen in der Ionisationskammer befasst, stammt von NEMILOV²⁵⁾. Da uns die Resultate zu wenig ausführlich bekannt sind, müssen wir auf einen Vergleich mit unsern Ergebnissen verzichten.

Vergleicht man diese obere Schranke für die Masse von Cl^{35} mit den in Abschnitt I/A angegebenen Werten:

34,98107	POLLARD ⁸⁾
34,9807	Isotopenbericht 1941 ⁷⁾
34,97884	OKUDA u. a. ¹⁾³⁾ ,

so erkennt man, dass einzig der letztgenannte Wert, der von OKUDA und Mitarbeitern massenspektrographisch bestimmt wurde, die Schranke nicht übersteigt. Nach unsern Messungen wäre also dieser Massenwert zu bevorzugen.

Unter Annahme innerer Übereinstimmung der japanischen Messungen ist an Stelle des kernphysikalisch bestimmten Wertes von Cl^{37} : 36,97829 von POLLARD auch eher der von OKUDA u. a. gewonnene Wert Cl^{37} : 36,97770 als richtig anzusehen.

ZWEITER TEIL.

Bestimmung der Ionisationsarbeit in Chlor.

Da die mittlere Ionisationsarbeit in einem Gas für Protonen, α -Teilchen und Rückstosskerne denselben Wert hat, genügt es, die Bestimmung mit α -Teilchen auszuführen.

Das Prinzip der Messung ist folgendes: Zwischen die, einen Plattenkondensator bildenden Elektroden einer speziellen Ionisationskammer werden α -Teilchen geschossen. Es wird dann die Ionenmenge verglichen, die ein einzelnes α -Teilchen erzeugt, wenn die Kammer einmal mit Stickstoff und einmal mit Chlor gefüllt ist und das Verhältnis zwischen den α -Teilchen-Energien in beiden Fällen bekannt ist. Damit erhält man eine Vergleichsmessung mit dem gut bekannten Wert der Ionisationsarbeit in Stickstoff, der 35,0 eV pro Ionenpaar beträgt. Die Methode wurde an Sauerstoff und Argon geprüft; ferner wurde auch eine Absolutmessung an Stickstoff ausgeführt.

A. Apparatur.

Fig. 10 zeigt einen Querschnitt durch die Ionisationskammer, die für Atmosphären- oder Unterdruck berechnet ist. Das Gehäuse besteht aus Messing, die Elektroden aus Eisen. Beides ist sehr gut verchromt und poliert. Für die isolierenden Deckplatten wurde Glas verwendet, als Dichtungsmaterial Pizein. Ein Gehäuse mit der ersten Stufe des linearen Verstärkers wurde wieder direkt an

der Ionisationskammer befestigt (vgl. S. 105). Als α -Strahlenquelle diente Polonium, das auf einem kleinen Stück Silberfolie niedergeschlagen war. In den ersten Versuchen wurden die α -Teilchen von der Seite zwischen die Elektroden hineingeschossen. Wegen einer gewissen Unsicherheit in der seitlichen Begrenzung des Zählvolumens erwies es sich als vorteilhafter, die α -Teilchen durch einen dünnen Kanal aus der Hochspannungsplatte in den Zählraum gelangen zu lassen. Dieser Kanal, der eine Länge von 9 mm und einen Durchmesser von 0,5 mm besitzt, endet in einer kleinen Vertiefung auf der Rückseite der Hochspannungsplatte, gegen welche er durch eine Glimmer- oder Cellophanfolie von ca. 2 cm

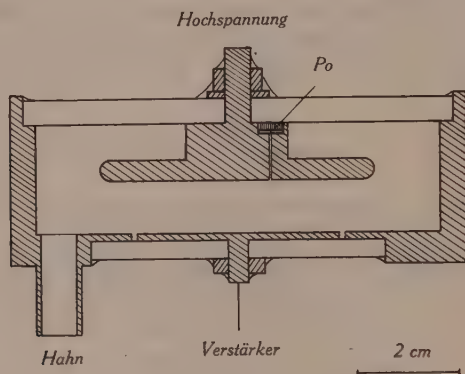


Fig. 10.

Ionisationskammer zur Messung der Ionisationsarbeit in Chlor.

Luftäquivalent abgeschlossen ist. Auf dieser Folie liegt noch eine Blende und darüber das Poloniumpräparat. Die Blende ist so bemessen, dass pro Minute ca. 80 α -Teilchen in das Zählvolumen eintreten. Die Oberseite der Vertiefung wurde mit Apiezon verschlossen. Der Abstand zwischen den Elektroden betrug 10,9 mm. Der durch die geometrischen Dimensionen von Blende und Kanal bedingte maximale Unterschied in den Reichweiten der einzelnen α -Teilchen macht nur etwa 0,1 % aus. Ein starkes elektrisches Feld von 2000—5000 Volt/cm sorgte dafür, dass alle von den α -Teilchen erzeugten Ionen gesammelt wurden.

B. Messungen.

1. Prüfung der Methode mit N_2 , O_2 und A .

Zuerst wurde eine Messung in Stickstoff ausgeführt. Bei einem Druck von 727 mm HgN_2 endeten die Reichweiten aller α -Teilchen

im Zählvolumen. Das Resultat der Messung ist in Fig. 11 dargestellt (Kurve N_2). Es ist wieder die Zahl der Ausschläge pro mm-Intervall in Funktion der zugehörigen Ladung aufgetragen. Die Kurve zeigt ein scharfes Maximum bei $7,35 \cdot 10^{-15} \text{ C}$, entsprechend einer am häufigsten auftretenden Reichweite. Die Breite der Kurve ist bedingt durch die infolge der Bremsung der α -Teilchen im Glimmer beträchtlich vergrößerten Reichweiteschwankung, ferner durch den Störpegel des Verstärkers.

Bei bekannter Energie der eintretenden α -Teilchen kann aus der Ladung der mittlere Energieaufwand pro Ionenpaar bestimmt werden. Die im Zählvolumen wirksame Energie wurde mit Hilfe

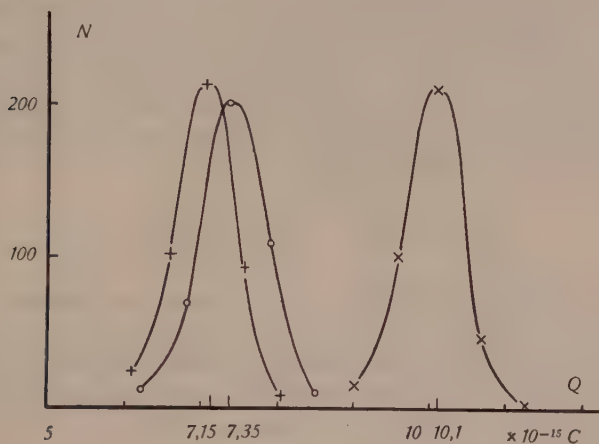


Fig. 11.

Bestimmung der Ionisationsarbeit in Sauerstoff und Argon mit Hilfe der Eichmessung in Stickstoff.

+ O_2 , o N_2 , x A

der Energie-Reichweitebeziehung von BETHE²¹⁾ aus der Restreichweite ermittelt, welche die α -Teilchen nach Durchsetzen der Glimmerfolie noch besaßen. Diese (extrapolierte) Reichweite wurde mit einem Spitzenzähler gemessen. Mit dem extrapolierten Wert der Ladung berechnete man für die Ionisationsarbeit in Stickstoff den Wert $J_N = 34 \text{ eV}$. Die genügende Übereinstimmung mit dem genauen Wert (35,0 eV) erwies das gute Funktionieren der Versuchseinrichtung. Um aber die Ungenauigkeiten in den Reichweitebestimmungen zu vermeiden, ging man in den folgenden Versuchen umgekehrt vor: Mit dem als Grundlage angenommenen Wert

$J_N = 35,0$ eV wurde aus der gemessenen Ladung Q_N die Energie der α -Teilchen berechnet:

$$E_{\text{eff}_N} = \frac{Q_N}{e} \cdot J_N = \frac{7,35 \cdot 10^{-15}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 35,0 = 1,61 \text{ MeV} \quad (1)$$

(e = Elektronenladung)

Auf diese Weise erhält man die im Zählvolumen wirksame Energie E_{eff} . Sie ist nun keine Konstante, sondern von Art und Druck des Gases abhängig, da schon im Kanal die Bremsung der α -Teilchen in dem betreffenden Gas erfolgt.

Es soll nun mit Hilfe des Messergebnisses in Stickstoff die wirksame Energie in einem andern Gas berechnet werden. Es sei R_0 die (unbekannte) Reichweite der α -Teilchen in cm nach dem Austritt aus der Glimmerfolie in Luft von 760 mm Hg und 15°C . Dann ist die für die Messung wirksame Reichweite im Zählvolumen, wenn die Kammer mit einem Gas (Index 1) gefüllt ist, aber auch ausgedrückt in cm Luftäquivalent:

$$R_{\text{eff}_1} = R_0 - d \cdot \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} \cdot s_1 \quad (2)$$

In dieser Gleichung bedeutet d die Länge des Kanals in cm: p_1 , T_1 , s_1 sind Druck in mm Hg, absolute Temperatur und Bremsvermögen (relativ zu Luft) des Gases, $p_0 = 760$ mm Hg, $T_0 = 288^\circ \text{K}$, die den Energie-Reichweitekurven von BETHE zugrundeliegenden Zustandsgrößen. Schreibt man dieselbe Gleichung noch für ein zweites Gas (Index 2) auf

$$R_{\text{eff}_2} = R_0 - d \cdot \frac{p_2}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_2} \cdot s_2$$

so kann R_0 eliminiert werden:

$$R_{\text{eff}_2} = R_{\text{eff}_1} - \frac{d \cdot T_0}{p_0} \cdot \left(\frac{p_1 \cdot s_1}{T_1} - \frac{p_2 \cdot s_2}{T_2} \right) \quad (3)$$

Diese Gleichung gestattet, bei bekannten p_i , T_i und s_i aus einer experimentell bestimmten wirksamen Reichweite in einem ersten Gas die wirksame Reichweite in einem zweiten Gas zu berechnen.

Gas 1 sei Stickstoff; dann kann nach Gleichung (1) aus der gemessenen Ladung die wirksame Energie berechnet werden.

$$E_{\text{eff}_1} = \frac{Q_1}{e} \cdot J_1 = 1,61 \text{ MeV}$$

Mit diesem Wert folgt aus der Energie-Reichweite-Kurve eine wirksame Reichweite in Stickstoff $R_{\text{eff}_1} = 0,845$ cm. Mit Hilfe von Gleichung (3) erhält man nun die wirksame Reichweite und daraus wieder die wirksame Energie für ein beliebiges anderes Gas 2. Andererseits misst man die in Gas 2 erzeugte Ladung Q_2 und kann so die gesuchte Ionisationsarbeit J_2 von Gas 2 berechnen:

$$J_2 = \frac{E_{\text{eff}_2} \cdot e}{Q_2}$$

Die Messung mit Stickstoff dient somit einfach als Eichung.

Wie schon gesagt, ist die Kenntnis des relativen Bremsvermögens der untersuchten Gase unerlässlich. Dieses ist für viele Stoffe, insbesondere Gase, experimentell bestimmt worden²¹⁾. Die Werte sind in Fig. 12 in Funktion der Kernladungszahl der Substanz eingetragen. Die hier speziell interessierenden Daten sind die folgenden:

$$N_2 : s = 0,98$$

$$O_2 : s = 1,08$$

$$A : s = 1,94$$

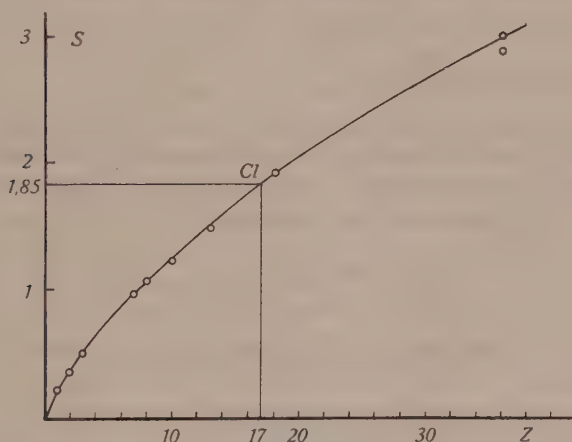


Fig. 12.

Relatives atomares Bremsvermögen für α -Teilchen in Funktion der Kernladung.
Interpolierter Wert für Chlor: $s = 1,85$.

Zwar wurden diese Ergebnisse mit α -Teilchen einer Energie von etwa 6 MeV gewonnen. Im Kanal unserer Ionisationskammer erleiden aber die α -Teilchen eine Bremsung von ca. 3 MeV auf ca. 1,5 MeV. Doch ist in diesem Bereich und bei den in Frage kommenden Kernen von Stickstoff bis Argon die Energieabhängigkeit des Bremsvermögens zu vernachlässigen²²⁾.

Damit können die Resultate aus Fig. 11 ausgewertet werden. Wir setzen im folgenden $T_0 = T_1 = T_2 = 288^\circ \text{K}$, da die Temperatur während der Messungen ziemlich genau 15°C betrug.

a) Ionisationsarbeit in Sauerstoff.

Aus der Eichung mit Stickstoff hatte sich ergeben (S. 121) $R_{\text{eff}_1} = 0,845 \text{ cm}$. Mit den Daten $p_1 = p_2 = 727 \text{ mm Hg}$, $s_1 = 0,98$ und $s_2 = 1,08$ berechnet man aus Gleichung (3) eine wirksame Reichweite in Sauerstoff $R_{\text{eff}_2} = 0,76 \text{ cm}$; dem entspricht eine wirk-same Energie $E_{\text{eff}_2} = 1,43 \text{ MeV}$. Andererseits entnimmt man der Messkurve mit Sauerstoff (Kurve O_2 in Fig. 11) eine pro α -Teilchen erzeugte Ladung $Q_2 = 7,15 \cdot 10^{-15} \text{ C}$. Für die Ionisationsarbeit in O_2 ergibt sich folglich

$$J_{\text{O}_2} = \frac{E_{\text{eff}_2} \cdot e}{Q_2} = 32,2 \text{ eV}$$

Die Übereinstimmung mit dem in der Literatur angegebenen Wert²³⁾ (32,3 eV) ist sehr gut. (In Sauerstoff wird eine kleinere Ladung registriert als in Stickstoff, trotz der kleineren Ionisationsarbeit, weil der Einfluss des grössern Bremsvermögens überwiegt.)

b) Ionisationsarbeit in Argon.

Mit den auf die Messung mit Argon bezüglichen Werten $s_3 = 0,97$, $p_3 = 725 \text{ mm Hg}$ erhält man $R_{\text{eff}_3} = 0,86 \text{ cm}$ und $E_{\text{eff}_3} = 1,64 \text{ MeV}$. Die Messung liefert $Q_3 = 10,1 \cdot 10^{-15} \text{ C}$. Daraus folgt für die Ionisationsarbeit in Argon:

$$J_{\text{A}} = \frac{E_{\text{eff}_3} \cdot e}{Q_3} = 26,0 \text{ eV}$$

Auch hier ist die Abweichung gegenüber dem besten Wert (25,4 eV) nur gering.

Die Messungen an Sauerstoff und Argon haben die verwendete Methode als sehr brauchbar erwiesen.

2. Bestimmung der Ionisationsarbeit in Chlor.

Die Messungen mit Chlor waren insofern etwas heikler, als das Poloniumpräparat der Einwirkung von Chlor nicht ganz entzogen war. Vor allem bildete sich aber nach einiger Zeit auf den Cellophan- und Glimmerfolien ein Niederschlag mikroskopischer Tröpfchen einer Chlorverbindung, welcher eine ungleichmässige Absorption der α -Teilchen und damit eine unzulässig starke Verbreiterung

ihres Energiespektrums zur Folge hatte. Dieser Einfluss war nur zu vernachlässigen, wenn die Füllung der Ionisationskammer mit Chlor, die Eichung des Verstärkers und die Messung innerhalb 10 Minuten durchgeführt werden konnten. Zur Sicherheit wurde die Vergleichsmessung mit Stickstoff sowohl vor als auch nach der Messung mit Chlor ausgeführt. Ebenso wurde der Druck des Chlors vor und nach der Messung festgestellt. Um die Benützung von Energie-Reichweite-Kurven umgehen zu können, wählte man die Drucke von Stickstoff und Chlor derart, dass der Klammerausdruck in Gl. (3) verschwindet. Damit werden die effektive Reichweite und folglich auch die wirksame Energie der α -Teilchen in Chlor und in Stickstoff gleich gross, und das Verhältnis der gemessenen Ionenmengen wird dann direkt gleich dem reziproken Verhältnis der beiden Ionisationsarbeiten.

Die Bedingung für das Verschwinden der Klammer in Gl. (3) lautet: (da wieder $T_0 = T_1 = T_2$ ist)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{s_1}{s_2}, \quad \begin{array}{ccccccc} p_1, s_1 & \text{Druck und relat. Bremsvermögen von } N_2 \\ p_2, s_2 & \text{,, ,, ,, ,, ,, ,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{Cl}_2 \end{array}$$

Nun ist zwar das Bremsvermögen von Chlor experimentell noch nicht bekannt. Doch kann man dank der monotonen Abhängigkeit des Bremsvermögens von der Kernladung, wie sie in Fig. 12 dargestellt ist, mit genügender Genauigkeit den interpolierten Wert für Chlor aus der Kurve entnehmen. Dies ist umso eher zulässig, als der direkt benachbarte Wert von Argon sehr gut bekannt ist. Als Grundlage für die Bestimmung der Ionisationsarbeit in Chlor dient im folgenden der Wert $s = 1,85$ für das Bremsvermögen für α -Teilchen von Chlor. Wie bei Argon kann die Energieabhängigkeit des Bremsvermögens vernachlässigt werden.

Zum Druck $p_1 = 725$ mm Hg muss nun nach der obigen Bedingung der Druck $p_2 = 386$ mm Hg gewählt werden.

In Fig. 13 ist das Resultat einer Messung dargestellt. Die Kurve rechts bezieht sich auf Chlor. Die ausgezogene der mit N bezeichneten Kurven wurde vor der Messung mit Chlor, die gestrichelte nachher aufgenommen. Als Vergleichspunkte dienen die Lagen der Maxima. Aus den Stickstoffkurven liest man eine mittlere Ladungsmenge pro α -Teilchen ab von

$$Q_1 = 6,4 \cdot 10^{-15} \text{ C,}$$

aus der Chlorkurve eine solche von

$$Q_2 = 9,7 \cdot 10^{-15} \text{ C.}$$

Somit erhält man als Ionisationsarbeit in Chlor

$$J_{Cl} = J_1 \cdot \frac{Q_1}{Q_2} = 35,0 \cdot \frac{6,4}{9,7} = 23,1 \text{ eV/Ionenpaar.}$$

Abschätzung der Messgenauigkeit:

- a) Die Schwankungen der Eichspannung und die Ungenauigkeit beim Zeichnen der Eichkurve ergeben einen Fehler in der Ladungsmessung von $\pm 0,02 \cdot 10^{-15} \text{ C}$.

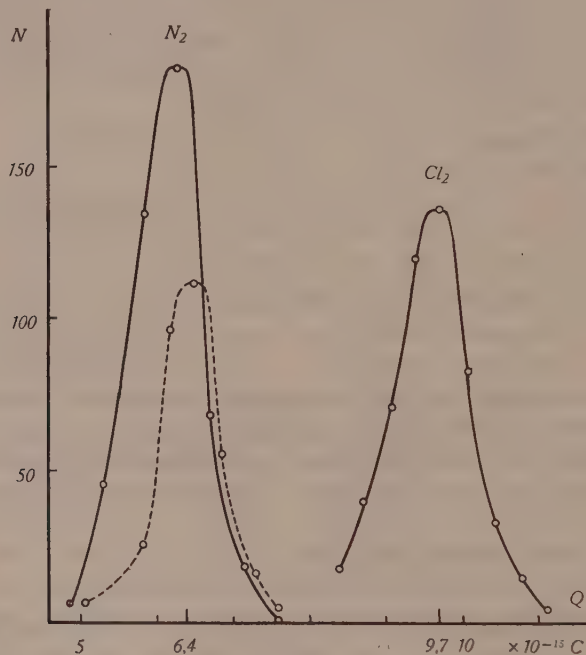


Fig. 13.

Bestimmung der Ionisationsarbeit in Chlor.

Ionisation von α -Teilchen gleicher Energie in Stickstoff und in Chlor.

- b) Die Einteilung der Ausschläge in Intervalle von $\frac{1}{2} \text{ mm}$ (wie sie bei dieser Messung vorgenommen wurde) bewirkt einen Fehler von $\pm 0,1 \cdot 10^{-15} \text{ C}$.
- c) Aus der Kurve kann die Lage des Maximums auf $\pm 0,05 \cdot 10^{-15} \text{ C}$ genau abgelesen werden.

Dies ergibt eine Ungenauigkeit für die Messung mit Stickstoff von $\pm 0,17 \cdot 10^{-15} \text{ C}$ oder $\pm 2,7\%$.

- d) Bei der Messung mit Chlor bewirkt die Ungenauigkeit von ± 2 mm Hg in der Einstellung des Druckes einen zusätzlichen Fehler von höchstens $\pm 0,05 \cdot 10^{-15}$ C.

Die in Chlor gemessene Ladung ist somit mit einem Fehler von $\pm 0,22 \cdot 10^{-15}$ C oder $\pm 2,3\%$ behaftet. Daraus folgt ein maximaler prozentualer Fehler in der mittleren Ionisationsarbeit in Chlor von $\pm 5\%$ oder ein absoluter von $\pm 1,2$ eV.

Es wurden drei Messungen ausgeführt, mit den Resultaten $J_{Cl} = 23,1, 23,2$ und $24,3$ eV. Der Mittelwert beträgt:

$$J_{Cl} = 23,5 \pm 1,2 \text{ eV pro Ionenpaar.}$$

Dieser Wert ist kleiner als er bei andern zweiatomigen Molekülen gefunden wird und liegt eher im Gebiet der Ionisationsarbeiten einatomiger Gase (z. B. A: 25,4, X: 20,7 eV). Während aber die mittlere Ionisationsarbeit in Edelgasen mit zunehmender Ordnungszahl wächst, existiert eine einfache Gesetzmässigkeit bei mehratomigen Gasen nicht, vielmehr sind individuelle Eigenschaften der Moleküle massgebend.

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. P. SCHERRER, danken wir herzlich für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Dem Aluminium-Fonds Neuhausen sind wir für die Überlassung von Mitteln zur Beschaffung von Apparaten zu Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ T. OKUDA, K. OGATA, K. AOKI und Y. SUGAWARA, Phys. Rev. **58**, 578, 1940.
- ²⁾ J. MATTAUCH und S. FLÜGGE, Physikal. Z. **42**, 1941.
- ³⁾ J. MATTAUCH und S. FLÜGGE, Kernphysikalische Tabellen, Berlin, 1942.
- ⁴⁾ F. W. ASTON, Proc. Roy. Soc. **163**, 391, 1937.
- ⁵⁾ C. J. BRASEFIELD und E. POLLARD, Phys. Rev. **50**, 296, 1936.
- ⁶⁾ E. F. SCHRADER und E. POLLARD, Phys. Rev. **59**, 277, 1941.
- ⁷⁾ J. MATTAUCH und S. FLÜGGE, Physikal. Z. **43**, 1, 1942.
- ⁸⁾ E. POLLARD, Phys. Rev. **57**, 1186, 1940.
- ⁹⁾ E. B. ANDERSEN, Z. phys. Chem. B **32**, 237, 1936.
- ¹⁰⁾ W. F. LIBBY und D. D. LEE, Phys. Rev. **55**, 245, 1939.
- ¹¹⁾ H. LEVI, Nature **145**, 571, 1940.
- ¹²⁾ R. D. O'NEAL, Phys. Rev. **59**, 109, 1941.
- ¹³⁾ M. D. KAMEN, Phys. Rev. **60**, 537, 1941.

- ¹⁴⁾ E. AMALDI, O. D'AGOSTINO, E. FERMI, B. PONTECORVO, F. RASETTI und E. SEGRÉ, Proc. Roy. Soc. **149**, 522, 1935.
 - ¹⁵⁾ O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta, XV, 314, 1942.
 - ¹⁶⁾ F. P. TREADWELL, Lehrbuch der analyt. Chemie, II. Bd., 11. Aufl., 713.
 - ¹⁷⁾ P. HUBER, Helv. Phys. Acta, XIV, 164, 1941.
 - ¹⁸⁾ E. BALDINGER, P. HUBER und H. STAUB, Helv. Phys. Acta, XI, 245, 1938.
 - ¹⁹⁾ T. W. BONNER, Phys. Rev. **59**, 239, 1941.
 - ²⁰⁾ O. HUBER, P. HUBER und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta, XIII, 209, 1940.
 - ²¹⁾ M. S. LIVINGSTON und H. A. BETHE, Rev. mod. Physic, **9**, 268, 1937.
 - ²²⁾ GUERNEY, Proc. Roy. Soc. **107**, 340, 1925.
GIBSON und EYRING, Phys. Rev. **30**, 54, 1927.
 - ²³⁾ E. RUTHERFORD, Radiations from Radioact. Subst. **81**, 1930.
 - ²⁴⁾ Siehe ²¹⁾, S. 163 und ³⁾, S. 59.
 - ²⁵⁾ J. NEMILOV, Journ. exp. theoret. Phys. (russ.) **9**, 1029, 1939; Physikal. Berichte 1940, 2152.
-

Die gerade Empfangsantenne

Ableitung einer Näherungsformel für den Antennenstrom

von **Josef Müller-Strobel** und **Jean Patry**, Zürich.

(11. I. 1944.)

Zusammenfassung. Auf Grund der Maxwell'schen Theorie entwickelte HALLÉN eine Theorie der Sende- und Empfangsantenne. Eine für die Praxis brauchbare Schlussformel leitete er nicht ab. Deshalb bestand ein dringendes Bedürfnis, eine Lösung in Form einer Schlussformel zu suchen. In der vorliegenden Arbeit wird sie für Antennen, deren Abmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind, mitgeteilt.

1. Einleitung.

Auf Grund der Maxwell'schen Theorie entwickelte HALLÉN¹⁾ eine Theorie der Sende- und Empfangsantenne. Eine brauchbare Schlussformel wurde nicht abgeleitet. MAGNUS und OBERHETTINGER²⁾ zeigten, dass die Hallén'sche Theorie bei einer zweckmässigen Entwicklung praktisch brauchbarere Ergebnisse liefert als die Anwendung der Leitungstheorie nach F. L. COLLEBROCK³⁾, J. GROSSKOPF⁴⁾, K. NIESSEN⁵⁾ und G. DE VRIES⁵⁾. Die Arbeit von MAGNUS und OBERHETTINGER weist einige störende Unstimmigkeiten auf. Zudem ist das erhaltene Schlussergebnis noch recht kompliziert.

Der Sinn der vorliegenden Untersuchung ist, eine praktisch brauchbare Schlussformel abzuleiten. Die Schlussformel ist für den Fall gültig, in welchem die Höhe der Antenne genügend klein gegenüber der Wellenlänge der einfallenden Strahlung ist.

Die Symbole sind der Arbeit nach²⁾ entnommen. Zwischenrechnungen sind wegen räumlichen Einschränkungen weggelassen.

2. Die Hallén'sche Theorie.

Als Empfangsantenne dient ein gerader, metallischer Kreiszylinder (Fig. 1) der Länge $2 \cdot l$ und einem Querschnittsradius ϱ . In der Mitte ist sie unterbrochen und über einen Empfangskreis \mathcal{R}_e abgeschlossen. x ist die Koordinate der Zylinderachse. Antennenmitte ist $x = 0$, also $-l \leq x \leq +l$. λ ist die Wellenlänge der einfallenden Strahlung. Das Antennenmaterial soll eine unendliche Leitfähigkeit besitzen, was erlaubt, alle Ströme als Oberflächen-

ströme anzunehmen. Deshalb wird die durch die Ströme der Antenne erzeugte Feldstärke $\mathfrak{E}_i(x)$ zusammen mit der Tangentialkomponente des von aussen einfallenden Feldes $\mathfrak{E}a_i(x)$

$$\mathfrak{E}a_i(x) + \mathfrak{E}_i(x) = 0 \quad (1)$$

Nimmt man mit HALLÉN an: Der Strom verschwinde im Zylinderdeckel der Antenne und alle Glieder von der Grössenordnung ϱ/l , ϱ/λ können gegen 1 vernachlässigt werden, wird die x -Komponente des Hertz'schen Vektors

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} \int_{-l}^{+l} \frac{I(\xi) \cdot e^{-j\kappa r}}{r} d\xi \quad (2)$$

mit

$$\kappa = 2\pi/\lambda; \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + \varrho^2} \quad (3), (4)$$

Durch die Abspaltung der Integrale lässt sich Gl. 2 umformen:

$$\mathfrak{I}(x) = \frac{c \Phi_1}{\Omega} - \frac{I(x) h(x)}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \int_{-l}^{+l} \frac{I(\xi) e^{-j\kappa|x-\xi|} - I(x)}{|x - \xi|} d\xi \quad (5)$$

Es wird definiert:

$$\Omega = 2 \ln \frac{2l}{\varrho} \quad (6)$$

$$h(x, l) = \ln \frac{(l + x + \sqrt{(l+x)^2 + \varrho^2})(l - x + \sqrt{(l-x)^2 + \varrho^2})}{4l^2} \quad (7)$$

Im Integral Gl. 5 ist r durch $|x - \xi|$ ersetzt, was wegen der vorgenommenen Vernachlässigung (Bem. nach Gl. 1) erlaubt ist. $\mathfrak{E}_i(x)$ ist dann wegen Gl. 1 durch $\mathfrak{E}a_i(x) = E(x)$ bestimmt. Ist $\varepsilon = 1$, wird:

$$\mathfrak{E}_i(x) = -E(x) = -\frac{j}{\kappa} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \kappa \Phi_1 \right) \quad (8)$$

Hieraus folgt:

$$\Phi_2 = \frac{c}{\Omega} \Phi_1 = a \sin(\kappa |x|) + b \cos(\kappa |x|) + f(|x|) \quad (9)$$

mit

$$f(|x|) = -j \frac{c}{\Omega} \int_0^{|x|} E(\xi) \sin[\kappa(x - \xi)] d\xi \quad (10)$$

Diese Gleichungen erlauben den Strom näherungsweise zu berech-

nen. Wir beschränken uns auf die zweite Näherung, vernachlässigen somit alle Glieder mit höheren Potenzen als $1/\Omega$ und erhalten für Gl. (5)

$$\mathfrak{I}_2(x) = \Phi_2(x) - \frac{\mathfrak{I}_2(x)h(x)}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \int_{-l}^{+l} \frac{\Phi_2(\xi) \cdot e^{-j\kappa|x-\xi|} - \Phi_2(x)}{|x-\xi|} d\xi \quad (11)$$

3. Grenzbedingungen und allgemeine Schlussformel.

Der Antennenstrom ist durch die Gl. (9), (10), (11) bestimmt. Der Verlauf der Tangential-Feldstärke stellt man durch eine Potenzreihe dar:

$$E(x) = \sum_n E_n \cdot (\kappa x)^n = \sum_n E_n \cdot X^n \quad (12)$$

Die Integration der Gl. 11 ist dann mittels der Gl. 13 durchführbar:

$$M(x) = \int_0^x (\cos \xi \cdot e^{-j\xi} - 1) \frac{d\xi}{\xi} = \\ -\frac{1}{2} (\ln(2\gamma x) - Ci(2x) + jSi(2x)) \quad (13) \\ \gamma = 0,5772$$

Das Problem wäre gelöst, wenn \mathfrak{I}_2 nicht von den beiden Grössen a, b abhängen würde. Diese beiden Grössen lassen sich aber durch 2 Grenzbedingungen bestimmen, nämlich:

$$\mathfrak{I}(l) = 0 \quad (14)$$

$$\mathfrak{I}(0) = \frac{\mathfrak{U}_e}{\Re_e} = -\frac{2j}{\kappa \Re_e} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{2j\Omega}{c \cdot \Re_e} \cdot a \quad (15)$$

Berücksichtigt man nur die ersten 3 Glieder der Entwicklung von Gl. (13), so erhält man nach langen Zwischenrechnungen eine erste Schlussformel für den Empfängerstrom und $\cos L \neq 0$ bzw. $l \neq \lambda/4$ ($2n+1$)

$$\mathfrak{I}(0) = j \frac{c}{\kappa \Omega} \\ \frac{E_0 \left[\frac{1 - \cos L}{\cos L} + \frac{G_0(L)}{\Omega} \right] + E_1 \left[\frac{L - \sin L}{\cos L} + \frac{G_1(L)}{\Omega} \right] + E_2 \left[\frac{L^2}{12} + \frac{G_2(L)}{\Omega} \right]}{1 + j \frac{c \Re_e}{2 \Omega} \cdot \operatorname{tg} L - j \frac{c \cdot \Re_e}{2 \Omega^2} \cdot Q(L)} \quad (16)$$

mit dem Parameter

$$L = \kappa \cdot l \quad (17)$$

und den Funktionen

$$Q(L) = \operatorname{tg} L [4 M(L) - 2 M(2L) - j \cdot \operatorname{tg} L \cdot M(2L) - 2 \ln 2] \\ + j M(2L) + 4 j M(L) \quad (18)$$

$$G_0(L) = 4M\left(\frac{L}{2}\right) - 4M(L) \cdot \frac{1}{\cos L} + \frac{M(2L)}{\cos L} + j \cdot \operatorname{tg} L \cdot \frac{M(2L)}{\cos L} \quad (19)$$

$$G_1(L) = Q(L) + 2 \cdot \operatorname{tg} L - \frac{4M(L/2) \cdot L}{\cos L} + \frac{L \cdot M(2L)}{\cos L} + j \frac{L \cdot \operatorname{tg} L \cdot M(2L)}{\cos L} + 2L \frac{\ln 2}{\cos L} \quad (20)$$

Der Einfluss des Gliedes $E_2 \cdot X^2$ in Gl. (13) musste nur in einer ersten Näherung bei den gestellten Voraussetzungen berechnet werden.

4. Näherungsformeln.

Macht man die Annahme, dass L sehr klein bleibt, lassen sich die Funktionen $Q(L)$, $G_0(L)$, $G_1(L)$ in Potenzreihen entwickeln. Aus Gl. (13) folgt:

$$M(L) = -\frac{1}{2} (\ln(2\gamma L) - Ci(2L) + j Si(2L)) \simeq -jL - \frac{L^2}{2} + j \frac{2L^3}{9} + \frac{L^4}{12} \quad (21)$$

Weiter gelten die Formeln:

$$\frac{1}{\cos L} \simeq 1 + \frac{L^2}{2} + \frac{5}{24} L^4 + \dots \quad (22)$$

$$\operatorname{tg} L \simeq L + \frac{1}{3} L^3 + \dots \quad (23)$$

Berücksichtigt man nur die 4 ersten Glieder in (21) bis (24), so werden

$$Q(L) = -2 \ln 2 \cdot \operatorname{tg} L - 2L - \frac{8}{9} L^3 + j \frac{L^4}{8} \quad (24)$$

$$G_0(L) = \frac{3}{2} L^2 + \frac{131}{144} L^4 \quad (25)$$

$$G_1(L) = 2 \cdot \ln 2 \cdot \frac{L^3}{6} + \frac{5}{18} L^3 = 0,5088 \cdot L^3 \quad (26)$$

Im Bereiche

$$L \leq 0,3 \quad (27)$$

sind die erhaltenen Ergebnisse mit grosser Genauigkeit gültig. Für noch kleinere Werte von L kann man sich bei der Auswertung obiger Funktionen (Gl. 24–26) auf das erste Glied beschränken. Unter dieser Voraussetzung hat die Schlussgleichung die Form,

$$\mathfrak{J}(0) = j \frac{c}{\kappa} \cdot \frac{\frac{1}{2} E_0 \cdot L^2 (\Omega + 3,0) + \frac{1}{6} E_1 \cdot L^3 (\Omega + 3,053) + \frac{1}{12} E_2 \cdot L^4 (\Omega + 3,1667)}{\Omega^2 + j \Re e \cdot c / 2 (\Omega + 3,386) \cdot L} \quad (28)$$

Ist δ die relative Fehlergrenze, lässt sich der Gültigkeitsbereich praktisch folgendermassen definieren:

$$L^2 \leq \delta \quad (29)$$

Für einen zulässigen Fehler von 5% ist dieser Bereich:

$$L \leq 0,22; \quad l \leq 0,035 \cdot \lambda \quad (30)$$

Diese Bedingungen 28 sind im Lang- und Mittelwellengebiet praktisch immer erfüllt, im Kurzwellengebiet bei Empfängern mit kleinen Stabantennen.

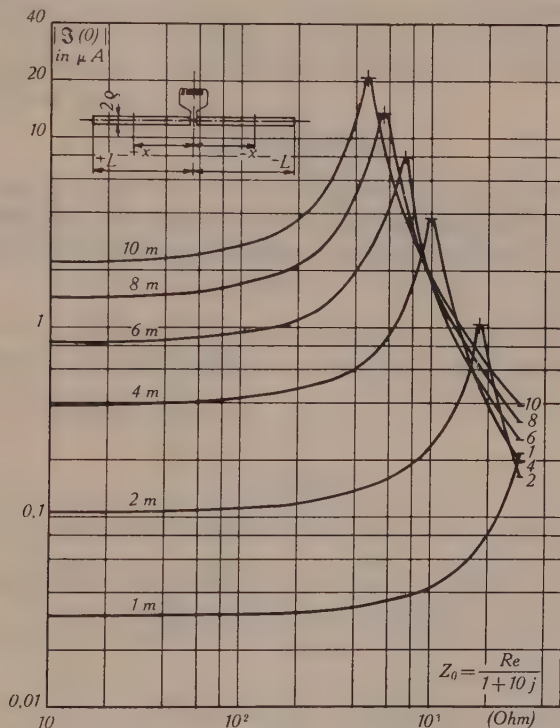


Fig. 1.

5. Numerische Ergebnisse und Schlussfolgerung.

Fig. 1 stellt den Absolutwert des Empfängerstromes in Abhängigkeit von der Empfängerimpedanz und Antennenlänge dar. Die numerischen Daten sind:

$$\lambda = 314,15 \text{ m}; \quad \varrho = 0,002 \text{ m}; \quad \Re_e = Z_0(1 + j10).$$

Die Feldstärke längs der Antenne ist konstant und gleich $1 \frac{\text{mm}}{\text{V}}$.

Eine starke Resonanz des Systems ist erkennbar, die durch die kapazitive Wirkung der Antenne hervorgerufen wird. Im Ersatzschema ist die gerade Empfangsantenne bei den vorliegenden Voraussetzungen durch eine in Serie mit dem Empfangskreis geschaltete Kapazität zu ersetzen. Die Ersatzkapazität der Antenne lässt sich aus Gl. (16) und (26) berechnen. Sie wird nach Gl. (16):

$$C_a = \frac{1}{2 \Omega^2 \kappa} (\Omega \cdot \operatorname{tg} L - Q(L)) = \frac{l}{2 \Omega^2} \left[\frac{\Omega \operatorname{tg} L - Q(L)}{L} \right] \quad (31)$$

und nach Gl. (26):

$$C_a = \frac{l(\Omega + 3,3863)}{2 \Omega^2} \quad (32)$$

6. Bemerkung.

Die Hallén'sche Theorie gibt uns die Möglichkeit, das Problem der geraden Empfangsantenne auch ohne die erwähnten einschränkenden Bedingungen zu beherrschen. Diese Entwicklungen sind Gegenstand weiterer Untersuchungen.

Ein ausführlicher Bericht über die vorliegende Untersuchung mit den nötigen Zwischenrechnungen wird anderswo erscheinen.

Albiswerk A. G., Zürich.

Literatur.

- ¹⁾ HALLÉN, E.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis **11**, (1938), Fasc. 4, S. 1—44.
- ²⁾ MAGNUS und OBERHETTINGER: Zur Theorie der geraden Empfangsantenne; Hochfrequenz und Elektroakustik **57** (1941), S. 97.
- ³⁾ F. M. COLLEBROCK: Wireless Eng. **4** (1927), S. 657 und Inst. Electr. Eng. **71** (1932), S. 235.
- ⁴⁾ J. GROSSKOPF: TFT **27**, (1938), S. 129.
- ⁵⁾ K. F. NIESSEN und G. DE VRIESS: Physica **6** (1939), S. 601.
- ⁶⁾ BOUWKAMP: Physica **9** (1942), S. 609.

Über reversible Kreisprozesse mit maximalem thermischem Wirkungsgrad

von H. Greinacher.

(7. II. 1944.)

Von allen Kreisprozessen, bei denen nur 2 Wärmespeicher Verwendung finden, besitzt der CARNOT'sche, der sich aus 2 isothermen und 2 adiabatischen Vorgängen zusammensetzt, den höchsten thermischen Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \quad (1)$$

Lässt man aber beliebig viele Wärmereservoirire zu, so lassen sich unendlich viele Prozesse angeben, welche diesen Wirkungsgrad

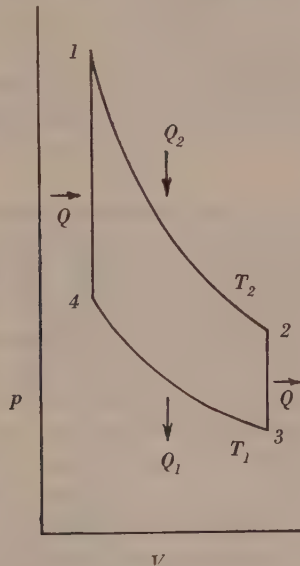


Fig. 1.

liefern. Ein solcher ist der CLAPEYRON'sche mit 2 Isothermen und 2 Isochoren (Fig. 1). Hier sind die beiden Wärmemengen, die auf dem Wege 2 → 3 abzuführen und auf 4 → 1 wieder zuzuführen sind, gleich gross. Die auf 2 → 3 abgeführte Wärme kann also gerade

zur Erwärmung auf $4 \rightarrow 1$ benützt werden. Man hat nur, um jede Temperaturdifferenz zu vermeiden, unendlich viele zwischen T_2 und T_1 temperierte Wärmespeicher bereitzustellen, die man einmal auf der Strecke $2 \rightarrow 3$, dann auf der Strecke $4 \rightarrow 1$ einsetzt. Die insgesamt verbrauchte Wärmemenge ist daher Q_2 , und der Nutzeffekt ergibt sich zu

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}, \quad (2)$$

was dann zu der Beziehung (1) führt. Lässt man die Möglichkeit der Wiederverwendung von abgeführter Wärme (hier von Q) nicht zu, so würde als Nutzeffekt zu bezeichnen sein

$$\eta' = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q}, \quad (3)$$

so dass also $\eta > \eta'$. Dieser Ausdruck entspricht aber keinesfalls dem Nutzeffekt, den man bei bester Ausnützung der zugeführten Wärme erhält, sondern lediglich einer engeren Fassung des Begriffes Wirkungsgrad. Beschränkt man sich auf diese, dann ist der CARNOT'sche Prozess allerdings der einzige, der den *maximalen* Wert (1) liefert. Praktisch interessiert aber der Nutzeffekt, den man bei einem reversiblen Prozess unter bestmöglicher Ausnützung der Wärme zur Arbeitsleistung erhält. Im folgenden soll auch der Begriff „Nutzeffekt“ entsprechend dieser allgemeineren Fassung verwendet werden.

Die Frage nach den reversiblen Kreisprozessen mit maximalem Wirkungsgrad ist also in diesem Sinne aufzufassen. Ausser dem CLAPEYRON'schen gibt es, wie man leicht feststellt, einen zweiten von gleicher Einfachheit, nämlich den mit 2 Isothermen und 2 Isobaren. Beide Kreisprozesse haben das Gemeinsame, dass auf den Strecken $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ die spezifische Wärme einen konstanten Wert aufweist, im einen Falle c_v , im andern c_p . Auch dem CARNOT'schen Prozess kommt diese Eigenschaft zu. Nur hat die spezifische Wärme in diesem Falle den speziellen Wert 0 (Adiabate). Die spezifische Wärme eines Gases kann nun aber alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Es lassen sich daher unendlich viele Kreisprozesse durchführen, bei denen die Bedingung erfüllt ist, dass auf den Strecken $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ die spezifische Wärme einen konstanten Wert besitzt. Wie bekannt¹⁾, kommt nun aber bei allen diesen Kreisprozessen auch derselbe maximale Wirkungsgrad heraus.

¹⁾ CL. SCHAEFER, Einführung in die theoretische Physik, 1921, II. 1, S. 130.

Mit Rücksicht auf die späteren Ausführungen sei kurz auf den Beweis eingegangen. Zunächst ist einzusehen, dass die Wärmemenge, die auf $2 \rightarrow 3$ (Fig. 2) abgegeben wird, so gross ist als die, welche auf $4 \rightarrow 1$ zugeführt werden muss, da ja vorschriftsgemäss c konstant sein soll. Es ist daher auf beiden Wegen pro Masseneinheit

$$Q = c(T_2 - T_1) \quad (4)$$

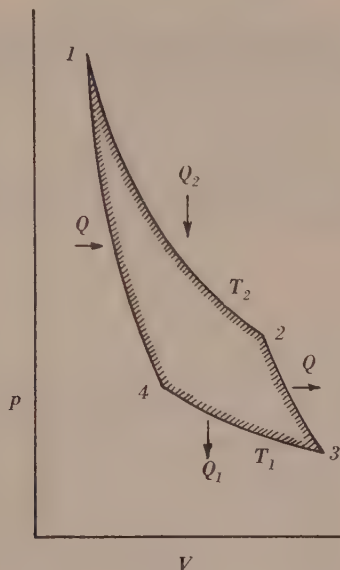


Fig. 2.

Es ist nun nur zu zeigen, dass das Arbeitsintegral über den geschlossenen Linienzug $\oint p dV$ oder die schraffierte Arbeitsfläche ebenso gross ist wie beim CARNOT'schen Prozess. Für

$$A_2 = \int_1^2 p dV \text{ bzw. } A_1 = \int_4^3 p dV$$

ergibt dies ebenso wie bei CARNOT

$$A_2 = \frac{R T_2}{m} \log \frac{V_2}{V_1} \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{R T_1}{m} \log \frac{V_3}{V_4} \quad (5)$$

Die Arbeitsbeträge auf den Strecken $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ heben sich wegen der Gleichheit von Q weg. Also ist der Nutzeffekt

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{A_2 - A_1}{A_2} = \frac{T_2 \log \frac{V_2}{V_1} - T_1 \log \frac{V_3}{V_4}}{T_2 \log \frac{V_2}{V_1}}. \quad (6)$$

Der maximale Wirkungsgrad kommt heraus, wenn die Logarithmen sich wegheben, wenn also $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Um zu beweisen, dass dies der Fall ist, müssen die Kurvenstücke $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ bekannt sein. Es sind dies Kurven konstanter spezifischer Wärmen oder *Polytremen*. Die Differentialgleichung dieser Polytremen lautet nach dem 1. Hauptsatz

$$c_v dT + p dV = c dT, \quad (7)$$

wo c irgend einen vorgegebenen konstanten Wert besitzt (im Spezialfall der Adiabaten $c = 0$). Dies ergibt die Integralbeziehung

$$p V^{\frac{c_p - c}{c_v - c}} = \text{const.} \quad (8)$$

Indem man diese auf die Punkte 2 und 3, bzw. 4 und 1 anwendet, findet man in der Tat

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}, \quad (9)$$

und damit $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$, wie bei CARNOT.

Die Bedingung, dass der Kreisprozess aus 2 Isothermen und 2 Polytremen bestehe, ist also hinreichend, um maximalen Wirkungsgrad zu erzielen. Man kann sich indessen fragen, ob dies notwendig sei. Es liegt nahe zu vermuten, dass es genügt, dafür zu sorgen, dass die beiden Wärmemengen auf den Strecken $2 \rightarrow 3$ und $1 \rightarrow 4$ gleich gross sind. Die Bedingung hiefür wäre, dass die spezifische Wärme eine reine Temperaturfunktion ist. Wir hätten also auf beiden Strecken $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ bei einer bestimmten Temperatur T denselben Wert, c wäre aber im übrigen auf diesen Strecken variabel, d. h. $c = f(T)$. Damit ist für die Linienführung auf den genannten beiden Strecken eine bestimmte Vorschrift gegeben, die offenbar allgemeiner ist als im Falle der Polytremen. Für den Nutzeffekt η erhält man zunächst genau denselben Ausdruck (6). Aber es ist noch nicht erwiesen, dass (9) erfüllt und damit der Nutzeffekt maximal ist. Hierzu muss auf Beziehung (7) zurückgegriffen werden. Integriert man diese unter der Annahme, dass $c = f(T)$, so erhält man

$$\log \frac{p V^{\kappa}}{p_0 V_0^{\kappa}} = \frac{1}{c_v} \int_{T_0}^T \frac{c}{T} dT, \quad (10)$$

($\kappa = \frac{c_p}{c_v}$). Unter Verwendung von $pV = \frac{R}{m} T$ kommt

$$\log \frac{T V^{\kappa-1}}{T_0 V_0^{\kappa-1}} = \frac{1}{c_v} \int_{T_0}^T \frac{c}{T} dT \quad (11)$$

Das Integral rechts hat für ein gegebenes Temperaturintervall immer denselben Wert, ist also für die Strecke $2 \rightarrow 3$ und $1 \rightarrow 4$ gleich gross. Somit folgt, wenn man (11) auf die Punkte 2 und 3 bzw. 4 und 1 anwendet

$$\log \frac{T_2 V_2^{\kappa-1}}{T_1 V_3^{\kappa-1}} = \log \frac{T_2 V_1^{\kappa-1}}{T_1 V_4^{\kappa-1}},$$

und dies führt unmittelbar zu (9), so dass sich auch in diesem allgemeinen Falle die log der Formel (6) wegheben. Damit ist aber bewiesen, dass der CARNOT'sche Nutzeffekt nicht nur bei Verwendung von Polytropen erzielt werden kann. Es genügt vielmehr, die Strecken $2 \rightarrow 3$ bzw. $4 \rightarrow 1$ so zu wählen, dass auf diesen gleiche Wärmemengen fortgeführt bzw. zugeführt werden. Für c kann irgend eine reine Temperaturfunktion angesetzt werden. Sie darf

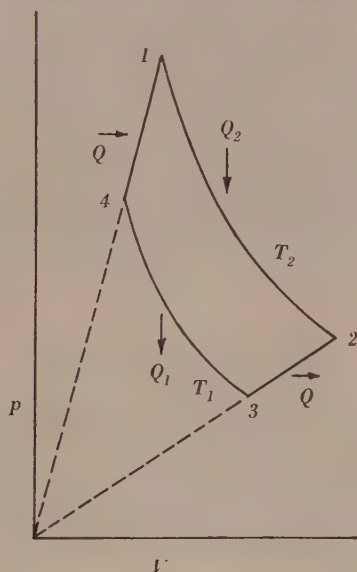


Fig. 3.

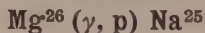
also auf Grund der Gasgleichung nur eine Funktion des Produktes pV sein. Da im übrigen diese Funktion nicht vorgeschrieben ist, kann z. B. die Kurve $2 \rightarrow 3$ beliebig gewählt werden. Hingegen ist dann Kurve $1 \rightarrow 4$ vollständig bestimmt. Sie hat an jeder Stelle gerade eine solche Neigung aufzuweisen, dass c gleich gross wird wie an den entsprechenden (gleich temperierten) Stellen der Kurven $2 \rightarrow 3$. Wird so verfahren, so gelangt man von 1 aus zu einem Punkte 4 der Temperatur T_1 , welchem ein Volumen V_4 zukommt,

das die Bedingung (9) erfüllt. Wählt man Polytropen, so entspricht dies dem Spezialfall, dass $c = f(T)$ zu einer Konstanten zusammenschrumpft. Die durch Gleichung (11) bestimmten Kurven könnten als allgemeine Polytropen oder auch als *Isocaloren* bezeichnet werden, da bei irgend einem gegebenen $c = f(T)$ bei Erwärmung von T_1 auf T_2 auf allen Kurven gleiche Wärmemengen zuzuführen sind. Die Gleichung der *Isocaloren* wird im allgemeinen in der Form $\varphi(p, V) = 0$ erhalten werden, wird sich aber nur in wenigen Fällen explicite als $p = \psi(V)$ angeben lassen. Es ist daher der Umstand bemerkenswert, dass die Kenntnis dieser Funktion für den oben gegebenen Beweis nicht erforderlich ist.

Zum Schluss sei noch auf einen speziellen Kreisprozess mit maximalem Wirkungsgrad hingewiesen, der sich, wie die eingangs aufgeführten 2 Beispiele durch besondere Einfachheit auszeichnet. Er besteht aus 2 Isothermen und 2 Geraden, die nach dem Nullpunkt der pV -Ebene zielen (Fig. 3). Es entspricht dies, wie sich leicht zeigen lässt, der Verwendung zweier Polytropen mit dem besonderen Wert $c = \frac{c_p + c_v}{2}$. Setzt man nämlich diesen Wert in die Gleichung der Polytropen (8) ein, so erhält man $pV^{-1} = \text{const.}$, d. h. eine Geradenschar durch den Ursprung.

Physikalisches Institut der Universität Bern.

Kernphotoeffekt unter Abspaltung eines Protons:



von O. Huber, O. Lienhard, P. Scherrer und H. Wäffler.

(16. II. 1944.)

1. Einleitung.

Die im Prozess $\text{Li}^7(p, \gamma)\text{Be}^8$ entstehende Gammastrahlung von ~ 17 MeV Quantenenergie induziert in Magnesium zwei Aktivitäten mit den Halbwertszeiten $11,9 \pm 0,6$ sec bzw. $61,3 \pm 2,4$ sec, wie bereits in einer früheren Arbeit¹⁾ beschrieben worden ist. Die kurzlebigere Aktivität gehört dem Mg^{23} ²⁾ an, sie entsteht durch einen (γ, n) -Prozess aus Mg^{24} . Die bis anhin unbekannte langlebige Periode konnte bei Abschluss der unter ¹⁾ zitierten Arbeit noch keinem bestimmten Isotop zugeordnet werden. Um Ausgangsisotop und Entstehungsprozess dieser 61sec-Aktivität zu bestimmen, wurden deshalb die im folgenden beschriebenen Versuche unternommen.

2. Zuordnungsmöglichkeiten.

In Fig. 1 sind die Isotope des Magnesiums und seiner Nachbar-elemente zusammengestellt. Die stabilen Isotope sind als Rechtecke eingezeichnet und die eingeschriebenen Zahlen bedeuten ihre relativen Häufigkeiten. Bei den radioaktiven Isotopen (durch Ovale angedeutet) sind jeweils Halbwertszeit und Art der Strahlung angegeben.

Durch einen (γ, n) -Prozess an Magnesium könnten die folgenden Kerne entstehen:

$$\text{Mg}^{23}: \beta^+ \quad T = 11,6 \text{ sec} \quad E_{\beta_{\max}} = 2,82 \text{ MeV}$$

Mg^{24} : stabil

Mg^{25} : stabil

¹⁾ O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: H. P. A. XVI (1943), 33. In dieser Arbeit wurde die Halbwertszeit noch mit 62 ± 3 sec angegeben.

²⁾ M. G. WHITE, L. A. DELSASSO, J. G. FOX und E. C. CREUTZ: Phys. Rev. 56 (1939) 512.

Die Abspaltung eines Protons (γ, p)-Prozess, würde auf die Natriumisotope

Na^{23} : stabil

Na^{24} : β^- $T = 14,8 \text{ h}$ $E_{\beta_{\max}} = 1,4 \text{ MeV}$

Na^{25} : unbekannt

führen.

Die Abspaltung eines α -Teilchens schliesslich, (γ, α)-Prozess, ergäbe die drei stabilen Neonisotope:

Ne^{20} , Ne^{21} und Ne^{22} .

	20	21	22	23	24	25	26	27
$_{10}\text{Ne}$	90,00	0,27	9,73	β^- 41 s				
$_{11}\text{Na}$				100	β^- 14,8 h	β^- 61 s		
$_{12}\text{Mg}$				β^+ 11,9 s	77,4	11,5	11,1	β^- 10,0 m
$_{13}\text{Al}$								100

Fig. 1.

Tabelle der Isotope von Magnesium und seinen Nachbarelementen.

Für die Zuordnung der neuen 61sec-Aktivität kommen somit die folgenden drei Möglichkeiten in Frage:

a) Der 61sec-Körper entsteht durch einen (γ, n)-Prozess, den einzigen beim Kernphotoeffekt bis jetzt beobachteten Umwandlungstypus. Dann muss es sich um einen *metastabilen* Anregungszustand des einen der beiden stabilen Magnesiumisotope Mg^{24*} oder Mg^{25*} handeln, der unter Emission von γ -Strahlen in den Grundzustand übergeht.

b) Die 61-sec-Aktivität gehört zu einem gewöhnlichen β -Strahler. Dann bleibt als einzig mögliche Zuordnung die Annahme eines (γ, p)-Prozesses an Mg^{26} . Nach der Voraussage von Dickson und Konopinski¹⁾ auf Grund ihrer empirischen Kurven soll das dabei

¹⁾ G. R. DICKSON und E. J. KONOPINSKI: Phys. Rev. **58** (1940), 949.

entstehende Na^{25} eine Halbwertszeit in der Grössenordnung von 20 sec haben.

c) Die 61-sec-Aktivität rührt von einem (γ, α) -Prozess her. Dann müsste ein metastabiler Anregungszustand eines der drei stabilen Neon-Isotope vorliegen.

3. Absorptionsmessung.

Bei der Erzeugung radioaktiver Isotope unter Einwirkung von γ -Strahlen müssen die betreffenden Präparate aus Intensitätsgründen in *dicker* Schicht (Schichtdicke \geq Reichweite der β -Teilchen) bestrahlt und gemessen werden. Um sich auch in diesem Falle ein Bild von der Energie der emittierten β -Strahlung machen zu können, haben wir die Schwächungskurven einiger mit Neutronen in dicker Schicht erzeugter β -Strahler bekannter Energie hinter Al-Absorbern gemessen. Der aus diesen Messungen gewonnene empirische Zusammenhang zwischen Halbwertsdicke und oberer Grenze des β -Spektrums liefert eine brauchbare Eichkurve zur Bestimmung unbekannter β -Energien aus der gemessenen Halbwertsdicke ihrer Absorptionskurven¹⁾. In unserer Anordnung erhalten wir für den 61-sec-Körper eine Halbwertsdicke von 0,227 g/cm² Al. Falls es sich dabei um einen β -Strahler handelt, Zuordnungsmöglichkeit b), so ergibt sich für seine Maximalenergie ein Wert von $\sim 3,4$ MeV. Unter Annahme der Zuordnungsmöglichkeit a) oder c) folgt dagegen aus den bekannten²⁾ Absorptionswerten für Röntgenstrahlen in Aluminium eine Röntgenstrahlung mit einer Quantenenergie von 35 keV. Wir haben es bei unserem 61-sec-Körper also entweder mit einem β -Strahler von 3,4 MeV Grenzenergie oder mit einem metastabilen Zustand zu tun, der durch Aussendung von 35 KV Lichtquanten in den Grundzustand übergeht.

4. Wirkungsquerschnitt.

Die Kenntnis von Absorption und Art der Strahlung eines radioaktiven Körpers gestattet nun, aus der gemessenen Anfangsaktivität den Wirkungsquerschnitt des Prozesses zu berechnen, in welchem er entstanden ist. Im folgenden soll hier immer der relative Wirkungsquerschnitt angegeben werden, wobei als Bezugssubstanz Kupfer dient, und der Wirkungsquerschnitt für den Kernphotoeffekt an Cu^{63} gleich 100 gesetzt wird. (BOTHE und GENTNER³⁾)

¹⁾ Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode erscheint demnächst in den H. P. A.

²⁾ Siehe z. B. HEITLER: Quantum Theory of radiation.

³⁾ W. BOTHE und W. GENTNER: Zs. Phys. **106**, 1937, 236.

geben den *absoluten* Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess mit der Li- γ -Strahlung zu $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 \text{ an.}$) Unter der Annahme a) oder c) erhält man bei Berücksichtigung der Ansprechwahrscheinlichkeit des verwendeten Zählrohrs¹⁾ für eine γ -Strahlung von 35 keV den Wert $\sigma \approx 1100$. Für die Annahme b) ergibt sich $\sigma = 3,8$ mit einer Genauigkeit von etwa 20 %.

Im Verlauf unserer Messungen mit der Li- γ -Strahlung haben wir bei den leichten Kernen N^{14} , O^{16} , F^{19} , Mg^{24} , Al^{27} , Si^{28} , S^{32} , Cl^{35} , K^{39} , Ca^{40} die Wirkungsquerschnitte für den Kernphotoeffekt²⁾ bestimmen können. Die dafür gefundenen Werte schwanken zwischen 0,4 für N^{14} und 4,8 für S^{32} . Ein Wert von 1100 würde also etwa mit einem Faktor 500 aus der Reihe herausfallen. Deshalb glauben wir die Annahmen a) und c), nach welchen die 61sec-Aktivität einen isomeren Zustand des Mg^{24} oder Mg^{25} , bzw. der Neon-Isotope Ne^{20} , Ne^{21} oder Ne^{22} darstellt, ausschliessen zu können, und schreiben diese Aktivität dem bis anhin unbekannten Na^{25} zu. (Annahme b).

Falls der β -Übergang des Na^{25} direkt auf den Grundzustand des Mg^{25} führt, so stellt die von uns gemessene β -Energie von 3,4 MeV die gesamte, bei diesem Übergang freiwerdende Energie dar. Für die Differenz der Atommassen Na^{25} — Mg^{25} erhält man nach BARKAS³⁾ 2,7 MeV. Diese gute Übereinstimmung macht es wahrscheinlich, dass der beobachtete β -Übergang tatsächlich auf den Grundzustand des Mg^{25} führt. Es ist jedoch zu bemerken, dass eine allfällige neben dem β -Zerfall auftretende γ -Strahlung mit unserer Absorptionsmethode nicht nachgewiesen werden könnte.

5. Erzeugung der 61sec-Aktivität durch Neutronen.

Wie Fig. 1 zeigt, sollte Na^{25} auch durch einen (n,p)-Prozess aus Mg^{25} entstehen.

Bei Bestrahlung von Magnesium mit Neutronen sind die folgenden *bekannten* Aktivitäten zu erwarten:⁴⁾

- | | |
|---|--|
| 1. $\text{Mg}^{26} (n, \gamma) \text{Mg}^{27}$: $T = 10.0 \pm 0.1 \text{ m}$ | $E_{\beta \text{max}} = 1,8 \text{ MeV}$ |
| 2. $\text{Mg}^{26} (n, \alpha) \text{Ne}^{23}$: $T = 43 \pm 5 \text{ sec}$ | $E_{\beta \text{max}} = 4,1 \text{ MeV}$ |
| 3. $\text{Mg}^{24} (n, p) \text{Na}^{24}$: $T = 14,8 \text{ h}$ | $E_{\beta \text{max}} = 1,4 \text{ MeV}$ |

Falls also unsere Deutung der mit γ -Strahlen erzeugten 61sec-Aktivität richtig ist, sollte ausser den drei angegebenen Perioden auch noch eine solche von 61sec auftreten.

¹⁾ P. WEBER: H. P. A. X, 1937, 32.

²⁾ Erscheint demnächst in den H. P. A.

³⁾ W. H. BARKAS: Phys. Rev. 55, 1939, 691.

⁴⁾ J. MATTAUCH und S. FLÜGGE: Kernphysikal. Tabellen, Berlin 1942.

Um dies abzuklären, haben wir den Abfall der durch schnelle Neutronen in Magnesium induzierten Aktivität sorgfältig gemessen.

Eine Entscheidung darüber, ob eine Zerfallskurve komplex ist oder nicht, kann nur dann getroffen werden, wenn die durch die statistischen Schwankungen bedingte Unsicherheit der einzelnen Messpunkte relativ klein ist. Dies gilt um so mehr, je weniger verschieden die zu trennenden Halbwertszeiten sind. Deshalb mussten mit der uns zur Verfügung stehenden Ra + Be-Neutronenquelle von 78 mC eine grosse Zahl von Einzelbestrahlungen durchgeführt werden. Ein Zylinder aus reinem Mg-Blech

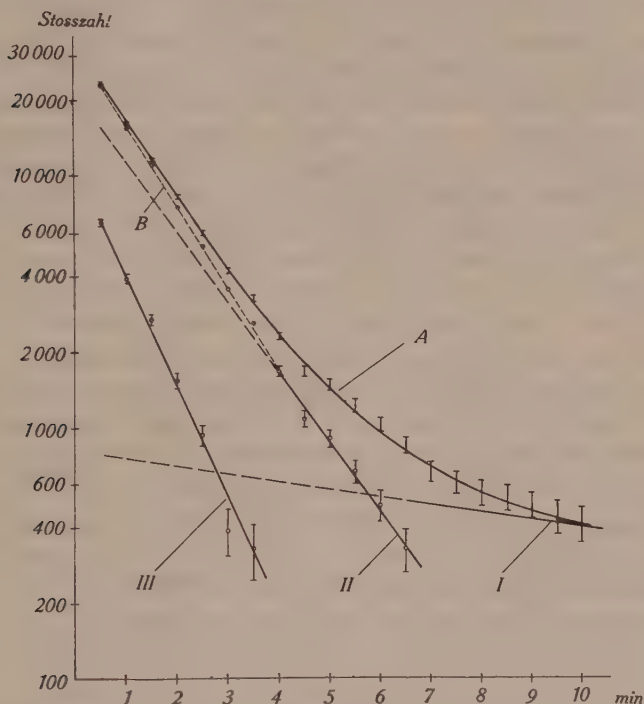


Fig. 2.

Zerfallskurve der in Magnesium mit Neutronen induzierten Aktivitäten. Die gemessene Kurve A setzt sich zusammen aus den drei Aktivitäten I: $T = 10$ m,

II: $T = 64 \pm 6$ sec und III: $T = 42 \pm 5$ sec.

wurde jeweils während 4 min bestrahlt und dann, eine Minute nach Ende Aktivierung, die induzierte Aktivität in Intervallen von 30 sec während 10 min gemessen. Um bei der sukzessiven Bestrahlung ein zu starkes Anwachsen der 14,8 Stunden-Aktivität, die während der Messung als konstant angenommen werden kann,

zu vermeiden, benützten wir sieben gleiche Magnesiumzylinder, welche abwechselnd bestrahlt wurden.

Das Ergebnis von über 600 Einzelmessungen wird durch die Zerfallskurve A in Fig. 2 dargestellt. Nulleffekt des Zählrohrs und Anteil der 14,8h-Aktivität des Na^{24} sind dabei bereits abgezogen.

Die Zerlegung dieser komplexen Zerfallskurve A in ihre Komponenten wurde folgendermassen durchgeführt: Bei der langlebigen Komponente muss es sich um die 10min-Aktivität des Mg^{27} handeln¹⁾. Da sich aus den vorliegenden Messpunkten ihre Halbwertszeit nur sehr ungenau bestimmen liesse, wurde für sie der Literaturwert von 10,0 min²⁾ angenommen, und damit die Lage der entsprechenden logarithmischen Geraden I aus der Summe der Messpunkte von der siebenten Minute an berechnet. Dabei wurde berücksichtigt, dass die kurzlebigeren Aktivitäten noch nicht vollständig abgeklungen waren, indem ihr Anteil der Extrapolation des anfänglichen Verlaufs der Kurve A entnommen wurde. Die gesamte Stosszahl, welche für die drei Minuten 2979 betrug, musste infolge dieser Korrektur um 506 reduziert werden. Es ist zu bemerken, dass die Genauigkeit dieses einfachen Verfahrens durchaus genügt, da der Anteil der 10min-Aktivität im ersten Messintervall (von 0 bis 30 sec) nur 3 % der totalen Stosszahl beträgt.

Versucht man die nach Abzug der 10min-Aktivität (I) verbleibende Kurve B durch eine *einfache* Zerfallskurve darzustellen, so erhält man eine Halbwertszeit von 57 ± 2 sec. Diese wäre also, wenn man nur die eingangs erwähnten bekannten Prozesse in Betracht zieht, dem Ne^{23} zuzuschreiben: $\text{Mg}^{26} (n, \alpha) \text{Ne}^{23}$.

Da nun in der Literatur für die Halbwertszeit von Ne^{23} lediglich der ungenaue Wert von $T = 43 \pm 5$ sec angegeben wird²⁾, bestimmten wir diese Halbwertszeit mit der Reaktion $\text{Na}^{23} (n, p) \text{Ne}^{23}$ nochmals und erhielten für dieselbe (Fig. 3):

$$T = 40,7 \pm 0,8 \text{ sec.}$$

Der angegebene Fehler von 0,8 sec entspricht dem *dreifachen* Wert des nach PEIERLS³⁾ berechneten *mittleren* Fehlers, so dass wir ihn als Fehlergrenze betrachten.

¹⁾ Die Aktivität wird durch Paraffin verstärkt. Ihre Intensität war aber immer noch so gering, dass wir auf eine genaue Halbwertszeitbestimmung mit unserer Neutronenquelle verzichteten, um so mehr als eine solche für die weitere Auswertung im Rahmen der angegebenen Ungenauigkeiten nicht benötigt wurde.

²⁾ J. MATTAUCH und S. FLÜGGE: loc. cit.

³⁾ R. PEIERLS: Proc. Roy. Soc. London (A), **149**, 1935, 467.

Daraus geht hervor, dass Kurve B nicht als einfache Zerfallskurve angesprochen werden kann. Bei genauerem Zusehen erkennt man auch, dass die Neigung der Kurve B etwa von der vierten Minute an abnimmt, und dass dieser untere Teil sich am besten durch eine Gerade entsprechend einer Halbwertszeit von 64sec darstellen lässt (II). Zieht man nun die der Geraden II entsprechende Aktivität von Kurve B ab, so bleiben die Punkte der Kurve III, für die man eine Halbwertszeit von 42 sec erhält.

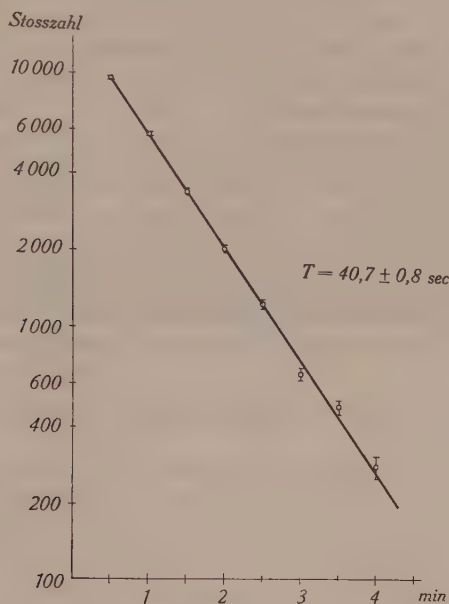


Fig. 3.
Zerfallskurve von Ne^{23} aus $\text{Na}^{23}(n, p)\text{Ne}^{23}$.

Wir finden also, dass sich die gemessene Zerfallskurve A aus den drei Aktivitäten I, II und III mit Halbwertszeiten von 10 min, 64 ± 6 sec und 42 ± 5 sec zusammensetzt. Innerhalb der Fehlergrenzen stimmt die für die Aktivität III in Fig. 2 gefundene Halbwertszeit mit der des Ne^{23} (Fig. 3) überein. Die Übereinstimmung der 64 ± 6 sec für die Halbwertszeit der Aktivität II mit der durch die γ -Strahlung induzierten $61,3 \pm 2,4$ sec-Periode ist so gut, dass wir ihre Identität als erwiesen betrachten.

Ein Blick auf Fig. 1 zeigt, dass prinzipiell bei Bestrahlung von Magnesium mit Neutronen auch Na^{26} auftreten könnte. Unsere Messungen haben jedoch keine Andeutung einer weiteren Aktivität ergeben.

6. Zusammenfassung.

1. Für die von der Lithium- γ -Strahlung in Magnesium induzierte 61sec-Aktivität wird eine Absorptionsmessung durchgeführt. Ein Vergleich der Wirkungsquerschnitte des Kernphotoeffekts an leichten Kernen führt zum Ergebnis, dass diese Aktivität dem Na^{25} zuzuschreiben ist, dass also ein (γ, p) -Prozess an Mg^{26} vorliegt. Für die maximale β -Energie des Na^{25} ergibt sich ein Wert von 3,4 MeV.

2. Diese Deutung wird dadurch erhärtet, dass es gelungen ist, die gleiche Halbwertszeit auch bei Bestrahlung von Magnesium mit Neutronen nachzuweisen, wobei das Na^{25} durch einen (n, p) -Prozess aus Mg^{25} entsteht.

3. Die Halbwertszeit von Ne^{23} wird neu bestimmt zu $40,7 \pm 0,8$ sec.

Herrn Dr. E. JACOBI danken wir für seine Mithilfe bei den Messungen. Die Überlassung von sehr reinem Magnesiumblech verdanken wir den Aluminiumwerken Rorschach A.-G. Der Aluminiumfonds Neuhausen hat durch finanzielle Beihilfe die Durchführung dieser Arbeit ermöglicht, was auch an dieser Stelle bestens verdankt sei.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

Untersuchungen über unipolar ionisierte Gasströmungen und Neue Methode zur Bestimmung der Dimension der Ionen *)

von **Gustave Joyet**, Lausanne.

(2. II. 1944.)

Zusammenfassung. — In einem unipolar ionisierten Gas, das durch ein leitendes Rohr strömt, ist der Verlust an Ionen eine Funktion ihrer Diffusion durch das neutrale Gas, welches sie mitführt, also auch eine Funktion ihrer Grösse. Mit Hilfe der kinetischen Gastheorie wird die Beziehung zwischen den Dimensionen der Ionen und der exponentiellen Schwächung der Ladung im Gasstrom festgestellt.

Die Theorie wird auf experimentelle Untersuchungen angewendet, in welchen eine Apparatur zur Erzeugung einer konstanten unipolaren Strömung, sowie eine verbesserte Methode zur Messung der Ionendichten ausgearbeitet wurden. Aus den durchgeführten Messungen ergibt sich, dass die leichten Ionen in Luft aus 2 bis 3 Molekülen aufgebaut sind.

Einleitung.

Bis vor wenigen Jahren wurde die Grösse der Ionen aus Messungen ihrer Beweglichkeit im elektrischen Feld bestimmt, auf Grund theoretischer Ansätze von P. LANGEVIN¹⁾, J. J. THOMSON und besonders von P. LENARD²⁾. Danach sind die leichten Ionen in Luft Gebilde aus mehreren Molekülen (M. LAPORTE³⁾). Deren Zahl wird von H. A. ERIKSON⁴⁾ zu 1 bis 2, von H. SCHILLING⁵⁾ zu 4 bis 5, und von L. B. LOEB⁶⁾ zu weniger als 6 angegeben.

Lässt man ein Gas, das Ionen nur eines Vorzeichens aufweist, durch ein Rohr mit leitenden Wänden strömen, so stellt man ein ziemlich rasches Verschwinden der Ionen fest. Wir fragten uns, ob die theoretische und experimentelle Untersuchung dieser Erscheinung zu einer neuen Methode der Bestimmung der Ionengrösse führen könnte.

Die Vernichtung der Ionen an der Wand erzeugt einen radialen Gradienten der Ionendichte, der einen Diffusionsstrom nach Gebieten geringerer Dichte zur Folge hat. Dieser Vorgang wird als Gasdiffusion der Ladungen bezeichnet.

*) Auszug aus der gleichnamigen in französischer Sprache abgefassten Dissertation (90 S.), welche in der Sammlung „Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, No. 51“ (Rouge & Cie, Lausanne) gleichzeitig erscheint.

Anderseits erzeugt die Raumladung ein elektrisches Feld, dessen radiale Komponente die Ionen ebenfalls gegen die Wand zu bewegt. Um diesen Anteil der Ionenbewegung durch die neutralen Moleküle hindurch von der Gasdiffusion zu unterscheiden, wurde dafür der Ausdruck „elektrische Diffusion“ geprägt (F. DES-SAUER).

Bei konstanter Ionenerzeugung am Rohranfang und stationärer Gasströmung stellt sich im Rohr eine bestimmte Dichteverteilung ein, die wir mit Hilfe der kinetischen Gastheorie mathematisch darstellen konnten. Die Ladungsträger werden als sehr kleine Beimengung eines Fremdgases aufgefasst. In unserer Rechnung wird nur die Gasdiffusion betrachtet; die Schwierigkeiten werden unüberwindlich, wenn man die elektrische Diffusion einbeziehen will. Ihr Einfluss, so gross er bei höhern Dichten auch ist, lässt sich experimentell durch Extrapolation eliminieren.

Der Messung zugänglich ist die mittlere Ionendichte in einem Rohrquerschnitt. Nach der Rechnung nimmt sie in Richtung der Gasströmung exponentiell ab. Der Schwächungskoeffizient hängt einerseits von mehreren durch die experimentellen Bedingungen bestimmten Grössen, anderseits aber von der Masse und dem Durchmesser der Ladungsträger ab. Eine Messung des Schwächungskoeffizienten führt uns daher auf die Grösse der Ionen.

A. Theoretischer Teil.

Ladungsverteilung im unipolar ionisierten Gasstrom.

In einem kreiszylindrischen leitenden Rohr ströme ein Gas mit örtlich und zeitlich konstanter Geschwindigkeit u parallel zur Achse. Das Gas führe Ladungsträger nur eines Vorzeichens mit sich.

Die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle des eigentlichen Gases wie auch des „Ionengases“ ist isotrop und folgt der Maxwellverteilung. Das Äquipartitionstheorem der Energie ist für beide Gase gültig. Die Gasdiffusion ist dem Gradienten der Ionendichte n und dem Diffusionskoeffizienten D des Ionengases im neutralen Gas proportional.

Nach Einführung passender Zylinderkoordinaten betrachtet man einen Elementartorus von der Länge dx an der Stelle x , vom innern resp. äussern Radius r und $r + dr$. Nun stellt man die Bilanz der Ladungen auf, die in der Zeit dt durch Diffusion oder Strömung ein- und austreten:

Ladung, die wegen Diffusion durch die innere Zylinderfläche eintritt:

$$\left(-D \frac{\partial n}{\partial r}\right) 2 \pi r dx dt$$

Ladung, die wegen Diffusion durch die äussere Zylinderfläche austritt:

$$-D \left(\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{d^2 n}{dr^2} dr \right) 2 \pi (r + dr) dx dt$$

sowie vier analoge Terme, deren Zusammenfassung zu folgender Differentialgleichung der stationären Ionendichte bei reiner Diffusion führt:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

Versucht man der elektrostatischen Abstossung wenigstens dadurch Rechnung zu tragen, dass man eine radiale elektrische Diffusion einführt, so gelangt man zur folgenden komplizierten Gleichung:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{4 \pi k}{D} \left(n^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \int_0^r n r dr \right) = 0$$

wobei k die Beweglichkeit der Ionen bedeutet.

Grenzbedingungen an der Wand.

Die Zahl der Ionen, die pro Zeit- und Flächeneinheit auf die Wand auftreffen, beträgt nach dem Gesetz von DALTON

$$\frac{nC}{\sqrt{6\pi}}$$

wo C die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Ionen bedeutet. Dieser Ausdruck gibt uns in erster Annäherung die Zahl der Ionen, die als Funktion der Dichte n in unmittelbarer Nachbarschaft der leitenden Wand verschwinden.

Zur Bestimmung der Wandbedingungen betrachtet man einen Elementartorus mit dem Zylinderradius R als äusserem Radius. Die Ladungsbilanz führt dann auf die Gleichung:

$$-\frac{\partial n}{\partial r} : n = \frac{C}{D \sqrt{6\pi}}$$

Wenn man das Ionengas als Verunreinigung des neutralen Gases betrachtet (sehr schwache Konzentration), so kann nach J.-H. JEANS⁷⁾ die Formel für den Diffusionskoeffizienten nach MEYER vereinfacht werden. Die Wandbedingung lautet damit

$$\boxed{n : - \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{4}{3} l \text{ bei } r = R} \quad (2)$$

l ist die mittlere freie Weglänge der Ionen im neutralen Gas. Da man zeigen kann, dass der Dichtegradient kleiner als 1 ist, während l unter normalen Bedingungen stets sehr klein ist, so wird die Konzentration n in Wandnähe ganz gering.

Lösung der fundamentalen Differentialgleichung.

Die Lösung der Differentialgleichung verdanken wir Herrn Prof. G. DE RHAM. Sie lautet:

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i x} J_0(k_i r)$$

Experimentell misst man den integralen Ionenfluss

$$Q = 2 \pi u \int_0^R n r dr$$

durch einen Querschnitt senkrecht zur Achse. Für leichte Ionen unter normalen Druck- und Temperaturbedingungen sind die Beiträge der Besselfunktionen höherer Ordnung so gering, dass man sich auf den ersten Term beschränken kann. Dann wird der Ionenfluss dargestellt durch

$$Q = Q_0 e^{-\lambda_1 x} \quad (3)$$

mit

$$\lambda_1 = \frac{\pi \varrho_1^2 D}{G} = \frac{2}{3} \varrho_1^2 \frac{\sqrt{2\pi kT}}{G} \cdot \frac{l}{\sqrt{m}} \quad (4)$$

Hierbei bedeutet ϱ_1 die erste Nullstelle der Funktion J_0 , G die Durchflussmenge des Gases, k die Boltzmann'sche Konstante, T die absolute Temperatur und m die Masse des Ions. Diese Gleichung gewinnt man dadurch, dass man jedem wirksamen Freiheitsgrad die mittlere Energie $kT/2$ zuschreibt.

In Fig. 1 sind die theoretischen Kurven konstanter Iondichte dargestellt, wobei zur Berechnung nur der erste Term benutzt wurde: $n = e^{-\lambda_1 x} J_0(k_1 r)$.

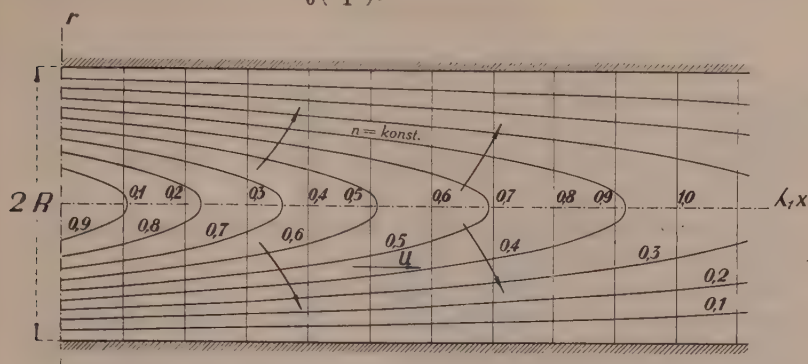


Fig. 1.

Dimension der Ionen und Schwächungskoeffizient.

Wenn die Ladungsträger aus Molekülen des neutralen Gases zusammengesetzt sind, so lässt sich ihre freie Weglänge in diesem Gas wie folgt angeben:

$$l = \frac{1}{v\pi \left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2 \left(1 + \sqrt{\frac{3}{m'}}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{m}{m'}}} \quad (5)$$

Als einzige Unbekannte tritt die Gesamtmasse m auf, da Durchmesser σ' und Masse m' der Einzelmoleküle bekannt sind, während ihre Anzahl v pro Volumeneinheit aus den herrschenden Versuchsbedingungen errechnet wird.

In der folgenden Tabelle sind die λ_1 -Werte für einige verschiedenen aufgebaute Ladungsträger in Luft angegeben. Die Berechnung erfolgte mit Hilfe der Formeln (4) und (5), wobei die Durchflussmenge zu 1000 cm³/sec, der Druck zu 711 mm Hg und die Temperatur zu 19,5° C festgesetzt sind.

Ionaufbau	Freie Weglänge $l \cdot 10^6$ cm	Diffusionskoeffizient D	Schwächungskoeffizient $\lambda_1 \cdot 10^3$
1 Luftmolekül . .	6,85	0,106	1,92
2 Luftmoleküle .	4,38	0,0477	0,867
3 Luftmoleküle .	3,25	0,0289	0,526
2 O ₂	4,38	0,0453	0,825
2 N ₂	4,37	0,0483	0,878
2 H ₂ O	4,00	0,0552	1,004
H ₂ O + O ₂	4,05	0,0473	0,862
CO ₂	4,83	0,0603	1,096

B. Experimenteller Teil.

Versuchsaufbau.

Die Formel (3) zeigt, dass der Schwächungskoeffizient λ_1 aus Messungen des Ionenflusses Q in verschiedenen Abständen vom Rohranfang abgeleitet werden kann. Hierzu dient der in Fig. 2 dargestellte geschlossene Luftkreislauf, welcher folgende wesentliche Teile aufweist:

Eine Ionisierungskammer mit anschliessender Ionentrennvorrichtung mittels elektrischer Felder,

das metallische Rohr von veränderlichem Durchmesser und abgestufter Länge, in welchem der Ionenverlust studiert wird,

eine Vorrichtung zur Messung des Ionenflusses, auf einem Wagen montiert, bestehend aus Zylinderkondensator, Einfaderelektrometer und Piëzoquarz,

einen Gasmesser zur Bestimmung der Durchflussmenge,

ein Zentrifugalgebläse,

ein Aspirationspsychrometer vom Typ Assmann zur Messung der Gasfeuchtigkeit

und einen Trockenturm zur Regelung der Feuchtigkeit.

Der Ionenverlust wurde in Aluminiumrohren von 1,5, 3, 4,8 und 7,6 cm Innendurchmesser gemessen, deren Länge zwischen 0 und 350 cm geändert werden konnte.

Rechnung und Rauchfadenversuch zeigen übereinstimmend, dass bei der konstanten Gasmenge von $1000 \text{ cm}^3/\text{sec}$ die Strömung in den 7,6 und 4,8 cm-Rohren laminar ist. Beim 3 cm-Rohr fällt sie ins Umschlagsgebiet, während im 1,5 cm-Rohr Turbulenz herrscht.

Der Trockenturm erlaubt je nach Beschickung mit P_2O_5 , CaCl_2 oder H_2O relative Feuchtigkeiten zwischen 24 und nahezu 100% einzuhalten.

Druck, Temperatur, Feuchtigkeit und der geringe Druckabfall im Messrohr wurden regelmässig beobachtet.

Herstellung einer konstanten unipolaren Strömung.

Wir haben verschiedene Typen von Ionisationskammern studiert; eine davon wurde bereits an dieser Stelle beschrieben (G. JOYET⁸). Die Konstanz des Ionenflusses wird durch Verwendung eines Radiumpräparates im radioaktiven Gleichgewicht gesichert. Die Ionisierung ist hauptsächlich auf die β -Strahlen zurück-

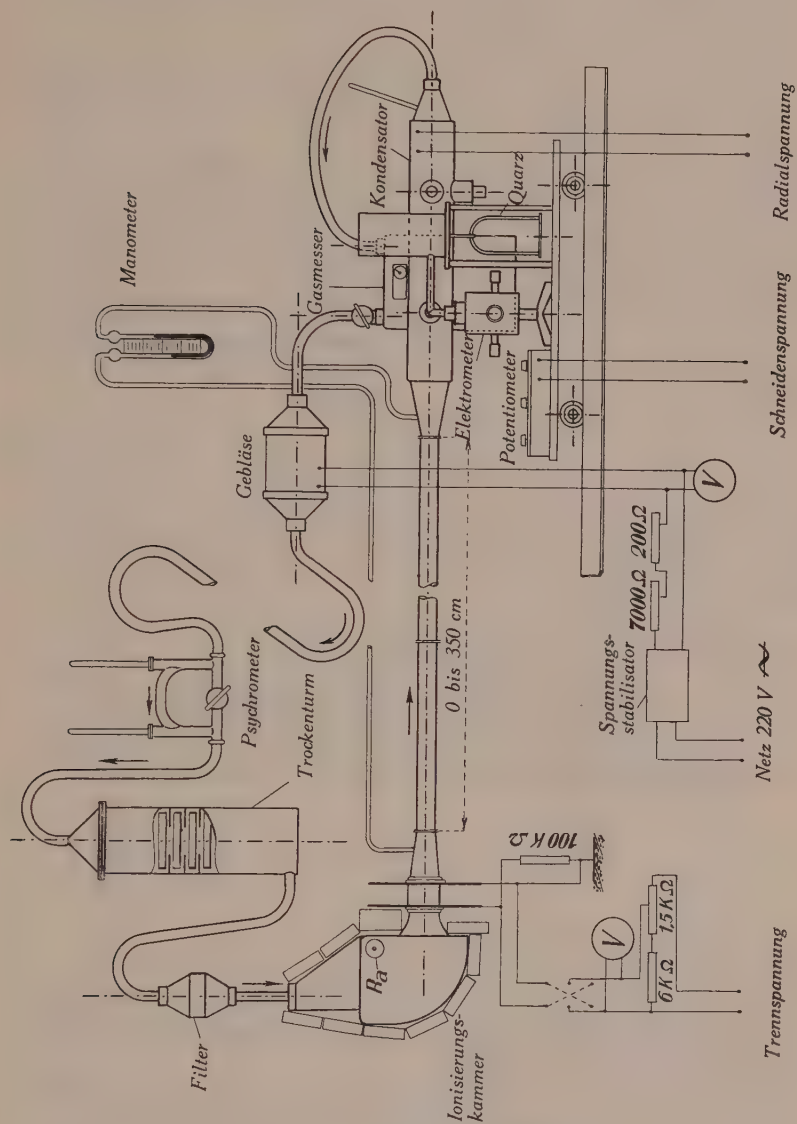


Fig. 2.

zuführen; ihre Intensität kann mittels einer Blende aus Blei veränderlicher Dicke reguliert werden. Die spezielle Form der Kammer in Verbindung mit der fächerförmigen Abschirmung verhindert die Bildung störender Ionenpaare in der Unipolarströmung durch γ - oder sekundäre β -Strahlen.

Das elektrische Trennfeld ist sehr nahe am Ausgang der Kammer angeordnet, um die Dauer der bipolaren Gasströmung und damit die Rekombination gering zu halten.

Durch geeignete Potentialverteilung muss verhindert werden, dass die Unipolarströmung durch äussere Felder gestört wird. Das Rohr, in welchem die Ionen verschwinden, ist geerdet, während die Ionisierungskammer an Spannung liegt. Das Trennfeld bildet sich zwischen zwei Paralleldrahtgittern aus, die sich am Anfang bzw. Ende der oben genannten Bauteile befinden. Der Trennungsgrad in Abhängigkeit von Spannung und Gitterdimensionen wurde experimentell bestimmt.

Messmethode.

Wir haben die Strömungsmethode von Zeleny angewandt. Das Gas strömt axial durch einen Zylinderkondensator, wobei die Ionen unter der Wirkung des angelegten radialen Feldes an die innere Elektrode gelangen. Wir verwandten die Ladungsmethode, weil diese am empfindlichsten ist. Die innere Elektrode wird dabei mit

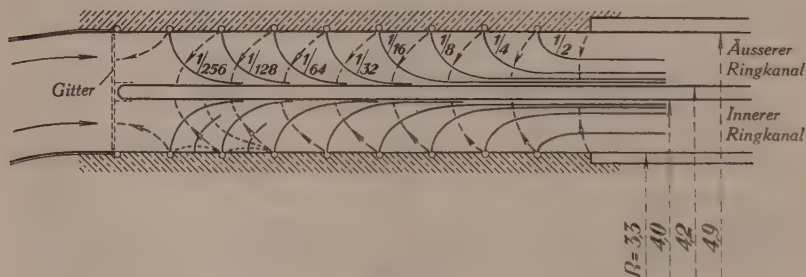


Fig. 3.

einem Fadenelektrometer nach Wulf und einem Piëzoquarz verbunden. Die aufgenommene Ladung wird durch eine entgegengesetzte kompensiert, welche erzeugt wird durch Änderung der mechanischen Spannung des Quarzes.

Bei der Konstruktion dieses Apparates wurden die Erfahrungen verschiedener Autoren verwertet (W. F. G. SWANN⁹), O. II. GISH⁹), II. TH. GRAZIADEI¹⁰) und besonders II. ISRAEL¹¹)).

Das Gas strömt laminar durch zwei konzentrische Kanäle von 60 cm Länge (Fig. 3). Bei einer Gasmenge von 250 cm³/sec genügt

ein Potentialunterschied von 500 Volt zur Erfassung aller Ionen mit Beweglichkeiten grösser als $10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1} \text{ V}^{-1}$.

Will man gleichzeitig leichte und schwere Ionen erfassen, so ist dem ablenkenden Streufeld am Eintritt zum Messkondensator besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Die Anordnung von SWANN, die sich für leichte Ionen eignet, schien uns nicht mehr zu genügen bei so hohen Feldern, wie sie die schweren Ionen verlangen.

Wir beseitigten das Gegenfeld durch ein System von leitenden konzentrischen Ringen, wobei jeder auf das doppelte Potential des vorangehenden gebracht wird, bis die volle Ablenkspannung erreicht ist. Die Ringe werden über ein Potentiometer von dieser Spannung gespeist. Der erzielte Feldverlauf ist in Fig. 3 skizziert. Die Auffangelektrode ist überdies an der Eintrittsseite mit einem feinmaschigen Metallgitter versehen.

Die Auffangspannung muss mit grösster Sorgfalt konstant gehalten werden; Variationen von einigen mV machen sich schon als Nullpunktverlagerung des Elektrometerfadens bemerkbar. Entsprechendes gilt für die Schneidenspannung des Elektrometers.

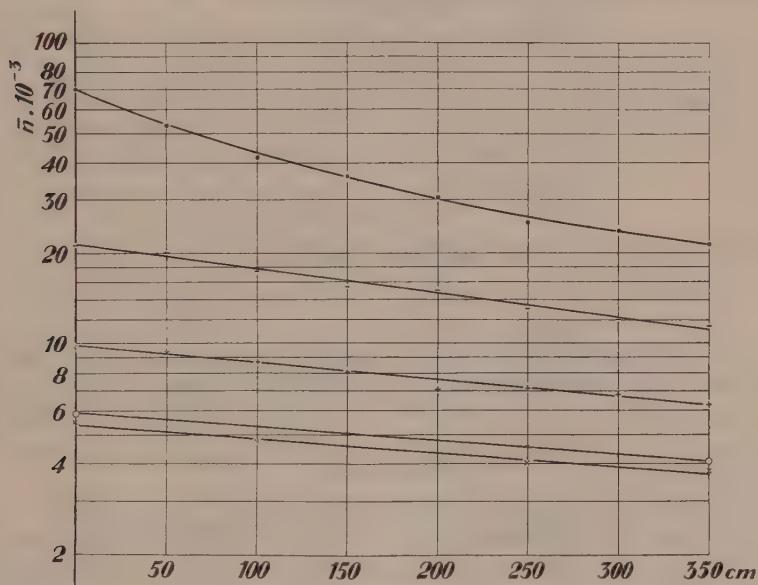


Fig. 4.

Experimentelle Resultate.

Anfänglich wurden die Diffusionsmessungen bei hohen Dichten von 2 bis $7 \cdot 10^4$ Ionen/cm³ ausgeführt. Die dabei erhaltenen Schwä-

chungskoeffizienten sind bedeutungslos, weil die Raumladungskräfte zu gross sind. Ihr Einfluss steigt mit der Ionendichte und mit der Verweilzeit der Ionen im Messrohr, während die Gasdifffusion von beiden Grössen unabhängig ist. Diese Bemerkung führt auf zwei Extrapolationsmethoden zur Gewinnung des Schwächungskoeffizienten bei reiner Gasdiffusion: Entweder abnehmende Ionendichte oder abnehmender Rohrquerschnitt.

Für leichte positive Ionen ist in Fig. 4 der Ionenfluss in Abhängigkeit von der Rohrlänge dargestellt. Als Ordinate ist der Logarithmus der Ionendichte n aufgetragen. Mit sinkender Anfangsdichte strecken sich die Kurven zu Geraden, deren Neigungswinkel den Schwächungskoeffizienten angibt.

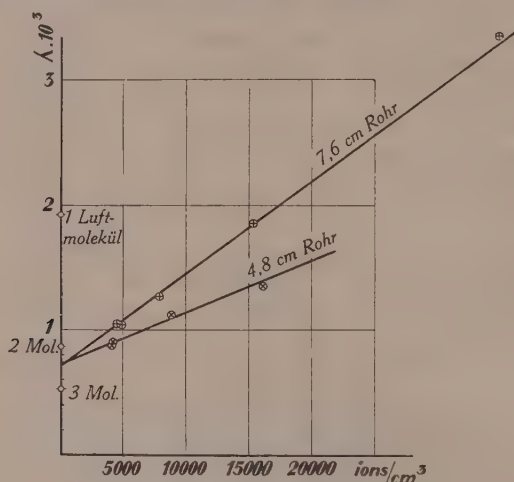


Fig. 5.

In Fig. 5 ist die Extrapolation auf verschwindende Dichte für zwei Rohrdurchmesser durchgeführt. Der Ordinatenabschnitt der Geraden ergibt den gesuchten Wert. Die Extrapolation auf Rohrdurchmesser null führt innerhalb der Fehlergrenzen auf dasselbe Resultat, nämlich

$$\lambda_{+} = (0,8 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \quad \lambda_{-} = (1,0 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$$

bei 711 mm Hg mittlerem Druck, 19,5° C und der Gasmenge 1000 cm³/sec.

Wie die Beweglichkeit ist auch die Diffusion verschieden für Ionen beider Vorzeichen; das negative Ion diffundiert schneller. Vergleicht man nun die erhaltenen Werte mit den theoretisch berechneten, so ergibt sich folgendes:

Das positive leichte Ion ist aus 2 bis 3 Luftmolekülen aufgebaut; der Wert ist näher bei 2.

Das negative leichte Ion hat die Dimension von zwei Wasser- oder Sauerstoffmolekülen, oder auch von einem Komplex aus einem Wasser- und einem Sauerstoffmolekül.

Durch Verfeinerung der Messungen sollte es möglich sein, zu entscheiden, ob die Molekülkomplexe dauerhaft sind, oder durch Stöße ständig zerstört und neugebildet werden.

Bei turbulenter Strömung erhöhen sich die λ -Werte auf das 5–6fache gegenüber dem laminaren Fall. Darauf liesse sich eine neue experimentelle Methode zur Unterscheidung der beiden Strömungsformen aufbauen.

Den Herren Dr. P. MERCIER, Proff. A. PERRIER, A. ROSSELET und G. DE RHAM möchten wir für ihre Hilfe und das stete Interesse an dieser Arbeit unsern Dank aussprechen.

Lausanne, Centre anticancéreux romand.

Bibliographie.

- ¹⁾ P. LANGEVIN: Ann. de Chim. et de Phys. **5**, 245, 1905.
- ²⁾ P. LENARD: Ann. d. Phys. **60**, 329–380, 1919; **61**, 665–741, 1920.
- ³⁾ M. LAPORTE: J. de Phys. et Rad., VIII **3**, 235, 1927; Ann. de Phys. X, 7–8, 466–554, 1927.
- ⁴⁾ H. A. ERIKSON: Phys. Rev. **34**, 635–643, 1929.
- ⁵⁾ H. SCHILLING: Ann. d. Phys. **83**, 23–79, 1927.
- ⁶⁾ L. B. LOEB: Ann. d. Phys. **84**, 689, 1927.
- ⁷⁾ J.-H. JEANS: Théorie dynamique des gaz. Trad. A. Clerc (A. Blanchard, Paris 1925).
- ⁸⁾ G. JOYET: H.P.A. XIII, **5**, 339–342, 1940; XV, **4**, 338–339, 1942.
- ⁹⁾ O. H. GISH: Gerlands Beitr. z. Geoph. **35**, 1–5, 1932.
- ¹⁰⁾ H. TH. GRAZIADEI: Phys. Zeitsch. XXXIV, 82–88, 1933.
- ¹¹⁾ H. ISRAËL: Gerlands Beitr. z. Geoph. **31**, 173–216, 1931; **40**, 29–43, 1933.

Anmerkung.

Ein Jahr nach Beendigung dieser Arbeit wurden wir darauf aufmerksam gemacht, dass J. S. TOWNSEND*) dieses Diffusionsproblem bearbeitet hat. Unter Vernachlässigung der axialen Diffusion erhält er die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{2 \bar{u}}{D K^2} (R^2 - r^2) \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

wobei eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung mit der mittleren Geschwin-

*) J. J. THOMSON, Conduction of electricity through gases, 1906, p. 30.

digkeit \bar{u} vorausgesetzt wird. Durch Reihenentwicklung, ohne Verwendung Besselscher Funktionen, gelangt er zur Näherungslösung:

$$\frac{Q}{Q_0} = 4 \left\{ 0,1952 e^{-\frac{7,313 Dx}{2 R^2 \bar{u}}} + 0,0243 e^{-\frac{44,56 Dx}{2 R^2 \bar{u}}} + \dots \right\}$$

für das Verhältnis der Ionenflüsse bei den Abszissen x und O . Diese Lösung ist analytisch ziemlich verschieden von der unseren, weil die Ionisierung am Rohranfang nicht gleich angenommen wird. TOWNSEND führte seine Versuche mit bipolarer Strömung durch. Durch Verwendung enger und kurzer Rohre (0,3 cm Durchmesser, 1 und 10 cm lang) wird die Rekombination vernachlässigbar klein gehalten. Statt nach dem Schwächungskoeffizienten λ wird nach dem Diffusionskoeffizienten D gefragt. Unsere Werte liegen um etwa 25% höher. In Anbetracht der verschiedenen Rechen- und Messmethoden ist die Übereinstimmung befriedigend.

In der ungekürzten Dissertation befassen wir uns eingehender mit dieser Arbeit.

Die Rahmenantenne als Empfangsantenne

von Josef Müller-Strobel und Jean Patry.

(24. I. 1944.)

1. Einleitung.

HALLÉN¹⁾ zeigte wie eine Rahmenantenne ähnlich der geraden Empfangsantenne auf Grund der Maxwell'schen Theorie berechnet werden kann. Eine praktische brauchbare Schlussformel für die Rahmenantenne hat HALLÉN nicht bekanntgegeben.

Es ist deshalb der Gegenstand der folgenden Untersuchung eine brauchbare Schlussformel für die Rahmenantenne zu entwickeln. Folgende Annahmen mussten getroffen werden: der Rahmen ist ein Kreis, der Drahtradius ϱ ist klein gegenüber dem Rahmenradius a , der Rahmenradius a ist klein gegenüber der Wellenlänge λ des einfallenden Feldes. Diese Annahmen berechtigen zum Schluss, dass in den später folgenden Potenzreihenentwicklungen nur die ersten Glieder zu berücksichtigen sind.

Die Gültigkeit der Schlussformel wird für grössere Rahmen im Lang- und Mittelwellenbereich, für kleinere Rahmen im Kurzwellengebiet gewährleistet sein.

Im folgenden sind die Bezeichnungen nach HALLÉN zusammengestellt:

Rahmenradius:	a [m]
Drahtradius:	ϱ
Anzahl der Windungen des Rahmens:	N
Koordinate längs des Drahtes:	x, ξ
Winkelkoordinate:	φ, α, β

Abstand zwischen 2 Punkten des Rahmens:

$$r = \sqrt{4 a^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi - \alpha}{2} \right) + \varrho^2}$$

Näherungsgrösse: $y = 2 \cdot a \cdot \sin \left(\frac{\varphi - \alpha}{2} \right)$

Tangentielle Feldstärke des äusseren Feldes am Rahmen: \mathfrak{E}_0

Die zu \mathfrak{E}_0 gehörende magnetische Feldstärke: \mathfrak{H}_0

Elektrische und magnetische Feldstärke des Feldes: $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$

Antennenstrom längs der Antenne: $\mathfrak{I}(x)$

Stromdichte: i

Klemmenspannung des Empfangskreises: $2 \mathfrak{U}$

Impedanz des Empfangskreises \mathfrak{R}_e

Wellenwiderstand der Einheitslänge des Rahmens: r_w

Totaler Wellenwiderstand der Rahmenantenne: \mathfrak{R}_w

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{s} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega}$

Wellenparameter: $s = 2\pi/\lambda$

Radiusparameter: $\eta = a \cdot s = a 2\pi/\lambda$

In der vorliegenden Untersuchung ist der Antenneneffekt, d. h. die kapazitive Wirkung des Rahmens gegenüber der Erde nicht berücksichtigt. Es wird daher nur der Strom berechnet, der durch den Empfangskreis, wenn letzterer entweder in der Mitte, oder überhaupt nicht geerdet ist, fließt.

2. Die Grundgleichungen.

HALLÉN¹⁾ hat auf Grund der Maxwell'schen Theorie folgende Gleichungen aufgestellt:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{i_{t+\tau/c}}{r} dv \quad (1)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(i)_{t-\tau/c}}{r} d\xi \quad (2)$$

wo V das skalare elektrische Potential bedeutet. Die magnetische und die elektrische Konstante μ und ε sind beide gleich 1 gesetzt.

Das Prinzip der HALLÉN'schen Theorie liegt in der Vernachlässigung von (ϱ/a) und (ϱ/λ) , aber nicht deren Logarithmen.

Nach Einführung der Definition:

$$x = a \cdot \varphi \quad (3)$$

$$\xi = a \cdot \alpha \quad (4)$$

$$\cos(x\xi) = \cos(\varphi - \alpha) \quad (5)$$

und eines exponentiellen Zeitfaktors, wird:

$$j s c V(\varphi) = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{d\varphi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{I}(\alpha) \cdot e^{-jsr}}{r} d\alpha \quad (6)$$

$$j s c \mathfrak{E}_0(\varphi) = j \frac{s c}{a} \cdot \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - \frac{s^2 a}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-jsr} \cdot \mathfrak{I}(\alpha) \cdot \cos(\alpha - \varphi)}{r} d\alpha \\ + j s c r_w \mathfrak{I}(\varphi) \quad (7)$$

Die Integrationsgrenzen der Integrale 6,7 von $-\pi$ bis $+\pi$ deuten darauf hin, dass der mehrwindige Rahmen bei $\varphi = \pm \pi$ mit der Empfängerimpedanz \Re abgeschlossen ist. Ist N die Windungszahl des Rahmens, so wird die Klemmenspannung definitionsgemäss:

$$2\mathfrak{U} = N(V_{(-\pi)} - V_{(+\pi)}) = -N \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi \quad (8)$$

$V(\varphi)$ lässt sich aus den Gl. 6,7 eliminieren. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} j4\pi\eta c\mathfrak{E}_0 = & - \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \eta^2 \right] \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\alpha) \cdot e^{-jsr}}{r} d\alpha \\ & + \eta^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\alpha) \cdot e^{-jsr}}{r} (1 - \cos(\varphi - \alpha)) d\alpha + 4\pi j\eta c \mathbf{r}_W \cdot \mathfrak{J}(\alpha) \end{aligned} \quad (9)$$

Daraus folgt der Wert des Integrales:

$$\begin{aligned} aF(\varphi) = a \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\alpha) e^{-jsr}}{r} d\alpha = B \cos(\varphi\eta) + \int_0^\varphi \sin \eta(\varphi - \alpha) d\alpha \left\{ \right. \\ \left. \eta \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\beta) e^{-jsr} (1 - \cos(\alpha + \beta))}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\alpha + j4\pi a c (\mathbf{r}_W \mathfrak{J} - \mathfrak{E}_0) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

B wird später durch die Grenzbedingung

$$\mathfrak{J}(\pi) = \mathfrak{J}(-\pi) = -\frac{2\mathfrak{U}}{\Re_e} \quad (11)$$

bestimmt. Es ermöglichen uns die Gl. 6 und 8 eine weitere Beziehung abzuleiten:

$$\begin{aligned} j8\pi\eta c \frac{\mathfrak{U}}{N} = & 4\pi j\eta a c \int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{E}_0(\varphi) d\varphi + \\ & + \eta^2 \left\{ \frac{4\pi j a c \Re_0}{\eta} + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{jsr} (1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\alpha \right. \\ & \left. - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-jsr}}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\alpha \right\} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{J}(\alpha) d\alpha \quad (12) \end{aligned}$$

Da $a/r \ll 1$ ist, kann in der Integralen der G. 12 die Grösse r ersetzt werden durch:

$$r \rightarrow y = 2a \left| \sin \left(\frac{\varphi - \alpha}{2} \right) \right| \quad (13)$$

3. Ableitung einer Näherungslösung für kleinere Rahmen.

Ist das Verhältnis Rahmenradius zu Wellenlänge der einfallenden Strahlung klein; also

$$\eta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (14)$$

so lassen sich Vereinfachungen dahin vornehmen, dass in den Reihenentwicklungen von η nur die niedrigsten Potenzen von η berücksichtigt werden müssen. Um die Gl. 10, 12 unter den Voraussetzungen lösen zu können, stellt man die Gleichung der Ströme und Spannungen bzw. Feldstärken als Fourierreihen dar,

$$\mathfrak{I}(\varphi) = \frac{i_0}{2} + \sum_n i_n \cos(n\varphi) + \sum_n i'_n \sin(n\varphi) \quad (15)$$

$$\mathfrak{E}_0(\varphi) = \frac{e_0}{2} + \sum_n e_n \cos(n\varphi) + \sum_n e'_n \sin(n\varphi) \quad (16)$$

Führt man den Integralwert

$$c_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(n\varphi)}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\varphi \quad (17)$$

ein, so entsteht aus Gl. 12 die neue Gleichung

$$j8\pi c \eta \frac{\mathfrak{U}}{N} = -4\pi j a c (\pi \cdot e_0) + \eta^2 (\pi i_0) \left(\frac{4\pi j a c r_W}{\eta} - c_0 + 4 \right) \quad (18)$$

Analog erhält man für Gl. 10 eine neue Beziehung,

$$\begin{aligned} & \frac{i_0}{2} c_0 + \sum_n i_n c_n \cos(n\varphi) + \sum_n i'_n c_n \sin(n\varphi) = \\ & + B \cos(\eta\varphi) \\ & + 1/\eta (1 - \cos(\eta\varphi)) \left\{ \eta \frac{4i_0}{2} - 2\pi j a c (e_0 - r_W i_0) \right\} \\ & + \eta \cos(\eta\varphi) \sum_n \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{4\eta i_n}{1-4n^2} 4\pi j a c (e_n - r_W i_n) \right\} \\ & - \eta \sum_n \frac{\cos(n\varphi)}{n^2} \left\{ \frac{4\eta i_n}{1-4n^2} - 4\pi j a c (e_n - r_W i_n) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

In der Entwicklung der Gl. 19 sind alle Sinusglieder weggelassen. Ihre Existenz bedeutete nämlich einen antisymmetrischen Strom

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = -\mathfrak{I}(-\varphi) \quad (20)$$

der durch die kapazitive Wirkung der Antenne gegenüber Erde hervorgerufen wird. Voraussetzungsgemäss berücksichtigen wir den Antenneneffekt nicht, weshalb der antisymmetrische Stromanteil für unsere Betrachtung belanglos wird.

Fasst man alle Koeffizienten des Faktors $\cos(\eta\varphi)$ in einer Grösse D zusammen, so wird,

$$D = B - \frac{1}{\eta} \{ 2 i_0 \eta - 2 \pi j a c (e_0 - r_W i_0) \} \\ + \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{4 \eta i_n}{1 - 4 n^2} - 4 \pi j a c (e_n - r_W i_n) \right\} \quad (21)$$

Man entwickelt $\cos(\eta\varphi)$ in eine Reihe. Gl.19 zerfällt dann in unendlich viele Gleichungen, die von φ unabhängig sind. Berücksichtigt man nur das erste Glied der Entwicklung, also $m=1$ nach Gl. 27, so wird Gl. 19

$$\frac{i_0}{2} \left(c_0 - 4 - \frac{4 \pi j a c r_W}{\eta} \right) = D - \frac{2 \pi j a c \cdot e_0}{\eta} \quad (22)$$

Für $n \geq 1$ wird,

$$i_n \left(c_n - \frac{4 \eta^2}{4 n^4 - n^2} + \frac{4 \pi j a c \eta r_W}{n^2} \right) = \frac{2 \eta^2}{n^2} \left(D \cdot (-1)^n - \frac{2 \pi j a c e_n}{\eta} \right) \quad (23)$$

D lässt sich aus den Gl. 22, 18 eliminieren und heisst:

$$D = - \frac{4 j c}{\eta} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{N} \quad (24)$$

Aus der Grenzbedingung 11 lässt sich nun eine Gleichung zwischen \mathfrak{U} und e_n der Gl. 16 herleiten:

$$\mathfrak{J}(\pi) = - \frac{2 \mathfrak{U}}{\Re_e} = \\ - \frac{4 j c}{\eta} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{N} \left(\frac{1}{c_0 - 4 - \frac{4 \pi j a c r_W}{\eta}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \eta^2 (-1)^n}{c_n - \frac{4 \eta^2}{4 n^4 - n^2} - \frac{4 \pi j a c \eta r_W}{n^2}} \right) \\ - \frac{2 \pi j a c}{\eta} \left(\frac{e_0}{c_0 - 4 - \frac{4 \pi j a c r_W}{\eta}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \eta^2 e_n}{c_n - \frac{4 \eta^2}{4 n^4 - n^2} - \frac{4 \pi j a c \eta r_W}{n^2}} \right) \quad (25)$$

4. Schlussformel.

Unter Berücksichtigung der Gl. 14 lässt sich Gl. 25 vereinfachen. Wir nehmen an: die einfallende Strahlung besitze eine elektrische Feldstärke parallel zur Achse $\varphi = \pi/2$. e_1 ist dann am grössten. Die Teilspannungen e_n lassen sich dann wie folgt berechnen: Die tangentielle Feldstärke des äusseren Feldes am Rahmen ist mit \bar{H}_\perp als Mittelwert

$$\mathfrak{E}_0 = e^{-j\eta \cos \varphi} \cos \varphi \cdot H_\perp \quad (26)$$

Die Fourierzerlegung der Exponentialfunktion in 26 führt auf BESSEL'sche Funktionen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{H}_\perp} \cdot \mathfrak{E}_0 &= J_0(-\eta) \cos \varphi \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} J_m(-\eta) \cdot j^m (\cos(m-1)\varphi + \cos(m+1)\varphi) = j J_1(-\eta) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\varphi) j^{m-1} (J_{m-1}(-\eta) - J_{m+1}(-\eta)) \end{aligned} \quad (27)$$

Für kleine Werte von η (siehe Voraussetzung) gilt die Näherung

$$J_n(-\eta) = (-1/2 \eta) \frac{1}{n!} \quad (28)$$

Es lassen sich nun die einzelnen Teilspannungen bestimmen. Sie sind:

$$e_0 = -j\eta \bar{H}_\perp \quad (29)$$

$$e_1 = 1 \cdot \bar{H}_\perp \quad (30)$$

$$e_2 = \frac{j\eta}{2} \bar{H}_\perp \quad (31)$$

Weiter lassen sich die Integrale in Gl. 17 nach Berücksichtigung der Gl. 14 näherungsweise berechnen. Es sind:

$$c_0 = 2 \ln \left(\frac{8a}{\varrho} \right) = 2 \ln \left(\frac{a}{\varrho} \right) + 4,16 \quad (32)$$

$$c_n = c_0 - 4 \sum_{u=1}^{k=n} \frac{1}{2k-1} = c_0 - g_n \quad (33)$$

wobei g eine schwache Funktion von n ist. Ist die Bedingung,

$$n \leq \frac{a}{4\varrho} = M \quad (34)$$

erfüllt, so werden die Nenner der Gl. 25 immer von Null verschieden sein. Beschränken wir uns auf das Gültigkeitsgebiet der Gl. 35, so lässt sich die zweite Reihe in Gl. 25 folgendermassen umschreiben:

$$\frac{e_0}{\left(c_0 - 4 - \frac{4\pi j a c r_W}{\eta}\right)} - \sum_{n=1}^{n \leq M} \frac{2\eta^2 \cdot e_n}{\left(c_n - \frac{4\eta^2}{4n^4 - n^2} + \frac{4\pi j a c \eta r_W}{n^2}\right)} \\ = b_0 \eta + b_1 \eta^2 + b_2 \eta^3 + \dots \quad (35)$$

Es sind die b_n alle von derselben Grössenordnung. Es zeigt sich, dass man für die Herleitung der Schlussformel bei der gemachten Voraussetzung nur das Glied

$$e_0 = -j\eta \bar{H}_\perp \quad (36)$$

zu berücksichtigen braucht. Man erhält dann für die Gl. 25 die neue Beziehung

$$-2 \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}_e} \left(c_0 - 4 - \frac{4\pi j a c r_W}{\eta} - \frac{2j c \mathfrak{R}_e}{\eta N} \right) = - \frac{2\pi j a c e_0}{\eta} = \\ - 2\pi a c \bar{H}_\perp \quad (37)$$

woraus die Schlussformel folgt,

$$\mathfrak{I}(\pi) = \mathfrak{I}(-\pi) = - \frac{2\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}_e} = \frac{2\pi a c \bar{H}_\perp}{4 - c_0 + \frac{4\pi j a c r_W}{\eta} + \frac{2j c \mathfrak{R}_e}{\eta N}} \quad (38)$$

Die Gl. 38, 39 sind im Lorentz-Heaviside Maßsystem geschrieben. Im technischen Maßsystem lautet die Gl. 38

$$\mathfrak{I}(\pi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \bar{H}_\perp}{4 - c_0 + \frac{4\pi j a r_W}{30\eta} + 2j \frac{\mathfrak{R}_e}{30\eta N}} \quad (39)$$

Diese Schlussformel hat eine ähnliche Form wie diejenige für die gerade Empfangsantenne⁴⁾. \bar{H}_\perp ist definitionsgemäss eine positiv reelle Grösse.

Die Ersatzimpedanz der Antenne lässt sich ableiten als:

$$\mathfrak{R}_a = 2\pi a N r_W + j \cdot 15 \eta N (c_0 - 4) = \mathfrak{R}_W + j \cdot 30 \eta N \left(\ln \left(\frac{a}{\varrho} \right) + 0,08 \right) \quad (40)$$

Das zweite Glied in Gl. 41 entspricht einer Induktivität des Rahmens von:

$$L_a = \frac{30 a N}{c} \left(\ln \left(\frac{a}{\varrho} \right) + 0,08 \right) \quad (41)$$

5. Numerisches Beispiel und Schlussfolgerung.

In Fig. 1 ist der Verlauf von $|\mathfrak{I}(\pi)|$ in Funktion der Impedanz

$$Z_0 = \frac{\Re_e}{N} \cdot \frac{1}{(0,1 + j)}$$

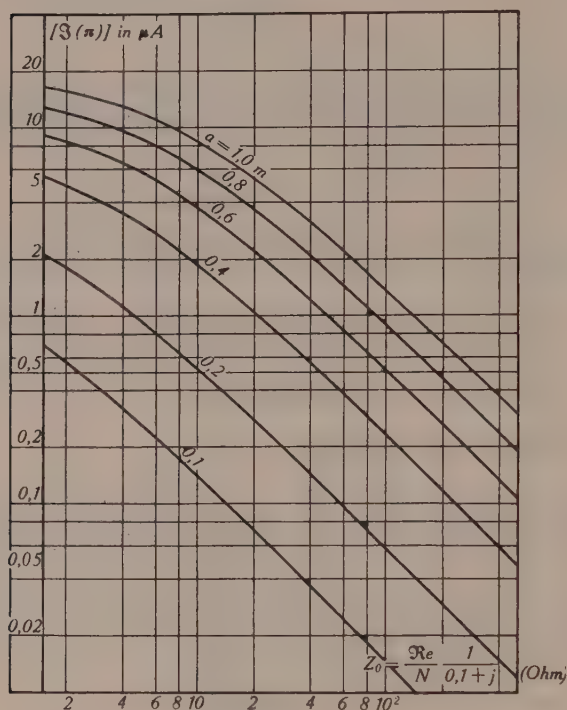


Fig. 1.

mit dem Parameter Radius a der Rahmenantenne dargestellt. Folgende Daten wurden zu Grunde gelegt:

$$\Re_e = N (0,1 + 1 \cdot j) Z_0$$

$$\overline{H}_\perp = 1 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

$$Z_0 = 1,5 \text{ bis } 500$$

$$\lambda = 314,15 \text{ m}$$

$$r_w = 1,5 \cdot \pi \cdot (0,1 + 1 \cdot j)$$

$$a = 0,1 \text{ bis } 1,0 \text{ m}$$

$$\varrho = 0,05 \text{ cm}$$

Eine Resonanz tritt nicht auf, weil die Antenne sowie der Empfangskreis induktiv wirken.

Wirkt der Rahmen induktiv oder schwach kapazitiv, werden die Real- und Imaginärteile des Stromes $\mathfrak{J}(\pi)$ negativ. Die Existenz des Vorzeichens ist darauf zurückzuführen, weil \bar{H}_\perp definitionsgemäss eine positiv reelle Grösse ist (Gl. 26). Die induzierte Spannung und der Strom kommen deshalb in den 3. und 4. Quadranten zu liegen.

6. Zusammenfassung.

Ausgehend von der Theorie von HALLÉN wird eine Näherungslösung für die Rahmenantenne (Kreis) mit N Windungen abgeleitet. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln sind: Der Rahmen ist ein Kreis, der Drahtradius ϱ ist klein gegenüber dem Rahmenradius a , der Rahmenradius a ist klein gegenüber der Wellenlänge λ des einfallenden Feldes.

Diese Annahmen sind im Lang- und Mittelwellengebiet praktisch immer, im Kurzwellengebiet bei kleineren Rahmen ebenfalls, erfüllt.

Aus Platzgründen sind alle Zwischenrechnungen weggelassen.

Albiswerk Zürich AG.

Literatur.

¹⁾ HALLÉN: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsalensis, Vol. XI, Fasc. I, S. 1: Theoretical Investigations into the transmitting in receiving qualities of antennae.

²⁾ HALLÉN: Arch. Elektrotechn. 32 (1938), S. 128.

³⁾ FRANK-VON MISES: Diff.- und Integralgl. der Physik Bd. 2 (1935), S. 867.

⁴⁾ MÜLLER-STROBEL und PATRY: Die gerade Empfangsantenne. Ableitung einer Schlussformel. Helv. Phys. Acta, XVII (1944) S. 127.

⁵⁾ F. VILBIG und J. ZENNECK: Fortschritte der Hochfrequenztechnik: S. 235—308, Leipzig, 1941.

F. VILBIG: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik Bd. I, Leipzig, 1942.

Ionosphärische Bestimmung der UV-Intensitäten der Sonnenstrahlung im Bereich 700–900 Å

von M. Waldmeier.

(14. III. 1944.)

Es wird gezeigt, dass der Ausdruck $f_0^n/\cos\chi$ (f_0 = Grenzfrequenz der E-Schicht, χ = Zenitdistanz der Sonne) proportional ist der extraterrestrischen Intensität der die E-Ionisation erzeugenden Strahlung. Empirische Bestimmung des Exponenten ergab $n = 3$ (im Gegensatz zu dem bisher angenommenen Wert $n = 4$). Die berechneten Intensitäten zeigen einen jährlichen Gang mit gut definiertem Maximum im Dezember/Januar und einem flachen Minimum im Spätsommer, welcher auf den jahreszeitlichen Gang der Ionosphärentemperatur zurückgeführt wird. Die nach Elimination der jährlichen Periode erhaltenen extraterrestrischen Intensitäten S_0 der E-Strahlung zeigen in den Monatsmitteln eine sehr enge Korrelation mit der durch die Fleckenrelativzahl R ausgedrückten Sonnenaktivität. Die Beziehung zwischen S_0 und R ist linear; zur Zeit des Sonnentätigkeitsmaximums ist S_0 rund doppelt so gross als zur Zeit des Minimums. Es wird gezeigt, dass die E-Strahlung, die wahrscheinlich in der Gegend von 700–900 Å liegt, in ihren statistischen Eigenschaften (Amplitude, Linearität, Korrelation) mit denjenigen der von BARTELS aus den sonnentägigen erdmagnetischen Variationen erschlossenen W-Strahlung übereinstimmt, woraus folgt, dass diese Variationen ausschliesslich auf die E-Ionisation, also ein Stromsystem in rund 110 km Höhe zurückzuführen sind.

1. *Der Zusammenhang der UV-Intensität der Sonnenstrahlung mit der Elektronendichte der Ionosphäre.* Wir betrachten für die folgenden Überlegungen¹⁾ die Erdatmosphäre als eben und stellen ihre Dichte näherungsweise dar durch

$$\varrho = \varrho_0 \cdot e^{-h/H}, \quad (1)$$

wobei ϱ_0 die Dichte im Meeresniveau, ϱ diejenige in der Höhe h und $H = RT/\mu g$ die Höhe der homogenen Atmosphäre bedeutet (R = Gaskonstante, T = absolute Temperatur, μ = Molekulargewicht, g = Schwerebeschleunigung). Nun betrachten wir ein Strahlenbündel von 1 cm² Querschnitt, das von der Sonne kommt und unter dem Winkel χ gegen die Normale zur Erdoberfläche einfällt (χ = Zenitdistanz der Sonne); es soll sich dabei um eine monochromatische Strahlung von der extraterrestrischen Intensität S_0 handeln. In einer Schicht der Dicke dh durchläuft die Strahlung den Weg $dh/\cos\chi$ und wird deshalb in dieser Schicht, wenn

¹⁾ S. CHAPMAN, Proc. phys. Soc. **43** (1931), 26.

k den Absorptionskoeffizienten pro g/cm^2 bedeutet um dS geschwächt:

$$dS = S \cdot k \cdot \varrho \frac{dh}{\cos \chi} = S \cdot k \cdot \varrho_0 \cdot e^{-h/H} \frac{dh}{\cos \chi}. \quad (2)$$

Die Integration liefert:

$$S = S_0 \cdot e^{-\frac{k \cdot \varrho_0 H}{\cos \chi} e^{-h/H}}. \quad (3)$$

Wir setzen nun voraus, dass die Wellenlänge der betrachteten monochromatischen Strahlung klein genug ist um wenigstens einen Luftbestandteil (O , O_2 , N , N_2) zu ionisieren und dass die absorbierte Energie praktisch vollständig zur Ionisation verwendet wird. Die auf der Wegstrecke 1 absorbierte Energie beträgt $Sk\varrho$ und wenn wir die Zahl der bei Absorption der Strahlung 1 pro cm^3 erzeugten Ionen mit γ bezeichnen, so beträgt in der Höhe h die Ionenproduktion:

$$I(\chi, h) = \gamma k \varrho S = \gamma k S_0 \varrho_0 e^{-h/H} - \left(\frac{k \varrho_0 H}{\cos \chi} e^{-h/H} \right). \quad (4)$$

Die erste Exponentialfunktion in (4) ist in grosser, die zweite in geringer Höhe sehr klein, während dazwischen $I(\chi, h)$ ein steiles Maximum besitzt, d. h. Schichtbildung aufweist. Die maximale Ionenproduktion $I_0(\chi)$ und die Höhe $h_0(\chi)$ in der diese auftritt (= Höhe der ionisierten Schicht) ergeben sich aus $dI(\chi, h)/dh = 0$:

$$I_0(\chi) = \frac{\gamma S_0 \cos \chi}{eH} = I_0(0) \cos \chi. \quad (5)$$

$$h_0(\chi) = H \cdot \lg(k \cdot H \cdot \varrho_0 \cdot \sec \chi) = h_0(0) + H \lg \sec \chi. \quad (6)$$

Dabei bedeuten $I_0(0)$ und $h_0(0)$ bzw. maximale Ionenproduktion und deren Höhe bei senkrechtem Einfall der Strahlung. Die in diesen Formeln auftretende Zenitdistanz der Sonne berechnet sich leicht aus der geographischen Breite (= Polhöhe) φ des Beobachtungsortes, der Deklination δ der Sonne und ihrem Stundenwinkel t :

$$\cos \chi = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t. \quad (7)$$

Der Ionenproduktion wirken Rekombination und Anlagerung entgegen. Die Wirkung der Ladungsträger auf die elektromagnetischen Wellen, für die wir uns im folgenden interessieren werden, wird durch deren spezifische Ladung e/m bestimmt. Im allgemeinen hat man somit nur die Wirkung der Elektronen zu betrachten und diejenige der Ionen erst wenn deren Konzentration diejenige der

Elektronen etwa um das 10⁴fache übertrifft. Die zeitliche Änderung der Elektronenkonzentration N_e ist gegeben durch

$$\frac{dN_e}{dt} = q - \alpha N_+ N_e - \beta N_e, \quad (8)$$

wobei q die sekundliche Elektronenproduktion bedeutet, α den Rekombinationskoeffizienten, N_+ die Dichte der positiven Ionen und β den Koeffizienten der Anlagerung der Elektronen an neutrale Partikel. Als ersten Grenzfall betrachten wir $\beta = 0$ (keine Anlagerung); für den stationären Zustand ($dN_e/dt = 0$) ergibt sich für das Gebiet maximaler Ionisation, wenn wir die Ionenproduktion aus (5) entnehmen:

$$I_0(0) \cdot \cos \chi = \alpha N_+ N_e, \quad (9)$$

und bei Berücksichtigung, dass bei Abwesenheit negativer Ionen $N_+ = N_e = N$:

$$N_e = \sqrt{\frac{I_0(0) \cdot \cos \chi}{\alpha}}. \quad (10)$$

Im andern Grenzfall, $\alpha = 0$, ist:

$$N_e = \frac{I_0(0) \cdot \cos \chi}{\beta}. \quad (11)$$

Schliesslich haben wir noch den Fall, dass $N_e \ll N_+$; dann enthält das Gas als Ladungsträger praktisch nur positive (N_+) und negative (N_-) Ionen und es gilt $N_+ = N_- = N$. Dies führt wieder auf

$$N_+ = N_- = \sqrt{\frac{I_0(0) \cdot \cos \chi}{\alpha'}}. \quad (12)$$

Da $I_0(0)$ proportional S_0 ist, lässt sich S_0 durch die Ladungsträgerdichte N , gleichgültig ob Ionen oder Elektronen, und unabhängig von dem Mechanismus, welcher der Ionenproduktion entgegenwirkt, darstellen:

$$S_0 \sim \frac{N^z}{\cos \chi}, \quad (13)$$

wobei für den Exponenten z gilt:

$$1 \leq z \leq 2. \quad (14)$$

Beim heutigen Stand der Theorie der Ionosphäre kann z nur empirisch bestimmt werden.

Das durch die Trägerkonzentration N charakterisierte Medium weist im Falle geringer Konzentration, also bei schwacher Dämp-

fung, gegen das nicht ionisierte Medium den Brechungsexponenten n auf:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\pi f^2}, \quad (15)$$

wobei e die Elementarladung, m die Masse der Ladungsträger und f die Frequenz der Strahlung bedeutet, auf welche sich n bezieht. Eine unter dem Winkel φ_0 gegen die Vertikale abgestrahlte elektrische Welle wird beim Eindringen in die Ionosphäre abgelenkt werden, wobei in jedem Punkt gilt:

$$n_0 \cdot \sin \varphi_0 = n_1 \cdot \sin \varphi_1. \quad (16)$$

Dabei bezieht sich der Index 1 auf irgendeine Stelle in der ionisierten Schicht und der Index 0 auf den Erdboden ($N=0$). Da $n_1 < n_0$, ist $\varphi_1 > \varphi_0$ d. h. die Welle wird zunehmend stärker in die Horizontale abgelenkt und erreicht schliesslich bei $\sin \varphi_1 = 1$ den Umkehrpunkt. In diesem beträgt der Brechungsexponent $n = \sin \varphi_0$. Bei senkrechter Abstrahlung ist demnach im Umkehrpunkt $n = 0$, woraus sich der Zusammenhang der Trägerdichte im Reflexionspunkt mit der Frequenz ergibt:

$$N = \frac{\pi m}{e^2} f^2. \quad (17)$$

Die höchste noch reflektierte Frequenz, die Grenzfrequenz f_0 , wird an der Stelle der oben berechneten maximalen Trägerdichte N_{\max} reflektiert:

$$N_{\max} = \frac{\pi m}{e^2} f_0^2. \quad (18)$$

Zusammen mit (13) ergibt sich daraus für die extraterrestrische Strahlungsintensität:

$$S_0 \sim \frac{f_0^2 z}{\cos \chi}. \quad (19)$$

Da jedoch die in die Rechnung eingehenden Grössen (k , α usw.) nur unsicher bekannt sind, lassen sich aus Messungen der Grenzfrequenzen absolute Werte von S_0 höchstens grössenordnungsmässig, die Variationen von S_0 hingegen, wie im folgenden gezeigt wird, sehr sauber bestimmen.

2. Die Intensität der die ionosphärische E-Schicht erzeugenden Strahlung. Wir wenden die vorstehenden Ausführungen auf die ihrem Verhalten nach einfachste und übersichtlichste ionosphärische Schicht (die sogenannte E-, oder neuerdings E_1 -Schicht genannte)

an. Die Höhe dieser Schicht beträgt etwa 110 km und unterliegt nur unbedeutenden Schwankungen. Man vermutet, dass diese Schicht durch die Photoionisation von O_2 entsteht¹⁾; doch ist dies vorerst bloss eine Arbeitshypothese. Die Ionisationsenergien der 4 wichtigsten Luftbestandteile betragen: O 13,6, O_2 16,1, N 14,0, N_2 16,9 eV. Diesen Energien entsprechen Wellenlängen zwischen 910 und 730 Å; somit dürften sich die Strahlungsintensitäten, die wir im folgenden berechnen werden auf den Spektralbereich zwischen etwa 700 und 910 Å beziehen.

Als Beobachtungsgrundlage wurde das von der Versuchsstation Herzogstand (KOCHEL) publizierte Material verwendet²⁾. Diese Publikationen geben die monatlichen Mittelwerte des Tagesganges der E_1 -Grenzfrequenz, \bar{f}_0 , beginnend mit Januar 1940, so dass das für die vorliegende Untersuchung verwendete Material 4 Jahre umfasst.

Zunächst benutzen wir den tageszeitlichen Gang zur Bestimmung des Exponenten $2z$, indem wir die Voraussetzung machen, dass sich S_0 im Laufe des Tages nicht merklich ändert. Der Exponent ist so zu wählen, dass der Ausdruck $\bar{f}_0^{2z} / \cos \chi$ unabhängig wird von t . Vorerst geben wir in Tab. 1 die bei ionosphärischen Unter-

Tabelle 1.

Die Monatsmittelwerte von $\cos \chi$ in Abhängigkeit vom Stundenwinkel ($\varphi = 47^\circ 39' 42''$).

t Monat δ		0 h	± 1 h	± 2 h	± 3 h	± 4 h	± 5 h	± 6 h	± 7 h
Januar	-20,8	0,36713	0,34565	0,28276	0,18271	0,05232			
Februar	-13,0	0,48995	0,46759	0,40203	0,29775	0,16184	0,00357		
März	-2,1	0,64596	0,62302	0,55580	0,44883	0,30943	0,14711		
April	+9,5	0,78627	0,76363	0,69727	0,59171	0,45413	0,29392	0,12200	
Mai	+18,7	0,87495	0,85320	0,78948	0,68810	0,55597	0,40211	0,23699	0,07187
Juni	+23,0	0,90879	0,88766	0,82573	0,72721	0,59881	0,44928	0,28882	0,12836
Juli	+21,3	0,89601	0,87462	0,81193	0,71222	0,58226	0,43092	0,26851	0,10610
August	+13,9	0,83135	0,80907	0,74376	0,63987	0,50446	0,34678	0,17757	0,00836
Septemb.	+3,1	0,71248	0,68956	0,62238	0,51551	0,37622	0,21403	0,03997	
Oktober	-8,5	0,55684	0,53414	0,46760	0,36175	0,22379	0,06314		
Novemb.	-18,2	0,40894	0,38713	0,32322	0,22155	0,08908			
Dezemb.	-23,0	0,33115	0,31002	0,24809	0,14957	0,02117			

suchungen immer wieder benötigten $\cos \chi$ -Werte für die Station Herzogstand (KOCHEL) $\varphi = 47^\circ 39' 42''$. Da der tägliche Gang von

¹⁾ S. K. MITRA, Nature **142** (1938), 914.

²⁾ Monatliche Berichte; vgl. dazu auch: Mitt. d. Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung **2** (1943), Heft 2.

f_0 im Monatsmittel oft gewisse Unregelmässigkeiten aufweist, wurden die Messungen zuerst durch eine glatte Kurve ausgeglichen, die sich der beobachteten möglichst eng anschmiegt; ihr wurden die \bar{f}_0 -Werte für die Stundenwinkel $0, \pm 1, \pm 2 \dots$ entnommen. Der monatliche Mittelwert von f_0 ist, falls Z die Anzahl der Tage bedeutet, für irgendeinen Wert von t :

$$\bar{f}_0 = \frac{\Sigma f_0}{Z} = \frac{\Sigma \sqrt[2z]{S_0 \cdot \cos \chi}}{Z} \quad (20)$$

Da $\cos \chi$ innerhalb eines Monats wenig, innerhalb der Solstitialmonate sogar sehr wenig variiert, kann diese Funktion ihrem monatlichen Mittelwert gleichgesetzt werden, so dass für \bar{f}_0 dieselbe Abhängigkeit von t besteht wie für f_0 eines bestimmten Tages.

Zuerst wurden die beiden Grenzfälle untersucht, d. h. die Ausdrücke $\bar{f}_0^2/\cos \chi$ und $\bar{f}_0^4/\cos \chi$ auf ihre Konstanz geprüft. Es zeigte sich, dass keiner dieser Ausdrücke konstant ist, sondern beide beträchtlich und systematisch mit t variieren. Mit zunehmendem Abstand vom Meridian nimmt $\bar{f}_0^2/\cos \chi$ zu, $\bar{f}_0^4/\cos \chi$ dagegen ab; der Exponent liegt somit zwischen 2 und 4, in Übereinstimmung mit (14). In der Tat erweist sich der Ausdruck $\bar{f}_0^3/\cos \chi$ als praktisch konstant, wie aus Tab. 2 hervorgeht. In dieser Tabelle sind die Werte von $\bar{f}_0^3/\cos \chi$ und $\bar{f}_0^4/\cos \chi$ aufgeführt, jedoch nur bis zu so grossen Stundenwinkeln, dass der Nenner $\cos \chi$ (Tab. 1) grösser bleibt als 0,2. Die grösseren Stundenwinkel blieben unberücksichtigt, da bei diesen f_0 sich rasch ändert, so dass kleine Ungenauigkeiten in t zu bedeutenden Fehlern in f_0 führen, die durch die Kleinheit von $\cos \chi$ noch verstärkt werden. Überdies wurden die beiden Werte, die zu denselben Absolutwerten von t gehören, gemittelt um gewisse Unsymmetrien im tageszeitlichen Gang gegenüber dem wahren Mittag, wie sie in einzelnen Monatskurven auftreten, zu eliminieren. Die $\bar{f}_0^4/\cos \chi$ -Werte der 48 Monate zeigen eine starke Abnahme mit zunehmendem Stundenwinkel mit Ausnahme vom Oktober 1942 und Dezember 1943, wo jener Wert praktisch unabhängig ist von t . Von den 48 Gruppen von $\bar{f}_0^3/\cos \chi$ -Werten dagegen zeigt die Mehrzahl, nämlich 27, eine kleine Zunahme, 16 eine geringe Abnahme und 5 sind unabhängig von t . Daraus muss man schliessen, dass der Exponent $2z$ zwischen 3 und 4 liegt, jedoch nur wenig grösser ist als 3. Das verwendete Material ist weder exakt noch umfangreich genug, um eine zuverlässige Bestimmung des Exponenten zu ermöglichen, weshalb wir im folgenden mit $2z = 3$ rechnen. Tabelle 2 zeigt, dass die $\bar{f}_0^3/\cos \chi$ -Werte in guter Annäherung konstant sind und jedenfalls keinen wesentlichen systema-

Tabelle 2.

Die extraterrestrischen Intensitäten der *E*-Strahlung 1940—1943.

Jahr	Monat	t	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	Monats- mittel	mittlere Ab- weichg.	Jahres- mittel	S_0
1940	Jan.	$f^3/\cos \chi$	63,9	62,6	60,5					62,3	1,9%		57,1
		$f^4/\cos \chi$	183,0	174,8	156,2								
	Febr.	$f^3/\cos \chi$	59,7	58,4	55,6	54,5				57,3	3,1%		57,3
		$f^4/\cos \chi$	183,9	175,7	156,5	137,8							
	März	$f^3/\cos \chi$	58,9	57,9	56,2	58,7	63,6			59,1	3,1%		60,3
		$f^4/\cos \chi$	198,0	191,5	178,5	174,7	171,9						
	April	$f^3/\cos \chi$	61,9	61,0	58,6	57,0	59,9	63,7		60,4	3,1%		61,1
		$f^4/\cos \chi$	226,0	219,6	201,7	184,3	180,2	169,3					
	Mai	$f^3/\cos \chi$	59,3	59,6	59,5	53,7	55,6	58,6	53,7	57,1	4,0%		62,0
		$f^4/\cos \chi$	221,0	220,8	215,0	178,8	174,6	168,0	125,6				
	Juni	$f^3/\cos \chi$	60,8	61,9	61,1	62,6	64,0	59,0	53,0	60,3	4,1%		64,2
		$f^4/\cos \chi$	232,0	235,2	225,9	223,5	215,8	176,1	131,5			57,9	
1941	Juli	$f^3/\cos \chi$	54,8	53,8	54,2	57,0	64,2	53,6	49,3	55,3	6,3%		58,8
		$f^4/\cos \chi$	200,5	194,3	191,5	195,6	216,2	152,8	116,5				
	Aug.	$f^3/\cos \chi$	55,7	55,8	57,9	57,9	56,2	57,6		56,8	1,7%		59,8
		$f^4/\cos \chi$	200,0	198,9	202,7	191,8	173,2	156,8					
	Sept.	$f^3/\cos \chi$	51,9	51,6	53,0	54,6	62,4	59,3		55,5	5,9%		59,7
		$f^4/\cos \chi$	172,9	169,4	170,2	166,2	178,5	138,5					
	Okt.	$f^3/\cos \chi$	49,1	48,1	49,2	52,4	55,5			50,9	4,9%		59,9
		$f^4/\cos \chi$	147,7	141,9	140,1	139,7	128,5						
	Nov.	$f^3/\cos \chi$	58,4	58,4	58,7	61,0				59,1	1,6%		52,3
		$f^4/\cos \chi$	168,3	165,2	156,8	145,3							
	Dez.	$f^3/\cos \chi$	60,8	60,0	62,1					60,5	1,3%		49,2
		$f^4/\cos \chi$	165,3	154,0	154,5								
1941	Jan.	$f^3/\cos \chi$	53,0	51,7	55,7					53,5	2,8%		49,0
		$f^4/\cos \chi$	142,6	135,3	139,6								
	Febr.	$f^3/\cos \chi$	40,2	37,0	36,3	35,1				37,1	4,0%		37,1
		$f^4/\cos \chi$	108,5	95,5	88,6	74,8							
	März	$f^3/\cos \chi$	42,7	43,1	43,5	45,0	47,7			44,4	3,5%		45,3
		$f^4/\cos \chi$	129,0	129,2	125,8	122,7	117,0						
	April	$f^3/\cos \chi$	43,7	43,9	45,7	46,7	48,1	47,2		45,9	3,5%		46,4
		$f^4/\cos \chi$	142,1	141,6	145,1	141,5	134,4	113,8					
	Mai	$f^3/\cos \chi$	43,8	43,6	42,8	44,1	45,8	46,0	45,2	44,5	2,3%		48,4
		$f^4/\cos \chi$	147,6	145,6	138,3	137,8	134,7	121,9	99,7				
	Juni	$f^3/\cos \chi$	43,7	43,8	44,0	45,5	46,6	45,8	45,2	44,9	2,1%		47,8
		$f^4/\cos \chi$	149,1	148,4	145,8	146,1	141,6	126,0	106,3			47,4	
1941	Juli	$f^3/\cos \chi$	47,8	48,2	47,2	48,2	49,0	47,5	50,4	48,3	1,6%		51,4
		$f^4/\cos \chi$	167,1	167,7	149,1	156,9	149,8	130,0	120,0				
	Aug.	$f^3/\cos \chi$	50,2	48,6	48,7	48,2	48,6	48,1		48,7	1,0%		51,3
		$f^4/\cos \chi$	174,2	165,2	161,3	151,3	141,5	123,0					
	Sept.	$f^3/\cos \chi$	49,0	49,4	49,6	48,5	50,0	49,0		49,3	0,8%		53,0
		$f^4/\cos \chi$	160,8	167,7	156,3	141,9	134,0	121,5					
	Okt.	$f^3/\cos \chi$	37,7	37,1	35,9	33,4	35,7			35,6	3,5%		41,8
		$f^4/\cos \chi$	104,0	100,2	92,0	76,7	71,4						
	Nov.	$f^3/\cos \chi$	59,7	59,0	56,6	58,3				58,4	1,3%		51,4
		$f^4/\cos \chi$	173,0	167,0	149,0	136,8							
	Dez.	$f^3/\cos \chi$	58,7	58,4	59,3					58,8	0,6%		47,8
		$f^4/\cos \chi$	158,0	153,3	142,4								

Tabelle 2.
Fortsetzung.

Jahr	Monat	t	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	Monats- mittel	mittlere Ab- weichg.	Jahres- mittel	S_0
1942	Jan.	$f^3/\cos \chi$	58,0	58,2	57,6					57,9	0,4%	42,7	53,1
		$f^4/\cos \chi$	160,7	158,5	146,1								
	Febr.	$f^3/\cos \chi$	55,1	54,7	55,0	54,2				54,8	0,5%		54,8
		$f^4/\cos \chi$	165,2	162,0	154,0	136,5							
	März	$f^3/\cos \chi$	46,1	46,1	46,4	48,5	50,0			47,4	3,1%		48,4
		$f^4/\cos \chi$	143,0	141,0	138,6	135,2	124,4						
	April	$f^3/\cos \chi$	43,7	43,6	45,4	47,2	48,5	49,4		46,3	4,5%		46,7
		$f^4/\cos \chi$	142,0	140,0	144,0	143,4	136,2	120,7					
	Mai	$f^3/\cos \chi$	34,1	34,2	36,2	38,8	42,3	43,8	45,9	39,3	9,8%		42,7
		$f^4/\cos \chi$	105,4	105,4	110,4	116,5	120,9	113,7	101,8				
	Juni	$f^3/\cos \chi$	35,4	65,5	35,7	36,9	38,6	38,6	37,6	36,9	3,2%		39,3
		$f^4/\cos \chi$	112,5	112,2	110,3	110,5	110,3	100,1	83,3				
1943	Juli	$f^3/\cos \chi$	33,9	34,1	35,5	37,6	38,1	36,7	34,9	35,8	3,9%	40,1	38,1
		$f^4/\cos \chi$	105,8	105,4	108,7	112,2	98,0	92,0	73,5				
	Aug.	$f^3/\cos \chi$	33,5	33,6	34,6	36,0	37,5	38,0		35,5	4,6%		37,4
		$f^4/\cos \chi$	101,4	101,0	102,4	102,5	100,1	89,5					
	Sept.	$f^3/\cos \chi$	34,0	34,0	34,2	35,8	37,3	38,0		35,5	4,2%		38,2
		$f^4/\cos \chi$	98,3	97,2	94,7	94,6	90,1	76,5					
	Okt.	$f^3/\cos \chi$	32,0	32,5	33,2	35,4	41,0			34,8	7,7%		41,0
		$f^4/\cos \chi$	83,5	84,3	82,8	82,8	85,8						
	Nov.	$f^3/\cos \chi$	44,0	43,4	42,8	40,6				42,7	2,5%		37,8
		$f^4/\cos \chi$	115,3	111,1	103,0	84,8							
	Dez.	$f^3/\cos \chi$	45,6	45,8	45,9					45,8	0,2%		37,2
		$f^4/\cos \chi$	112,7	110,8	103,4								
1943	Jan.	$f^3/\cos \chi$	43,7	43,0	42,4					43,0	1,0%	40,1	39,4
		$f^4/\cos \chi$	110,1	106,0	97,0								
	Febr.	$f^3/\cos \chi$	44,8	45,2	46,5	47,0				45,9	1,9%		45,9
		$f^4/\cos \chi$	125,3	125,1	123,6	113,3							
	März	$f^3/\cos \chi$	38,2	38,3	40,3	41,2	42,3			40,1	3,6%		40,9
		$f^4/\cos \chi$	111,1	110,3	113,8	109,1	99,6						
	April	$f^3/\cos \chi$	41,7	40,8	40,2	39,7	38,5	38,8		39,9	2,3%		40,3
		$f^4/\cos \chi$	133,3	128,6	122,0	113,8	100,1	87,3					
	Mai	$f^3/\cos \chi$	37,0	37,3	38,1	38,2	37,3	36,6	35,9	37,2	1,6%		40,4
		$f^4/\cos \chi$	118,4	118,4	118,6	113,8	101,4	89,8	76,2				
	Juni	$f^3/\cos \chi$	39,6	39,0	38,5	39,8	36,3	36,3	36,6	38,0	3,6%		40,4
		$f^4/\cos \chi$	130,7	127,0	121,8	122,2	101,2	92,2	80,3				
1943	Juli	$f^3/\cos \chi$	36,6	37,0	37,8	38,3	37,9	36,7	35,9	37,2	1,9%	40,1	39,6
		$f^4/\cos \chi$	117,0	118,3	118,3	115,2	106,3	92,2	76,1				
	Aug.	$f^3/\cos \chi$	37,9	37,2	38,1	37,9	37,3	37,7		37,7	0,8%		39,7
		$f^4/\cos \chi$	119,8	115,2	116,2	109,6	99,2	88,7					
	Sept.	$f^3/\cos \chi$	33,6	33,1	32,6	32,6	35,3			33,4	2,4%		35,9
		$f^4/\cos \chi$	96,7	93,9	88,8	83,5	83,8						
	Okt.	$f^3/\cos \chi$	34,3	33,8	32,6	33,5	38,7			34,6	4,8%		40,7
		$f^4/\cos \chi$	91,5	88,8	80,8	76,7	79,8						
	Nov.	$f^3/\cos \chi$	46,5	45,4	45,0	46,8				45,9	1,6%		40,6
		$f^4/\cos \chi$	124,0	116,1	110,0	102,0							
	Dez.	$f^3/\cos \chi$	52,3	54,1	58,3					54,9	4,1%		44,6
		$f^4/\cos \chi$	137,0	139,1	142,2								

tischen Gang mit t aufweisen. Es ist deshalb sinnvoll, die zu verschiedenen t -Werten, aber zum gleichen Monat gehörenden $\bar{f}_0^3/\cos\chi$ -Werte zu einem Mittel zusammenzufassen. Im Mittel der 4 untersuchten Jahre beträgt nach Tabelle 2 die mittlere Abweichung der Einzelwerte nur 3,0%; die Extremwerte betragen 0,2% (Dezember 1942) und 9,8% (Mai 1942).

Bezeichnen wir die Grenzfrequenz zu einem bestimmten Stundenwinkel bei der Zenitdistanz χ am Tage i mit f_i , so berechnet sich der monatliche Mittelwert der Intensität zu

$$\bar{S}_i \sim \frac{1}{\cos\chi} \cdot \bar{f}_i^3. \quad (21)$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit misst man die Grenzfrequenz in verschiedenen Stundenwinkeln. In den Publikationen der Versuchstation Herzogstand werden aber die Monatsmittel \bar{f}_i mitgeteilt, aus denen wir die mittlere Intensität \bar{S}_i' berechnet haben:

$$\bar{S}_i' \sim \frac{1}{\cos\chi} \bar{f}_i^3. \quad (22)$$

Sicher ist $\bar{f}_i^3 \geq \bar{f}_i^3$ also $\bar{S}_i \geq \bar{S}_i'$, wobei aber über den Grad der Ungleichheit nichts genaueres ausgesagt werden kann, da über die Schwankungen der Grenzfrequenz von Tag zu Tag keine Publikationen vorliegen. Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle verschwindend kleiner Intensitätsänderungen innerhalb eines Monats. Immerhin dürfte sich \bar{f}_i^3 in erster Näherung um einen konstanten Faktor von \bar{f}_i^3 unterscheiden, so dass weiterhin der Ausdruck $\bar{f}_i^3/\cos\chi$ ein Mass für die die E -Ionisation erzeugende UV -Strahlung bleibt. Man erkennt daraus wie wesentlich es ist, nicht nur Mittel-, sondern auch Momentanwerte ionosphärischer Messungen zu publizieren.

3. *Der jahreszeitliche Gang der E -Ionisation und die Temperatur in der E -Schicht.* Ausser dem trivialen durch die variable Sonnenhöhe bedingten war bisher kein jahreszeitlicher Gang der E -Ionisation bekannt. Eine nähere Betrachtung der monatlichen Mittelwerte von $f^3/\cos\chi$ (Tab. 2) lässt die Vermutung aufkommen, dass

Tabelle 3.
Der jahreszeitliche Gang von $\bar{f}_i^3/\cos\chi$.

Monat	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
A	1,16	1,05	1,02	1,02	0,94	0,95	0,93	0,94	0,91	0,83	1,10	1,18
B	1,09	1,00	0,98	0,99	0,92	0,94	0,94	0,95	0,93	0,85	1,13	1,23

in den berechneten und als extraterrestrisch bezeichneten Intensitäten noch ein jahreszeitlicher Gang enthalten ist. Wir haben zunächst jedes Monatsmittel durch das entsprechende Jahresmittel dividiert und die 4 Werte für jeden Monat zu einem Mittel A vereinigt (Tab. 3). In analoger Weise wurde B abgeleitet, jedoch wurden dabei die Intensitäten nicht auf das Jahresmittel bezogen,

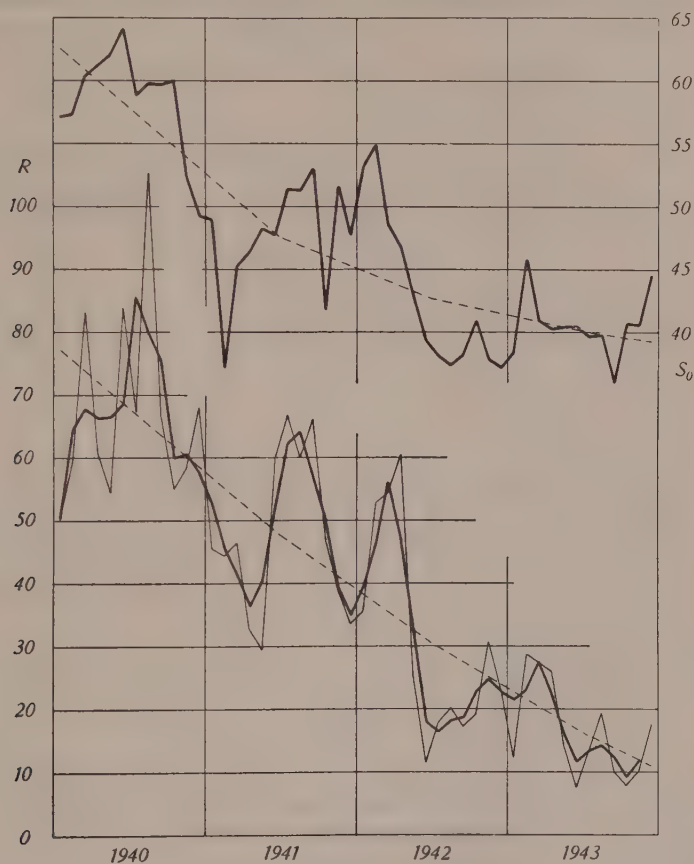


Fig. 1.

Monatliche Mittelwerte der E -Strahlungsintensität S_0 und der Sonnenfleckenrelativzahl R .

sondern auf die ausgeglichene Intensität (Fig. 1 gestrichelte Kurve) zu der betreffenden Zeit. Die Kurve der ausgeglichenen Intensität ist dabei durch die Jahresmittel von $\bar{f}^3/\cos \chi$ festgelegt. Die Größen A und B unterscheiden sich nur unwesentlich voneinander und zeigen einen deutlichen jahreszeitlichen Gang, der dadurch noch an Real-

tät gewinnt, dass er in allen 4 untersuchten Jahren in derselben Art, wenn auch z. T. weniger deutlich auftritt. Versucht man die Werte der Tabelle 3 durch eine möglichst sinusähnliche Kurve darzustellen, so ergibt sich ein breites und flaches Minimum im Spätsommer und ein Maximum im Dezember oder Januar. Der besonders niedrige Wert vom Oktober kann zufallsbedingt sein; man muss sich überhaupt klar sein, dass aus einem nur 4jährigen Beobachtungsmaterial ein jährlicher Gang, dessen Amplitude gegen die reellen Änderungen wesentlich zurücktritt, sich nur unsicher bestimmen lässt, so dass es späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben muss, diesen Jahresgang exakter zu erfassen.

Der jahreszeitliche Gang, dessen maximaler und minimaler Wert sich etwa wie 1,2 : 0,9 verhalten, dürfte durch einen jährlichen Temperaturgang bedingt sein. Da $H \sim T$ ist, ergibt sich aus (5): $I_0(0) \sim S_0/T$. Die Temperatur im Spätsommer dürfte somit rund 33% höher liegen als im Winter. Da man mit einer mittleren Temperatur der *E*-Schicht von 320–370° rechnet¹⁾, dürfte in unseren Breiten die Jahresamplitude rund 100° betragen. Dieser Jahresgang ergibt nebenher auf Grund von (6) eine Erklärung für die Konstanz der Höhe der *E*-Schicht: im Sommer ist H gross, $\sec \chi$ klein, im Winter umgekehrt.

4. *Der Zusammenhang der Sonnenaktivität mit der Intensität der E-Strahlung* (wie wir die die *E*-Ionisation erzeugende Strahlung kurz nennen²⁾). Der jahreszeitliche Gang der Monatsmittel von $\bar{f}^3/\cos \chi$ wurde eliminiert, indem diese durch die *B*-Werte dividiert wurden (Reduktion mit Hilfe der *A*-Werte führt praktisch zu demselben Resultat). Diese reduzierten Werte stellen (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) die extraterrestrische Intensität der *E*-Strahlung dar und wurden deshalb mit S_0 bezeichnet. Sie sind in Fig. 1 dargestellt zusammen mit den als Mass für die Sonnenaktivität dienenden Monatsmitteln der Sonnenfleckenzahl R (dünne Kurve) sowie den Mittelwerten über 3 Monate (dicke Kurve). Im Gegensatz zu den bisher untersuchten solar-terrestrischen Beziehungen, bei denen sich in den Jahresmitteln eine hohe, in den Monatsmitteln jedoch eine geringe oder keine Korrelation ergab³⁾, zeigt die ionosphärisch gemessene *E*-Strahlungsintensität auch in den Monatsmitteln einen engen Zusammenhang mit den Fleckenrelativzahlen und speziell mit den jeweils über 3 Monate aus-

¹⁾ J. ZENNECK, Naturwiss. 30, (1942), 739; R. PENNDORF, Meteorol. Z. 58 (1941), 1.

²⁾ E. V. APPLETON und R. NAISMITH, Phil. Mag. (7) 27 (1939), 144.

³⁾ J. BARTELS, Terr. Magn. 37 (1932), 1.

geglichenen Werten derselben. Die Hauptmaxima und -minima der S_0 -Kurve korrespondieren mit solchen der R -Kurve; allerdings fallen dieselben zeitlich nicht exakt zusammen. Von 6 Maxima der S_0 -Kurve, welche mit solchen der R -Kurve identifiziert werden konnten, trat eines gegenüber der Sonnenaktivität um 1 Monat verspätet, 5 dagegen um 1 Monat verfrüht auf. Von den 5 identifizierbaren Minima trat eines um 1 Monat verspätet, 2 um einen und 2 um 2 Monate gegenüber R verfrüht auf. Darnach würde die maximale Intensität der E -Strahlung der grössten Entwicklung der Flecken rund einen Monat vorangehen. Dieses Ergebnis müsste allerdings noch an einem einen grösseren Zeitraum umfassenden Beobachtungsmaterial geprüft werden.

Der Zusammenhang von S_0 mit den über 3 Monate ausgeglichenen R -Werten lässt sich durch die lineare Beziehung

$$S_0 = 34,4 + 0,320 \cdot R \quad (23)$$

darstellen. Daraus folgt für den Quotienten

$$q = \frac{S_{R=100}}{S_{R=0}} = 1,93, \quad (24)$$

d. h. roh ausgedrückt: zur Zeit des Sonnentätigkeitsmaximums ist die Intensität der E -Strahlung doppelt so gross als zur Zeit des Minimums.

Der Korrelationskoeffizient zwischen den ausgeglichenen R -Werten und S_0 beträgt

$$r(S_0, R) = 0,873 \pm 0,035 \quad (25)$$

und erhöht sich für den Zusammenhang von S_0 mit der Flecken-tätigkeit im darauffolgenden Monat auf

$$r(S_0, R) = 0,935 \pm 0,018. \quad (26)$$

In diesem Zusammenhang muss darauf hingewiesen werden, dass es neuerdings J. BARTELS¹⁾ gelungen ist, aus den sonnentägigen erdmagnetischen Variationen auf eine solare Wellenstrahlung W und deren Veränderungen zu schliessen. Es zeigte sich, dass die sonnentägige Amplitude der Horizontalintensität $A_s(H)$ der Station Huancayo als Mass für W dienen kann. Für die Korrelation der Monatsmittel von A_s mit R ergaben sich sehr hohe Werte: $r(A_s, R)$ lag zwischen 0,89 und 0,97. Bemerkenswert ist ferner, dass die Werte des Quotienten $A_{R=100}/A_{R=0}$ zwischen 1,6 und 2,2

¹⁾ J. BARTELS, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1941, Math.-naturwiss. Kl. Nr. 12.

liegen mit einem Mittelwert von 1,90, welcher mit unserem Wert von q (24) übereinstimmt. Die beiden durch A_s und S_0 dargestellten Intensitäten stimmen somit bis auf einen Proportionalitätsfaktor überein! Nach diesen Ergebnissen muss man schliessen, obschon eine direkte Vergleichung der nur bis 1939 publizierten magnetisch erschlossenen W -Intensitäten mit den erst ab 1940 vorliegenden ionosphärisch berechneten nicht möglich ist, dass es sich bei der BARTEL'schen W -Strahlung um dieselbe Strahlung handelt, welche die E -Schicht erzeugt, wodurch die von BARTELS geäusserte Vermutung, dass das für die $A_s(H)$ -Variation verantwortliche Stromsystem „in niedrigen Höhen der Atmosphäre fliesst, jedenfalls nicht so hoch wie die F_2 -Schicht, sondern wahrscheinlich in der E -Schicht oder noch darunter“¹⁾ bestätigt wird. Die erdmagnetisch und ionosphärisch erschlossenen Schwankungen von W beziehen sich somit auf dieselbe Strahlung von vermutlich 700—900 Å Wellenlänge und sind einander vollständig gleichwertig.

Die Quelle der E -Strahlung wird man trotz der hohen Korrelation mit den Sonnenflecken nicht mit diesen selbst identifizieren, sondern wohl in Erscheinungen wie den Fackeln oder überhitzten Koronagebieten²⁾ suchen, welche in engstem Zusammenhang mit den Flecken auftreten. Hierüber wird erst Klarheit geschaffen werden können, wenn Tageswerte von S_0 vorliegen.

Eidgenössische Sternwarte, Zürich.

¹⁾ l. c. S. 6.

²⁾ M. WALDMEIER, ZS. f. Astrophys. **23** (1944), erscheint demnächst.

Über die Wechselwirkung zweier Nukleonen in der Mesontheorie

von Markus Fierz.

(23. III. 1944.)

I. *Einleitung und Problemstellung.* Wie WENTZEL gezeigt hat, liefert die symmetrische Mesontheorie bei starker Koppelung als Hamiltonfunktion zweier Nukleonen¹⁾ (Proton, Neutron)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M} (p^2 + p'^2) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^3 (d_k^2 + d'_k{}^2) + V(r) \Omega(\vartheta, \varphi, \psi; \vartheta', \varphi', \psi') \quad (\text{I.1})$$

Dabei sind \tilde{p} und \tilde{p}' die Bahnimpulse der Nukleonen, M ihre Masse, \tilde{d} und \tilde{d}' sind ihre Spinnmomente. Diese können alle halbganzen Werte annehmen und geben zur Isobarenenergie $\frac{\varepsilon}{2} \sum_k d_k^2$ Anlass. Die potentielle Energie ist durch den dritten Term in \mathcal{H} gegeben und hängt ausser vom Abstand r der Nukleonen noch von ihren inneren Freiheitsgraden ϑ, φ, ψ ab.

In den Variablen ϑ, φ, ψ sind die d_k folgende Operatoren:

$$d_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$d_1 \pm i d_2 = e^{\pm i \varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{i} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \quad (\text{I.2})$$

Die Hamiltonfunktion (I. 1) ist somit analog derjenigen zweier gekoppelter Kugelschwingungen.

Neben dem Vektor-Operator d_k existiert noch der weitere Operator h_k , der die Rolle des „Isotopic Spin“ spielt. Die Eigenwerte

¹⁾ G. WENTZEL, H. P. A. **16** (1943), 222, und **16** (1943), 551, § 15. Wir haben in der vorliegenden Arbeit die „Tensorkraft“ nicht berücksichtigt, d. h. wir betrachten nur den Term, der bei WENTZEL in der Form

$$V^{(\mu \nu)} = \frac{g^2}{2} \sum_{i, e} S_{ie}^{(\mu)} S_{ie}^{(\nu)} A \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r}$$

geschrieben ist. Die S_{ie} entsprechen unseren x_{ik} [(I. 5) dieser Arbeit]. Ein solches Potential entspricht der von MÖLLER und ROSENFELD (Kgl. Danske Vidensk. S. Math. fys. Medd. XVII. 8 (1940)) vorgeschlagenen Theorie.

von h_3 entsprechen den verschiedenen Ladungswerten der Nukleonen. Die Operatoren h_k sind gegeben durch

$$h_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \psi};$$

$$h_1 \pm i h_2 = e^{\pm i \psi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cotg \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{i} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{I. 3})$$

Es gilt identisch

$$\sum_k d_k^2 \equiv \sum_k h_k^2 \quad (\text{I. 4})$$

wie man leicht nachrechnet. Die Relation (I. 4), die zwischen Spin und „Isotopic Spin“ besteht, ist charakteristisch für die symmetrische Mesontheorie. Fasst man den Vektor \vec{d} als Impulsmoment eines Kugelkreisels auf, so ist \vec{h} dessen Impulsmoment im körperfesten Koordinatensystem, weshalb die Gleichung (I. 4) selbstverständlich ist. Die Grösse $\Omega(\vartheta, \varphi, \psi; \vartheta', \varphi', \psi')$ lässt sich wie folgt schreiben

$$\Omega(\vartheta, \varphi, \psi; \vartheta', \varphi', \psi') = \sum_{i,k} x_{ik} x'_{ik} \quad (\text{I. 5})$$

Dabei ist x_{ik} durch folgende Matrix gegeben:

$$x_{ik} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi, & -\cos \varphi \sin \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi, & \sin \vartheta \cos \psi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi, & \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi, & \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \varphi, & \sin \vartheta \sin \varphi, & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{I. 6})$$

Bis auf die Anordnung ist x_{ik} die orthogonale Transformation, die vom raumfesten auf das körperfeste Koordinatensystem eines Kreisels führt. Diese ist durch

$$\begin{pmatrix} x_{22} & x_{21} & x_{23} \\ -x_{12} & -x_{11} & -x_{13} \\ x_{32} & x_{31} & x_{33} \end{pmatrix}$$

gegeben. Da in (I. 5) die x_{ik} nur in der Form $\sum x_{ik} x'_{ik}$ vorkommen, spielt dieser Unterschied keine Rolle. Die Definition (I. 6) erweist sich jedoch wegen ihrer Symmetrie in φ und ψ als bequem.

Die Operatoren d_k , h_k und x_{ik} erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen

$$[d_1, d_2] = i d_3; [h_1, h_2] = i h_3; [d_i, h_k] = 0 \quad (\text{I. 7})$$

$$[d_1, x_{k2}] = [x_{k1}, d_2] = i x_{k3} \quad (\text{I. 8})$$

$$[h_1, x_{2k}] = [x_{1k}, h_2] = i x_{3k} \quad (\text{I. 9})$$

sowie die durch zyklisches Vertauschen von 1, 2, 3 daraus hervorgehenden Relationen. Die x_{ik} sind miteinander vertauschbar, ebenso gestrichene mit ungestrichenen Grössen.

Weiter gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_l x_{il} x_{kl} = \sum_i x_{li} x_{ik} = \delta_{ik} \quad (\text{I. 10})$$

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, dass der durch (I. 1) gegebene Hamiltonoperator auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M} (p^2 + p'^2) + \frac{\varepsilon}{2} \{j(j+1) + j'(j'+1)\} + V(r) (J, K, j, j' | \Omega | J, K, \bar{j}, \bar{j}') \quad (\text{I. 11})$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \sum_k d_k^2 &= j(j+1); \quad \sum_k d'_k{}^2 = j'(j'+1); \quad j, j' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \sum_k (d_k + d_k')^2 &= J(J+1) \\ \sum_k (h_k + h_k')^2 &= K(K+1) \end{aligned}$$

Um die Matrix Ω zu bestimmen, berechnen wir zuerst die allgemeine Form der Matrizen von x_{ik} (Abschnitt II). Hierauf werden wir die Produktdarstellung $\mathfrak{D}^j \times \mathfrak{D}^{j'}$ der Drehgruppe explizit ausreduzieren (Abschnitt III). Diese Rechnung hat auch unabhängig von dem hier behandelten Problem ein gewisses Interesse¹⁾. Mit Hilfe der im dritten Abschnitt gewonnenen Formeln ist es dann möglich, die Matrix Ω anzugeben (Abschnitt IV).

II. Wir bestimmen zuerst Matrizen x_{ik} , welche den Gleichungen (I. 8), (I. 9) und (I. 10) genügen, und zwar in einer Darstellung, in welcher $\sum_k d_k^2$, $\sum_k h_k^2$, d_3 und h_3 diagonal sind.

Die Grössen d_k , h_k sind Drehimpulsoperatoren und es gilt wegen (I. 7)

$$\sum_k d_k^2 = \sum_k h_k^2 = j(j+1) \quad (\text{II. 1})$$

Wir setzen daher in bekannter Weise

$$\begin{aligned} (j, m | d_1 + i d_2 | j, m-1) &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ (j, m | d_1 - i d_2 | j, m+1) &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \\ (j, m | d_3 | j, m) &= m \end{aligned} \quad (\text{II. 2})$$

¹⁾ Für die allgemeine Theorie dieser Reduktion siehe z. B. VAN DER WAERDEN. Die Gruppentheoretische Methode (Berlin 1932), S. 68.

$$\begin{aligned}
 (j, n | h_1 + i h_2 | j, n - 1) &= \sqrt{(j + n)(j - n + 1)} \\
 (j, n | h_1 - i h_2 | j, n + 1) &= \sqrt{(j + n + 1)(j - n)} \\
 (j, n | h_3 | j, n) &= n
 \end{aligned}
 \quad (\text{II. 3})$$

d_k ist diagonal bezüglich n , h_k bezüglich m . Nichtangeschriebene Matrixelemente verschwinden und es ist stets

$$j \geq n, m \geq -j$$

Die Relationen (I. 8) bedeuten, dass sich die Zeilen von x_{ik} bezüglich der infinitesimalen Drehungen d_k wie Vektoren verhalten. Das entsprechende gilt gemäss (I. 9) für die Spalten von x_{ik} bezüglich der infinitesimalen Drehungen h_k .

Grössen x_k ($k = 1, 2, 3$), welche sich bezüglich d_k wie ein Vektor verhalten, d. h. Gleichungen

$$[d_i, x_k] = [x_i, d_k] = i x_l \quad (i, k, l \text{ zyklisch})$$

erfüllen, haben nur folgende, nicht verschwindende Matrixelemente¹⁾:

$$\begin{aligned}
 (j, m | x_k | j, \bar{m}) &= A_{j,j} (j, m | d_k | j, \bar{m}) \\
 (j, m | x_k | j - 1, \bar{m}) &= A_{j,j-1} (j, m | b_k | j - 1, \bar{m}) \\
 (j, m | x_k | j + 1, \bar{m}) &= A_{j,j+1}^* (j, m | b_k^* | j + 1, \bar{m})
 \end{aligned}
 \quad (\text{II. 4})$$

$A_{j,j+1}^*$ ist zu $A_{j+1,j}$ konjugiert komplex; ebenso $(j, m | b_k^* | j + 1, \bar{m})$ zu $(j + 1, \bar{m} | b_k | j, m)$. Es ist

$$\begin{aligned}
 (j, m | b_1 + i b_2 | j - 1, m - 1) &= -\sqrt{(j + m)(j + m - 1)} \\
 (j, m | b_1 - i b_2 | j - 1, m + 1) &= \sqrt{(j - m)(j - m - 1)} \\
 (j, m | b_3 | j - 1, m) &= \sqrt{(j - m)(j + m)}
 \end{aligned}
 \quad (\text{II. 5})$$

Zwischen d_k , b_k und b_k^* bestehen die folgenden Relationen:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{a) } (j | d_i b_k - d_k b_i | j - 1) &= i (j + 1) (j | b_i | j - 1) \\
 \text{b) } (j | b_i d_k - b_k d_i | j - 1) &= -i (j - 1) (j | b_i | j - 1) \\
 \text{c) } (j | b_i b_k^* - b_k b_i^* | j) &= i (2j - 1) (j | d_i | j) \\
 \text{d) } (j | b_i^* b_k - b_k^* b_i | j) &= -i (2j + 3) (j | d_i | j) \\
 \text{e) } \sum_k (j | b_k b_k^* | j) &= j (2j - 1) \\
 \text{f) } \sum_k (j | b_k^* b_k | j) &= (j + 1) (2j + 3) \\
 \text{g) } \sum_k (j | b_k b_k | j - 2) &= \sum_k (j | b_k^* b_k^* | j + 2) = 0 \\
 \text{h) } \sum_k (j | d_k b_k | j - 1) &= \sum_k (j | d_k b_k^* | j + 1) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 6})$$

sowie die hierzu hermitesch konjugierten Relationen.

¹⁾ Siehe z. B. W. PAULI, Handbuch der Ph. 24/1, 2. Aufl. (1933), S. 182.

Dies verifiziert man mittels der Darstellungen (II. 2) und (II. 5). x_{3k} verhält sich bezüglich d_k wie ein Vektor. Da x_{3k} vom Winkel ψ unabhängig ist, sind seine Matricelemente bezüglich n diagonal.

Wir machen daher gemäss (II. 4) für x_{3k} folgenden Ansatz¹⁾:

$$x_{3k} = A_{jj} (j | d_k | j) + A_{j, j-1} (j | b_k | j-1) + (j-1 | b_k^* | j) A_{j-1, j}^* \quad (\text{II. 7})$$

Die A_{jj} und $A_{j, j-1}$ hängen von j und n ab. Aus der Bedingung

$$[x_{3k}, x_{3l}] = 0 \quad (\text{II. 8})$$

folgen mit Hilfe der Relationen (II. 6) (a–d) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A_{j, j-1} [(j+1) A_{jj} - (j-1) A_{j-1, j-1}] &= 0 \\ |A_{jj}|^2 + |A_{j, j-1}|^2 (2j-1) - |A_{j+1, j}|^2 (2j+3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 9})$$

Die 1. Gleichung bedeutet, dass in (II. 8) der Koeffizient der b_k , die 2. Gleichung, dass der Koeffizient von d_k verschwinden muss. Weiter liefert die Gleichung

$$\sum_k x_{3k}^2 = 1 \quad (\text{II. 10})$$

auf Grund der Relationen (II. 6, e–h) die weitere Gleichung

$$j(j+1) |A_{jj}|^2 + j(2j-1) |A_{j, j-1}|^2 + (j+1)(2j+3) |A_{j+1, j}|^2 = 1 \quad (\text{II. 11})$$

Aus (II. 9) und (II. 11) folgt

$$A_{jj} = \frac{\alpha}{j(j+1)}; \quad |A_{j, j-1}|^2 = \frac{j^2 - \alpha^2}{j^2(2j-1)(2j+1)} \quad (\text{II. 12})$$

Dabei ist α eine Konstante. Diese ist durch die Bedingung

$$j \geq n$$

bestimmt. Setzen wir in der ersten Gleichung von (II. 9) $j = n$, so muss, weil $A_{n-1, n-1} = 0$ das Produkt $A_{n, n-1} A_{nn}$ verschwinden. Daher ist

$$\alpha = n$$

Wir erhalten somit

$$A_{jj} = \frac{n}{j(j+1)}; \quad A_{j, j-1} = \frac{\sqrt{(j+n)(j-n)}}{j\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} \quad (\text{II. 12}')$$

Führt man neben den Operatoren b_k , den h_k entsprechende Ope-

¹⁾ Die in (II. 7) und im folgenden verwendete symbolische additive Schreibweise ist stets im Sinne der allgemeinen Regel (II. 4) zu verstehen.

ratoren c_k ein, deren Matrixelemente aus (II. 5) durch Ersetzen von m durch n entstehen, so gilt offenbar, da

$$\left. \begin{aligned} (j, n | h_3 | j, n) &= n; \quad (j, n | c_3 | j-1, n) = \sqrt{(j+n)(j-n)} \\ (j, n, m | x_{ik} | j, \bar{n}, \bar{m}) &= \frac{(j, n | h_i | j, \bar{n}) (j, m | d_k | j, \bar{m})}{j(j+1)} \\ (j, n, m | x_{ik} | j-1, \bar{n}, \bar{m}) &= \frac{(j, n | c_i | j-1, \bar{n}) (j, m | b_k | j-1, \bar{m})}{j \sqrt{(2j+1)(2j-1)}} \\ (j, n, m | x_{ik} | j+1, \bar{n}, \bar{m}) &= \frac{(j, n | c_i^* | j+1, \bar{n}) (j, m | b_k^* | j+1, \bar{m})}{(j+1) \sqrt{(2j+3)(2j+1)}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 13})$$

Denn der Index 3 darf wegen des Tensorcharakters der x_{ik} vor keinem anderen Index ausgezeichnet sein¹⁾.

Die Darstellung (II. 13) ist unabhängig von einer speziellen Darstellung der Operatoren d_k, b_k, h_i, c_i . d_k und b_k haben lediglich die Relation (II. 6); h_k, c_k die diesen entsprechenden Relationen zu erfüllen.

III. Wegen des Auftretens des Operators Ω in (I. 1) sind d_k und h_k keine Integrale der Bewegungsgleichungen. Wohl aber sind die Spinsumme

$$\tilde{D} = \tilde{d} + \tilde{d}' \quad (\text{III. 1})$$

sowie die Summe der „isotopic spin“

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \tilde{h}' \quad (\text{III. 2})$$

mit \mathcal{H} vertauschbar. Wir wollen daher an Stelle der Variablen

$$j, m, n; j', m', n'$$

die neuen Variablen

$$J, K, M, N, j, j' \quad (\text{III. 3})$$

einführen. Dabei ist

$$\sum_k D_k^2 = J(J+1); \quad \sum_k H_k^2 = K(K+1)$$

$$D_3 = M, \quad H_3 = N$$

Aus der Darstellungstheorie der Drehgruppe folgt

$$|j - j'| \leq J, K, \leq j + j' \quad (\text{III. 4})$$

Da wir x_{ik} durch d_k, h_k, b_k, c_k und j darstellen können, so haben wir

¹⁾ Im Spezialfall $j = \frac{1}{2}$ hat G. WENTZEL $(j, n, m | x_{ik} | j, \bar{n}, \bar{m})$ berechnet (Formel (15. 10) l. c.).

nun die Aufgabe, die Matrizen dieser Grössen in den neuen Variablen zu berechnen. Es genügt diese Aufgabe für d_k und b_k zu lösen. Die Formeln für h_k und c_k erhält man durch Vertauschen von J mit K und von M mit N .

IIIa. *Berechnung von d_k als Matrix in den Variablen J, M, j, j' .*
Da \vec{d} mit \vec{d}' vertauschbar ist, so gilt

$$[d_i, D_k] = [D_i, d_k] = i d_l \quad (i, k, l \text{ zyklisch}) \quad (\text{IIIa. 1})$$

d. h. d_k ist eine Vektormatrix bezüglich D_k . Wir führen nun Operatoren B_k und B_k^* ein, welche mit den D_k zusammen den Relationen (II. 6) genügen (d. h. man hat in diesen Relationen d_k, b_k, b_k^*, j durch D_k, B_k, B_k^*, J zu ersetzen).

Nun machen wir im Sinne von (II. 4) für d_k den folgenden Ansatz

$$d_k = f(J) (J | D_k | J) + g(J) (J | B_k | J-1) + (J-1 | B_k^* | J) g^*(J) \quad (\text{IIa. 2})$$

$f(J)$, $g(J)$ und $g^*(J)$ sind noch Funktionen von j und j' was wir gelegentlich auch explizit zum Ausdruck bringen werden. $g^*(J)$ ist das Konjugiert-komplexe von $g(J)$; denn d_k ist eine hermitesche Matrix.

Setzt man den Ansatz (IIIa. 2) in die beiden Gleichungen

$$[d_i, d_k] = i d_l; \quad \sum_k d_k^2 = j(j+1)$$

ein und benützt die (II. 6) entsprechenden Relationen für D_k und B_k , so folgen für $f(J)$ und $g(J)$ die folgenden Gleichungen:

$$g(J) [(J+1) f(J) - (J-1) f(J-1)] = g(J) \quad (\text{IIIa. 3})$$

$$f^2(J) + (2J-1) |g(J)|^2 - (2J+3) |g(J+1)|^2 = f(J) \quad (\text{IIIa. 4})$$

$$J(J+1) f^2(J) + J(2J-1) |g(J)|^2 + (J+1)(2J+3) |g(J+1)|^2 = j(j+1) \quad (\text{IIIa. 5})$$

Aus (IIIa. 3) folgt sofort

$$f(J) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha(j, j')}{J(J+1)} \quad (\text{IIIa. 6})$$

$\alpha(j, j')$ ist noch zu bestimmen.

Aus (IIIa. 4) und (IIIa. 5) folgt durch Elimination von $g(J+1)$

$$(J+1)^2 f^2(J) - (J+1) f(J) + (2J+1)(2J-1) g^2(J) = j(j+1) \quad (\text{IIIa. 7})$$

Setzt man hier den Ausdruck (IIIa. 6) für $f(J)$ ein, so folgt

$$|g(J)|^2 = \frac{(j + \frac{1}{2})^2 - \left[\frac{1}{2} J + \frac{\alpha(j, j')}{J} \right]^2}{(2J+1)(2J-1)} \quad (\text{IIIa. 8})$$

Bestimmung von $\alpha(j, j')$: Da $J \gg |j - j'|$ ist, so muss $g(|j - j'|)$ verschwinden; denn sonst würden Übergänge nach $J = |j - j'| - 1$ auftreten. Desgleichen muss $g(j + j' + 1)$ verschwinden. Diese Bedingungen bestimmen $\alpha(j, j')$:

$$\alpha(j, j') = \frac{1}{2} [j | j + 1 - j' (j' + 1)] \quad (\text{IIIa. 9})$$

Somit erhalten wir aus (IIIa. 6), (IIIa. 8) und (IIIa. 9):

$$f(J) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{j(j+1) - j'(j'+1)}{J(J+1)} \right] \quad (\text{IIIa. 10})$$

$$g(J) = g^*(J) =$$

$$\frac{1}{2J \sqrt{(2J+1)(2J-1)}} \sqrt{[J^2 - (j-j')^2][(j+j'+1)^2 - J^2]} \quad (\text{IIIa. 11})$$

Durch (IIIa. 10), (IIIa. 11) und (IIIa. 2) ist somit d_k als Matrix mit den Variablen J, M dargestellt. Setzt man

$$d'_k = f'(J | D_k | J) + g'(J) (J | B_k | J - 1) + (J - 1 | B_k^* | J) g'(J)$$

so folgt wegen

$$d_k + d'_k = D_k,$$

dass

$$g'(J) = -g(J)$$

und dass $f'(J)$ aus $f(J)$ durch Vertauschen von j mit j' hervorgeht. h_k, h'_k erhält man aus d_k, d'_k durch Vertauschen von J mit K und M und N .

II. b. *Berechnung von b_k, b_k^* als Matrizen in den Variablen J, M, j, j' .* Da b_k mit d'_k vertauschbar ist, so ist d_k eine Vektormatrix bezüglich D_k . Daher machen wir den Ansatz

$$(j | b_k | j - 1) = s_{j, j-1}(J) (J | D_k | J) + t_{j, j-1}(J) (J | B_k | J - 1) + (J - 1 | B_k^* | J) r_{j, j-1}(J) \quad (\text{IIIb. 1})$$

$t_{j, j-1}(J)$ wird nicht gleich $r_{j, j-1}(J)$ sein, da b_k keine hermitesche Matrix ist. Um s, t und r zu bestimmen, benützen wir die Gleichungen (II. 6, c) bis (II. 6, f) für d_k, b_k und b_k^* . Wir denken uns den Ansatz (IIIb. 1) in diese Gleichungen eingesetzt und benützen die Relationen (II. 6) für D_k, B_k, B_k^* sowie die Formeln für d_k

gemäss (IIIa. 2), (IIIa. 10), (IIIa. 11). Von den so entstehenden Gleichungen verwenden wir nur die Terme diagonal in J . So erhalten wir

$$|s_{j,j-1}(J)|^2 + (2J-1)|t_{j,j-1}(J)|^2 - (2J+3)|r_{j,j-1}(J+1)|^2 = (2j-1)f_j(J) \quad (\text{IIIb. 2})$$

$$|s_{j,j-1}(J)|^2 + (2J-1)|r_{j,j-1}(J)|^2 - (2J+3)|t_{j,j-1}(J+1)|^2 = -(2j+1)f_{j-1}(J) \quad (\text{IIIb. 3})$$

$$J(J+1)|s_{j,j-1}(J)|^2 + J(2J-1)|t_{j,j-1}(J)|^2 + (J+1)(2J+3)|r_{j,j-1}(J+1)|^2 = j(2j-1) \quad (\text{IIIb. 4})$$

$$J(J+1)|s_{j,j-1}(J)|^2 + J(2J-1)|r_{j,j-1}(J)|^2 + (J+1)(2J+3)|t_{j,j-1}(J+1)|^2 = j(2j+1) \quad (\text{IIIb. 5})$$

(N. B. in (IIIb. 3) und (IIIb. 5) haben wir noch j durch $j-1$ ersetzt). Wir heissen nun

$$\begin{aligned} |t_{j,j-1}(J)|^2 + |r_{j,j-1}(J)|^2 &= U_j(J) \\ |t_{j,j-1}(J)|^2 - |r_{j,j-1}(J)|^2 &= T_j(J) \end{aligned} \quad (\text{IIIb. 6})$$

Durch Subtraktion von (IIIb. 2) von (IIIb. 3) sowie von (IIIb. 4) von (IIIb. 5) folgt je eine Rekursionsformel für $T_j(J)$. Indem man aus diesen beiden Formeln $T_j(J+1)$ eliminiert und (IIIa. 10) beachtet, folgt

$$T_j(J) = \frac{j}{J(2J-1)(2J+1)} \{2J^2 + 2j^2 - 1 - 2j'(j'+1)\} \quad (\text{IIIb. 7})$$

Wenn wir (IIIb. 2) und (IIIb. 3) sowie (IIIb. 4) und (IIIb. 5) addieren und aus diesen Gleichungen $s_{j,j-1}(J)$ eliminieren, erhalten wir die folgende Rekursionsformel für $U_j(J)$:

$$J^2(2J-1)U_j(J) - (J+1)^2(2J+3)U_j(J+1) = J(J+1)[(2j-1)f_j(J) - (2j+1)f_{j-1}(J)] - 4j^2 \quad (\text{IIIb. 8})$$

Wir setzen

$$U_j(J) = \frac{u_j(J)}{J^2(2J-1)(2J+1)} \quad (\text{IIIb. 9})$$

und erhalten aus (IIIb. 8)

$$u_j(J) - u_j(J+1) = (2J+1)J(J+1)[(2j-1)f_j(J) - (2j+1)f_{j-1}(J)] - 4j^2(2J+1)$$

Setzen wir rechts $f_j(J)$ gemäss (IIIa. 10) ein, so lässt sich diese Gleichung leicht auflösen und man findet

$$u_j(J) = a(j, j') + \frac{1}{2}(J^4 - J^2) - [j'(j'+1) - 3j^2]J^2 \quad (\text{IIIb. 10})$$

$a(j, j')$ ist die „Integrationskonstante“ und muss noch bestimmt werden. Zunächst findet man, z. B. mit Hilfe von (IIIb. 4), (IIIb. 5)

$$|s_{j, j-1}(J)|^2 = \frac{1}{2J(J+1)} \left\{ j^2 + j'(j'+1) - \frac{a(j, j')}{J(J+1)} \right\} - \frac{1}{4} \quad (\text{IIIb. 11})$$

Bestimmung von $a(j, j')$ aus einer „Randbedingung“:

Da $J \leq j+j'$ ist, so muss $s_{j, j-1}(j+j')$ verschwinden; denn es dürfen keine Matrixelemente auftreten, bei denen J seinen Maximalwert beibehält und zugleich j abnimmt. Somit folgt aus (IIIb. 11) mit $J = j+j'$

$$a(j, j') = \frac{1}{2} (j-j') (j-j'-1) (j+j') (j+j'+1) \quad (\text{IIIb. 12})$$

Damit ist $a(j, j')$ bestimmt und (IIIb. 11) liefert die Gleichung

$$|s_{j, j-1}(J)|^2 = \frac{1}{4J^2(J+1)^2} \{ [J(J+1) - (j-j')(j-j'-1)] [(j+j')(j+j'+1) - J(J+1)] \} \quad (\text{IIIb. 13})$$

Weiter ist

$$|t_{j, j-1}(J)|^2 = \frac{1}{2} (T_j(J) + U_j(J)) = \frac{1}{4J^2(2J-1)(2J+1)} \{ (J^4 + 4jJ^3 + (6j^2 - 2j'(j'+1) - 1)J^2 + 2j(2j^2 - 2j'(j'+1) - 1)J + 2a(j, j')) \} \quad (\text{IIIb. 14})$$

Wir bemerken nun, dass die Koeffizienten von J^n in (IIIb. 14) die symmetrischen Funktionen der „Wurzeln“

$$(j+j'), (j-j'), (j+j'+1), (j-j'-1)$$

sind. Infolgedessen kann (IIIb. 14) in folgender Form geschrieben werden:

$$|t_{j, j-1}(J)|^2 = \frac{1}{4J^2(4J^2-1)} [(J+j+j')(J+j-j')(J+j+j'+1)(J+j-j'-1)] \quad (\text{IIIb. 14}')$$

Entsprechend findet man für $r_{j, j-1}(J)$:

$$|r_{j, j-1}(J)|^2 = \frac{1}{4J^2(4J^2-1)} [(J-j-j')(J-j+j')(J-j-j'-1)(J-j+j'+1)] \quad (\text{IIIb. 15})$$

Diese Ausdrücke sind wegen $j+j' \geq J \geq |j-j'|$ nie negativ und genügen den richtigen Randbedingungen. Es bleiben nun noch die beim Ausziehen der Quadratwurzeln aus (IIIb. 13), (IIIb. 14) und (IIIb. 15) zu wählenden Vorzeichen zu bestimmen. Da die Relationen (II. 6) beim Ersetzen von b_k durch $-b_k$ bestehen

bleiben, ist das Vorzeichen von $s_{j,j-1}(J)$ frei wählbar. Wir setzen

$$|s_{j,j-1}(J)| = s_{j,j-1}(J) \quad (\text{IIIb.16})$$

Nun benützen wir die Relation (IIIa.6). Diese ergibt für den Koeffizienten von $(J|B_k|J-1)$ folgende Gleichung:

$$(J+1)f_j(J)t_{j,j-1}(J) - (J-1)g_j(J)s_{j,j-1}(J-1) = (j+1)t_{j,j-1}(J) \quad (\text{IIIb.17})$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird, hat man

$$|t_{j,j-1}(J)| = -t_{j,j-1}(J) \quad (\text{IIIb.18})$$

zu setzen. Entsprechend findet man, durch Betrachtung der Koeffizienten von $(J-1|B_k^*|J)$:

$$|r_{j,j-1}(J)| = r_{j,j-1}(J) \quad (\text{IIIb.19})$$

Die Grössen s' , t' und r' erhält man durch Vertauschen von j mit j' und passende Wahl der Vorzeichen. Da $g=|g|$, $g'=-|g'|=-g$ so gilt

$$t' = |t'| \quad r' = -|r'|$$

Wir fassen das Resultat des III. Abschnittes zusammen: In der Darstellung, in welcher

$$\sum_k (d_k + d'_k)^2 = \sum_k D^2 = J(J+1)$$

und

$$d_3 + d'_3 = D_3 = M$$

auf Diagonalform gebracht sind, gilt

$$\left. \begin{aligned} (j|d_k|j) &= f(J, j, j')(J|D_k|J) + g(J, j, j')(J|B_k|J-1) \\ &\quad + (J-1|B_k^*|J)g(J, j, j') \\ (j|b_k|j-1) &= s(J, j, j')(J|D_k|J) + t(J, j, j')(J|B_k|J-1) \\ &\quad + (J-1|B_k^*|J)r(J, j, j') \\ (j-1|b_k^*|j) &= s(J, j, j')(J|D_k|J) + r(J, j, j')(J|B_k|J-1) \\ &\quad + (J-1|B_k^*|J)t(J, j, j') \\ f(J, j, j') &= \frac{1}{2J(J+1)} \{J(J+1) + (j+j'+1)(j-j')\} \\ g(J, j, j') &= \frac{1}{2J\sqrt{4J^2-1}} \sqrt{[J^2 - (j-j')^2][(j+j'+1)^2 - J^2]} \\ s(J, j, j') &= \frac{1}{2J(J+1)} \sqrt{(J-j+j'+1)(J+j-j')(j+j'-J)(j+j'+1+J)} \\ t(J, j, j') &= \frac{-1}{2J\sqrt{4J^2-1}} \sqrt{(J+j+j')(J+j+j'+1)(J+j-j')(J+j-j'-1)} \\ r(J, j, j') &= \frac{1}{2J\sqrt{4J^2-1}} \sqrt{(j+j'-J)(j+j'+1-J)(J-j+j')(J-j+j'+1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Die Quadratwurzeln sind stets positiv. Die Grössen

$$f', -g', s', -r', -t'$$

erhält man aus den Formeln (III) durch Vertauschen von j mit j' . Durch diese Formeln ist die Produktdarstellung $\vartheta_j \times \vartheta_{j'}$ explizit ausreduziert.

IV. *Berechnung der Matrix Ω .* Die Matrix $\Omega = x_{ik} x'_{ik}$ kann man auf Grund der Formeln des II. Abschnittes berechnen. Die Matrixelemente von Ω , welche nicht verschwinden, schreiben wir zunächst mit Hilfe der Formeln (II. 13) für x_{ik} in folgender Form an¹⁾:

$$(IV. 1) \quad (j, j' | \Omega | j, j') =$$

$$\frac{1}{j(j+1)j'(j'+1)} h_i(K, j, j') h'_i(K, j', j) d_k(J, j, j') d'_k(J, j', j)$$

$$(IV. 2) \quad (j, j' | \Omega | j-1, j') =$$

$$\frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}j'(j'+1)} c_i(K, j, j') h'_i(K, j', j-1) b_k(J, j, j') d'_k(J, j', j-1)$$

$$(IV. 3) \quad (j, j' | \Omega | j, j'-1) =$$

$$\frac{1}{j(j+1)j'\sqrt{4j'^2-1}} h_i(K, j, j') c'_i(K, j', j) d_k(J, j, j') b'_k(J, j', j)$$

$$(IV. 4) \quad (j, j' | \Omega | j-1, j'+1) =$$

$$\frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}(j'+1)\sqrt{4(j'+1)^2-1}} c_i(K, j, j') c_{i'}^*(K, j'+1, j-1) b_k(J, j, j') b_{k'}^*(J, j'+1, j-1)$$

$$(IV. 5) \quad (j, j' | \Omega | j-1, j'-1) =$$

$$\frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}j'\sqrt{4j'^2-1}} c_i(K, j, j') c'_i(K, j', j-1) b_k(J, j, j') b_{k'}(J, j', j-1)$$

Weiter existieren noch die zu diesen Matrixelementen hermitesch konjugierten Elemente.

Die Matrizen $d_k(J, j, j')$, $b_k(J, j, j')$ sind durch die Formeln des II. Abschnittes gegeben; ebenso die gestrichenen Grössen. h_k und c_k entstehen aus ihnen durch Vertauschen von J mit K und M mit N .

Man erkennt, dass jedes Matrixelement zwei analog gebaute Faktoren enthält, die in symmetrischer Weise die Grössen $d_k(J)$,

¹⁾ Summationszeichen sind im folgenden weggelassen.

$b_k(J)$ und die Grössen $h_i(K)$, $c_i(K)$ enthalten. Es genügt, jeweilen den einen Faktor zu berechnen, der andere entsteht daraus durch Vertauschen von J mit K .

Es sind somit die 5 Skalare

$$d_k d'_k, b_k d'_k, d_k b'_k, b_k b'^*_k \text{ und } b_k b'_k$$

zu berechnen. Hierzu benützt man die im III. Abschnitt gegebenen Formeln und beachtet wieder die Relationen (II. 6) für D_k, B_k, B_k^* . So findet man z. B.

$$\begin{aligned} d_k(J, j, j') d'_k(J, j', j) &= J(J+1) f(J, j, j') f(J, j', j) \\ &\quad - (2J-1) J \cdot g(J, j, j') g(J, j', j) \\ &\quad - (2J+3)(J+1) g(J+1, j, j') g(J+1, j', j) \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Vorzeichenregel des III. Abschnittes schon benützt, so dass die Grössen f und g durch (III.) gegeben sind. Auf diese Weise folgt

$$\left. \begin{aligned} (j, j' | \Omega | j, j') &= \frac{1}{4j(j+1)j'(j'+1)} A_1(J, j, j') A_1(K, j, j') \\ (j, j' | \Omega | j-1, j') &= \\ &\quad \frac{1}{4j\sqrt{4j^2-1}j'(j'+1)} A_2(J, j, j') A_2(K, j, j') \\ (j, j' | \Omega | j, j'-1) &= \\ &\quad \frac{1}{4j(j+1)j'\sqrt{4j'^2-1}} A_2(J, j', j) A_2(K, j', j) \\ (j, j' | \Omega | j-1, j'+1) &= \\ &\quad \frac{1}{4j\sqrt{4j^2-1}(j'+1)\sqrt{4(j'+1)^2-1}} A_3(J, j, j') A_3(K, j, j') \\ (j, j' | \Omega | j-1, j'-1) &= \\ &\quad \frac{1}{4j, j'\sqrt{(4j^2-1)(4j'^2-1)}} A_4(J, j, j') A_4(K, j, j') \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A_1(J, j, j') &= J(J+1) - j(j+1) - j'(j'+1) \\ A_2(J, j, j') &= \{[J(J+1) - (j-j')(j-j'-1)][(j+j') \\ &\quad (j+j'+1) - J(J+1)]\}^{\frac{1}{2}} \\ A_3(J, j, j') &= \{[J^2 - (j-j'-1)^2][(J+1)^2 - (j-j'-1)^2]\}^{\frac{1}{2}} \\ A_4(J, j, j') &= \{[J^2 - (j+j')^2][(J+1)^2 - (j+j')^2]\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

wobei $j + j' \geq J, K, \geq |j - j'|$; J, K ganz; j, j' halbganz. Besonders einfach ist der Fall $J = K = 0$. In diesem Falle ist stets $j = j'$ und es ist

$$(j | \Omega | j) = (j | \Omega | j - 1) = 1$$

Alle anderen Matricelemente verschwinden.

Die weitere Diskussion des durch (I. 11) und (IV) gegebenen Problems soll einer späteren Arbeit vorbehalten sein¹⁾.

Basel, Physikalische Anstalt und
Mathemat. physikal. Seminar.

¹⁾ M. FIERZ und G. WENTZEL, H. P. A. **17** (1944).

Der Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung.

II. Die Elemente Titan bis Rubidium

von O. Huber, O. Lienhard und H. Wäffler.

(21. IV. 1944.)

I. Einleitung.

Als Kernphotoeffekt bezeichnet man Kernreaktionen, die durch γ -Strahlen hervorgerufen werden. Der Atomkern absorbiert dabei die Energie des γ -Quants und geht durch Emission eines schweren Partikels in einen neuen Kern über. Die abgespaltenen Teilchen sind in den häufigsten Fällen Neutronen. In einem einzigen Fall, dem Magnesium, gelang es, Protonen abzuspalten und die Reaktion $\text{Mg}^{26}(\gamma, p)\text{Na}^{25}$ sicherzustellen¹⁾.

Abgesehen vom D^2 - und vom Be^9 -Kern erfordert die Abspaltung eines schweren Teilchens immer γ -Energien von mehreren MeV, im Mittel 8—9 MeV. Als Quellen für γ -Strahlen mit Quantenenergien dieser Grössenordnung kommen heute einzig Kernreaktionen in Frage und zwar in erster Linie der Protoneinfangprozess an leichten Elementen. Grosse Ausbeuten wurde dabei mit Lithium (Quantenenergie 17,2 MeV), Bor (12,8 MeV) und Fluor (6 MeV) erhalten. In dieser Arbeit wird ausschliesslich die Lithium- γ -Strahlung benützt, die im Prozess $\text{Li}^7(p, \gamma)\text{Be}^8$ entsteht und dessen Wirkungsquerschnitt bei 440 kV Protonenenergie eine scharfe Resonanzstelle hat. Dem direkten Übergang des angeregt entstehenden Be^8 -Kernes in den Grundzustand entspricht die oben angeführte Quantenenergie von 17,2 MeV. Durch sukzessiven Übergang entstehen ausser dieser Linie auch noch solche von 14,5, 11,5 und 8,5 MeV²⁾. Aus Absorptionsmessungen³⁾ nach der von BOTHE angegebenen Koinzidenzmethode folgt jedoch, dass der überwiegende Anteil der Strahlung die Quantenenergie von 17 MeV besitzt, so dass die Lithium- γ -Strahlung im Hinblick auf den Kernphotoeffekt praktisch als homogen angesehen werden darf.

Mit dieser γ -Strahlung haben BOTHE und GENTNER⁴⁾ an einer Reihe von Isotopen den Kernphotoeffekt nachgewiesen. In einer früheren Arbeit⁵⁾ konnten wir zeigen, dass bei den *leichten* Elementen überall da ein Kernphotoeffekt auch gefunden wird, wo sein Nachweis durch das Auftreten eines radioaktiven Restkernes

möglich ist. In der vorliegenden Arbeit werden nun Silicium, das früher nicht in genügender Reinheit zur Verfügung stand sowie die Elemente von Titan bis Rubidium systematisch untersucht, um dadurch ein möglichst vollständiges Bild über den Gang der Ausbeuten des Kernphotoeffektes mit der Kernladung zu gewinnen.

II. Apparatur.

Die für diese Arbeit benützte Hochspannungsanlage, ein elektrostatischer Generator nach VAN DE GRAAFF, ist bereits ausführlich beschrieben worden⁵⁾⁶⁾. Die Ionen entstehen in einer Gasentladung, wobei mit Spannungen bis zu 70 kV und Entladungsströmen von 2—3 mA gearbeitet wird. In einer 5stufigen Nachbeschleunigungsröhre können Protonenströme von $\sim 100 \mu\text{A}$ bis zu $\sim 600 \text{ kV}$ beschleunigt werden. Bei einer Arbeitsspannung von 500 kV fließt ein Kanalstrom von max. 180 μA . Den Abschluss des Kanalstrahlrohrs bildet ein Hohlzylinder aus Eisen von 5 cm Länge und 25 mm Durchmesser, auf dessen Boden die Li-Schicht im Hochvakuum aufgedampft wird. Das Pumpaggregat besteht aus einer rotierenden Vorpumpe und einer 3stufigen Öldiffusionspumpenanlage. Vier Pumpen mit einer Saugleistung von zusammen 600 l/sec Wasserstoff arbeiten parallel auf die Kanalstrahlröhre.

III. Messmethoden.

Im Nachweis der durch die γ -Strahlen ausgelösten Neutronen bestünde die direkteste Feststellung eines Kernphotoeffektes. Leider ist dies aus Intensitätsgründen unmöglich. Führt jedoch die (γ, n) -Reaktion auf einen radioaktiven Kern, so lässt sie sich durch Messung der Aktivität indirekt nachweisen. Da heute die radioaktiven Isotope ziemlich gut bekannt sind, lassen sich die durch Kernphotoeffekt erzeugbaren Aktivitäten meistens vorhersagen. Es ergibt sich deshalb folgender Weg zur Feststellung von Kernphotoeffekten: Man bestrahlt das zu untersuchende Element und misst nachher die Halbwertszeit der induzierten Aktivität. Falls sich zeigen lässt, dass diese von der γ -Strahlung herrührt, so ist damit der Kernphotoeffekt sichergestellt. Wie dies geschieht, wird unter Abschnitt IV eingehend ausgeführt.

Die Präparate wurden in Form von Hohlzylindern über der Target bestrahlt und anschliessend die Aktivität mit einem genau passenden Aluminium-Zählrohr von $\frac{1}{10}$ mm Wandstärke gemessen*). Es hatte einen Durchmesser von 25 mm und eine wirk-

*) Herrn Prof. Dr. Rös, Direktor der E.M.P.A., danken wir bestens für die Erlaubnis der Benützung einer hydraulischen Presse zum Herstellen der Zylinder.

same Länge von 50 mm. Durch eine Antikoinzidenzschaltung, welche die Zählung der Höhenstrahlteilchen verhindert, wurde der Nulleffekt von 12/min. auf die Hälfte heruntersgesetzt. Die Aktivitätsmessung wurde, wenn immer möglich, bis auf einen kleinen Bruchteil des gemessenen Nulleffektes verfolgt und so oft wiederholt, bis die Halbwertszeit genügend genau bestimmt werden konnte. Dabei wurde die von PEIERLS⁷⁾ ausgearbeitete Methode verwendet. Die von uns angegebenen Fehlergrenzen entsprechen dem dreifachen Wert des nach PEIERLS berechneten mittleren Fehlers.

Die untersuchten Elemente wurden rein, als Oxyde oder als Carbonate bestrahlt. Durch die Lithium- γ -Strahlung wird in Sauerstoff eine Aktivität von 125 sec. Halbwertszeit erzeugt, während für den Kernphotoeffekt an Kohlenstoff ihre Energie nicht ausreicht. In allen Fällen, wo das zu untersuchende Element als Verbindung bestrahlt wurde, haben wir mit der Aktivitätsmessung zugewartet bis die Sauerstoffaktivität abgeklungen war.

IV. Ausscheiden von Neutroneneffekten.

Neben dem Resonanzeinfang von Protonen im Prozess $\text{Li}^7(p, \gamma)\text{Be}^8$ spielt sich in Lithium auch die Reaktion $\text{Li}(p, 2\alpha)$ ab. Die entstehenden α -Teilchen haben eine Energie von 8,6 MeV und erzeugen in der Lithium-Schicht Neutronen, da die Schwellenenergie der α -Teilchen für die Reaktion $\text{Li}^7(\alpha, n)\text{B}^{10}$ nur ~ 5 MeV beträgt.⁸⁾ Des weitern ist der Wasserstoff mit 0,1—0,2₀₀ Deuterium verunreinigt, welches die bekannte Neutronenreaktion $\text{Li}^7(\text{D}, n)\text{Be}^8$ hervorruft, deren Ausbeute als Funktion der Beschleunigungsspannung von AMALDI, HAFSTAD und TUVE⁹⁾ gemessen worden ist. Tatsächlich rührt der grösste Teil der aus der Röhre stammenden Neutronen von dieser Reaktion her. Ihre Gesamtintensität ist bei 500 kV und 100 μA Protonenstrom äquivalent 5 mC $\text{Ra} + \text{Be}$. Es muss folglich immer geprüft werden, ob die durch die Bestrahlung erhaltene Aktivität nicht einer Neutronenreaktion zuzuschreiben ist. Als solche kommen alle bekannten Neutronenreaktionen in Frage, nämlich die Austauschprozesse (n, p) und (n, α) , die $(n, 2n)$ -Reaktion und der Einfangprozess (n, γ) .

Am besten sind (n, p) - und (n, α) -Prozesse von Kernphotoeffekten zu unterscheiden, da diese nicht auf die gleichen radioaktiven Isotope führen können. Ihre Halbwertszeiten sind meistens von den beim (γ, n) -Prozess erwarteten verschieden. Eine Ausnahme bildet der Phosphor. Dort entsteht durch den Prozess $\text{P}^{31}(\gamma, n)\text{P}^{30}$ eine Halbwertszeit von 130,6 sec., während in einem

(n, α) -Prozess ein radioaktives Aluminiumisotop mit 138 sec. Halbwertszeit gebildet wird.

Der $(n, 2n)$ -Prozess führt immer auf den gleichen Endkern wie der (γ, n) -Prozess und ist daher schwieriger auszuschliessen als die andern Neutronenreaktionen. Im Falle der Lithium- γ -Strahlung kann man jedoch leicht entscheiden, ob die beobachteten Aktivitäten allein von den γ -Strahlen herrühren oder nicht. Die aus der Röhre stammende Neutronenintensität zeigt als Funktion der Spannung den üblichen exponentiellen Anstieg. Die Lithium- γ -Strahlung besitzt aber bei 440 kV den für sie charakteristischen Resonanzanstieg und bleibt beim Bestrahlen einer dicken Lithium-Schicht für grössere Protonenenergien konstant. Durch Messung des Verlaufs der Ausbeute einer Aktivität als Funktion der Protonenenergie kann immer entschieden werden, ob eine Neutronenreaktion oder ein Kernphotoeffekt vorliegt. Leider bedingt diese Untersuchung recht langwierige Messungen. Wir haben deshalb nach andern Möglichkeiten gesucht, Neutroneneffekte auszuschliessen. Zu diesem Zwecke bestrahlten wir die zu untersuchenden Elemente mit einer Ra + Be-Quelle von 78 mC. Die Spektren der Li + D-Reaktion und der Ra + Be-Neutronen sind von verschiedenen Autoren¹⁰⁾¹¹⁾ gemessen worden. Während aus den Messungen von RICHARDS das Spektrum der Li + D-Neutronen bekannt ist, konnte dieses für die Ra + Be-Quelle nur recht ungenau bestimmt werden. Aus den Ionisationskammermessungen von DUNNING kann man aber schliessen, dass der Anteil der von der Quelle emittierten Neutronen höherer Energien (> 8 MeV) grösser ist als den gemessenen Rückstossprotonen entspricht. Da für einen $(n, 2n)$ -Prozess die Neutronenenergie ~ 8 — 9 MeV betragen muss, so folgt aus den zitierten Arbeiten¹⁰⁾¹¹⁾, dass bei der Li + D-Reaktion $\sim 30\%$ der emittierten Neutronen, bei der Ra + Be-Quelle sicher mehr als 6% der Gesamtintensität diesen Prozess auszulösen vermögen. Da die gesamte aus der Röhre stammende Neutronenintensität (bei $100 \mu\text{A}$ und $500 \text{ kV} \sim 5 \text{ mC Ra + Be äquivalent}$) rund 15mal schwächer ist als diejenige der Ra + Be-Quelle, verhält sich der $(n, 2n)$ -Prozess der beiden Quellen grössenordnungsmässig wie $1:3$. Selbst die Bestrahlung mit den Ra + Be-Neutronen ergab aber keinen messbaren $(n, 2n)$ -Prozess. Es muss also daraus geschlossen werden, dass auch die Neutronen aus der Röhre keinen nachweisbaren Beitrag zu den durch die γ -Strahlen erzeugten Aktivitäten geben werden.

Der Neutroneneinfang kann auf den gleichen Endkern führen wie der (γ, n) -Prozess, wenn er von einem um 2 Masseneinheiten niedrigeren Isotop desselben Elementes ausgeht. Er tritt meistens nur für thermische Neutronen mit grossem Wirkungsquerschnitt

auf. Unsere Li + D-Neutronenquelle emittiert ebenfalls weniger thermische Neutronen als die uns zur Verfügung stehende Ra + Be-Quelle. Es muss deshalb nur dann untersucht werden, ob statt eines (γ, n)-Prozesses die Einfangreaktion (n, γ) für die induzierte Aktivität verantwortlich sein kann, wenn auch die Bestrahlung mit der Ra + Be-Quelle einen messbaren (n, γ)-Prozess ergab.

V. Bestimmung der relativen Ausbeute eines Isotops.

Unter Ausbeute des Kernphotoeffektes eines reinen Elementes verstehen wir die im Zähler gemessene Anfangsaktivität des entstandenen radioaktiven Isotops, wobei die Wandstärke der bestrahlten Substanzen grösser als die Reichweite der β -Teilchen sein soll. Dabei wird die Anfangsaktivität auf Sättigungsbestrahlung umgerechnet und auf eine feste γ -Intensität bezogen. Letztere wird während der Bestrahlung mit einem besondern, von 30 mm Pb umgebenen γ -Zählrohr registriert. Die Umrechnung auf ein reines Element muss dann vorgenommen werden, wenn die bestrahlten Substanzen chemische Verbindungen sind, wobei die rel. Häufigkeit des für den Kernphotoeffekt verantwortlichen Isotops noch berücksichtigt werden muss. Ist A_v die gemessene Ausbeute einer Verbindung, so berechnet sich die Ausbeute A_I des für den (γ, n)-Prozess verantwortlichen Isotops zu:

$$A_I = A_v \cdot \frac{M_v}{M_{El}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r}$$

M_v = Molekulargewicht der Verbindung

M_{El} = Molekulargewicht des Elementes

n = Wertigkeit des Elementes in der Verbindung

r = Relative Häufigkeit des Isotops.

Diese Umrechnung enthält die Annahme der massenproportionalen Absorption der β -Teilchen. Für die Berechnung der Wanddicke der Substanzen wurde die Reichweite der β -Teilchen aus ihrer Energie nach FEATHER¹²⁾ bestimmt. Für Elemente, deren β -Energien unbekannt sind, wie bei Cr und Fe, wurde die Wandstärke genügend dick gewählt.

Die Ausbeutemessungen dürfen direkt miteinander verglichen werden, weil sie in derselben geometrischen Anordnung gemessen wurden. Die in dieser Arbeit angegebenen rel. Ausbeuten erhält man durch Vergleich mit der an Cu⁶³ gemessenen, die gleich 100 gesetzt wird. An Kupfer (Cu⁶³) ergibt sich die grösste Ausbeute der bis jetzt bekannten Kernphotoeffekte. Für Sättigungsbestrahlung erhalten wir für dieselbe mit 100 μ A Ionenstrom, wobei ca. 10^7 γ -

Quanten/sec. erzeugt werden, eine Anfangsaktivität von ~ 12000 Stößen/min.

Wo die uns zur Verfügung stehende Substanzmenge nicht für Normalzylinder von 10 cm Länge ausreichte, wie im Falle des Germaniumoxyds und des Rubidiumkarbonates, wurde auch ein entsprechender Kupferzylinder bestrahlt.

Mit den am Schlusse der Arbeit angegebenen rel. Ausbeuten, kann der rel. Wirkungsquerschnitt für den Kernphotoeffekt berechnet werden. Dabei muss die Selbstabsorption der β -Strahlen berücksichtigt werden, ebenso der Umstand, dass der umgewandelte Kern durch Elektroneneinfang an Stelle einer β^+ -Emission in ein stabiles Isotop übergehen kann. Deshalb genügt die absolute Wirkungsquerschnittsmessung des Photoeffektes für ein Isotop. Diese ist von BOTHE und GENTNER⁴⁾ für das Kupferisotop Cu^{63} durchgeführt worden. Sie erhielten dafür $\sigma \sim 5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$, während HOLTSMARK, TANGEN und WERGELAND¹³⁾ den Wert $\sigma \leq 2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$ angeben.

VI. Messergebnisse.

1. Silicium.

Die drei stabilen Siliciumisotope haben aufeinanderfolgende Massenzahlen 28, 29 und 30. Deshalb kann der Kernphotoeffekt nur am leichtesten Isotop, dem Si^{28} (89,6%), nachgewiesen werden. Er führt auf den durch die Reaktionen $\text{Mg}^{24}(\alpha, n)\text{Si}^{27}$ und $\text{Al}^{27}(p, n)\text{Si}^{27}$ bekannten Positronenstrahler, dessen Halbwertszeit KING und ELLIOTT¹⁴⁾ zu 4,92 sec. bestimmt haben.

Silicium wurde jeweils 10 sec. bestrahlt und die Aktivität während 5 min. verfolgt. Die in 85 Einzelmessungen erhaltene Zerfallskurve zeigt neben einer kurzen Periode eine von den $\text{Li} + \text{D}$ -Neutronen stammende $2,5 \pm 0,4$ min. Aktivität, welche durch einen (n, p) -Prozess aus dem Si^{28} entsteht. Sie wird dem Al^{28} zugeordnet, für dessen Halbwertszeit AMALDI, D'AGOSTINO, FERMI, PONTECORVO, RASETTI und SEGRÈ¹⁵⁾ 2,3 min. gefunden haben. Wenn dieser von den Neutronen herrührende Anteil von der Gesamtaktivität abgezogen wird, bleibt als Resultat die in Fig. 1 dargestellte Zerfallskurve. Ihre Halbwertszeit von $4,5 \pm 0,5$ sec. lässt eindeutig auf den Kernphotoeffekt $\text{Si}^{28}(\gamma, n)\text{Si}^{27}$ schliessen. Ein $(n, 2n)$ -Prozess kann ohne weiteres ausgeschlossen werden, da die Energie der $\text{Li} + \text{D}$ -Neutronen dafür nicht ausreicht. Für die rel. Ausbeute des (γ, n) -Prozesses ergibt sich:

$$\underline{A_{\text{Si}}^{28} = 2,6 \pm 0,5}$$

Durch den Nachweis des Kernphotoeffektes an Si^{28} mit der 17,2 MeV-Lithium- γ -Strahlung ist eine Entscheidung zwischen den beiden im Isotopenbericht 1942 von FLUEGGE und MATTAUCH¹⁶⁾ für das Si^{28} angegebenen Massenwerten möglich geworden. Diese ergeben sich einerseits aus der Reaktion $\text{Si}^{28}(\alpha, p)\text{P}^{31}$ und andererseits aus dem β^- -Zerfall von Al^{28} . Aus der (α, p) -Reaktion folgt ein Massendefekt von Si^{28} gegen Protonen und Neutronen von $237,03 \pm 0,33$ MeV, während aus dem β^- -Zerfall von Al^{28} ein solcher von $234,67 \pm 0,48$ MeV resultiert. Dabei wurde die Masse von $\text{Al}^{28} = 27,99017 \pm 0,00032$ eingesetzt, was einem Massendefekt von $232,45 \pm 0,3$ MeV entspricht und die maximale β^- -Energie

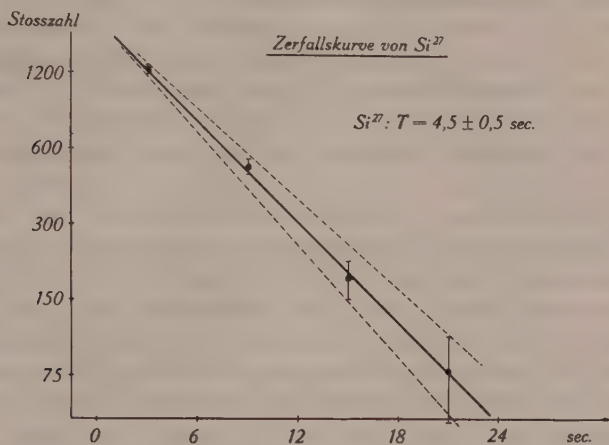


Fig. 1.

($2,98 \pm 0,18$ MeV) den Messungen von EKLUND und HOLE¹⁷⁾ entnommen. Da man die Masse des Si^{27} ebenfalls kennt (Massendefekt $218,78 \pm 0,12$ MeV) kann die Ablösearbeit für den (γ, n) -Prozess an Si^{28} angegeben werden. Diese beträgt $18,25 \pm 0,45$ MeV, wenn man die Masse von Si^{28} aus dem (α, p) -Prozess berechnet; der β^- -Zerfall $\text{Al}^{28}(\beta^-)\text{Si}^{28}$ führt auf eine Ablösearbeit von $15,89 \pm 0,6$ MeV. Daraus ersieht man, dass im ersten Fall der Kernphotoeffekt $\text{Si}^{28}(\gamma, n)\text{Si}^{27}$ energetisch gar nicht möglich wäre. Deshalb muss die beim Prozess $\text{Si}^{28}(\alpha, p)\text{P}^{31}$ gemessene längste Protonengruppe auf einen angeregten Zustand von P^{31} führen, wie FLUEGGE und MATTAUCH bereits auf Grund anderer Überlegungen vermutet haben.

Es ist ebenfalls experimentell noch unentschieden, ob der β^- -Zerfall von Al^{28} auf einen angeregten Si^{28} -Kern führt, oder aber dem Übergang in den Grundzustand entspricht. In diesem Fall hat die Ablösearbeit den oben angegebenen Wert von $15,89 \pm 0,6$

MeV. Andernfalls müsste die beobachtete γ -Energie von $2,05 \pm 0,15$ MeV¹⁷⁾ zur β -Energie hinzugefügt werden, und die Ablösearbeit für das Neutron würde $17,94 \pm 0,75$ MeV betragen. Der Kernphotoeffekt $\text{Si}^{28}(\gamma, n)\text{Si}^{27}$ könnte folglich nicht beobachtet werden. Dies stimmt mit dem zuerst von LIVINGSTON und BETHE¹⁸⁾ angewandten Ordnungsprinzip überein, nach welchem man die γ -Energie zur β -Energie beim Zerfall von Al^{28} nicht hinzuzählen darf, um die Zerfallsenergie des Prozesses zu erhalten.

2. Titan.

Titan besitzt fünf stabile Isotope mit den Massenzahlen 46—50. Durch (γ, n) -Prozess kann nur aus dem Ti^{46} (7,95%) ein radioaktives Isotop, das Ti^{45} entstehen. Dieses ist von ALLEN, POOL, KURBATOW und QUILL¹⁹⁾ gefunden worden. Die dabei benützten Kernreaktionen sind folgende: $\text{Ca}^{42}(\alpha, n)\text{Ti}^{45}$, $\text{Sc}^{45}(p, n)\text{Ti}^{45}$, $\text{Sc}^{45}(d, 2n)\text{Ti}^{45}$ und $\text{Ti}^{46}(n, 2n)\text{Ti}^{45}$. Ti^{45} ist ein Positronenstrahler mit einer max. Energie von 1,24 MeV, dessen Halbwertszeit die Autoren zu $3,08 \pm 0,06$ h angeben.

Wir haben Titan mit den Lithium- γ -Strahlen während 3 h bestrahlt. Aus 6 Einzelmessungen konnten wir die Halbwertszeit der entstandenen Aktivität mit genügender Genauigkeit bestimmen. Sie betrug $3,0 \pm 0,3$ h und stimmt mit der für das Ti^{45} bekannten Periode überein. Durch Neutronenbestrahlung mit unserer Ra + Be-Quelle konnten wir nur eine Halbwertszeit von ~ 1 h finden, die dem Prozess $\text{Ti}^{49}(n, p)\text{Sc}^{49}$ zugeordnet wird. Deshalb stammt die mit unserer Apparatur hervorgerufene Aktivität aus dem Kernphotoeffekt an Ti^{46} .

Für die genaue Bestimmung der rel. Ausbeute können diese Messungen nicht benützt werden. Die metallischen Titankörner wurden flach gehämmert und an die Innenseite eines Hartpapierzylinders geklebt. Die geometrische Anordnung war deshalb nicht die gleiche wie bei dem zum Vergleich bestrahlten Kupferzylinder. Für die Ausbeutemessung wurde deshalb ein Normalzylinder von chemisch reinem Titandioxyd benützt. Die dabei erhaltene Halbwertszeit stimmt mit der beim Titan gefundenen überein. Für die rel. Ausbeute des (γ, n) -Prozesses erhielten wir als Mittel aus allen TiO_2 -Messungen:

$$\underline{A_{\text{Ti}^{46}} = 7,4 \pm 1}$$

3. Chrom.

In Chrom können durch Kernphotoeffekt zwei instabile Isotope erzeugt werden. Aus dem Cr^{52} entsteht ein radioaktives Isotop von $26,5 \pm 1,0$ d Halbwertszeit, dessen β^+ -Energie $< 0,1$ MeV

ist, und das sich zudem noch durch K-Einfang umwandelt. Es besteht daher wenig Aussicht, diesen Kernphotoeffekt nachzuweisen. Der (γ, n) -Prozess am leichtesten Isotop, dem Cr^{50} , führt auf das unbekannte Cr^{49} . Aus der empirischen Tatsache, dass bei radioaktiven Kernen ungerader Massenzahl, welche sich nur um α -Teilchen unterscheiden, ein monotoner Verlauf der Halbwertszeit mit der Ordnungszahl auftritt, haben DICKSON und KONOPINSKI²⁰⁾ viele Perioden bisher unbekannter Isotope vorhersagen können. Mehrere dieser Isotope sind inzwischen in guter Übereinstimmung mit der Vorhersage gefunden worden. Einzig im Falle des Nickels sind Widersprüche zwischen den beobachteten und den nach DICKSON und KONOPINSKI zu erwartenden Halbwertszeiten aufgetreten. Für das unbekannte Cr^{49} ergibt sich nach diesen Überlegungen eine Halbwertszeit von 1 h.

Nach je 2-stündiger Bestrahlung von Chrom haben wir aus acht Messreihen die in Fig. 2 gezeichnete Zerfallskurve erhalten. Aus derselben bestimmt sich die Halbwertszeit zu 45 ± 5 min. Dabei musste mit der Messung der 45 min.-Periode ~ 20 min. gewartet werden, bis die durch Neutronen induzierte 3,9 min.-Aktivität abgeklungen war. Diese stammt aus der Reaktion $\text{Cr}^{52}(n, p)\text{V}^{52}$ und wird auch durch die $\text{Rn} + \text{Be}$ -Neutronen erhalten.

Im Falle des Chroms kann auf chemischem Wege gezeigt werden, dass ein (γ, n) -Prozess stattfindet, der auf das bisher unbekannte Cr^{49} führt. Cr^{49} ist nämlich das höchste Glied der Isobarenreihe Ca^{49} , Sc^{49} , Ti^{49} , V^{49} und Cr^{49} , von denen einzig das Ti^{49} stabil ist. Es muss sich infolgedessen in Richtung des stabilen Isobars dieser Reihe umwandeln, d. h. also (unter β^+ -Emission oder K-Einfang) in V^{49} übergehen. Dieses besitzt einen isomeren Zustand von 33 ± 1 min. Halbwertszeit; dem Grundzustand ist eine Periode von 600 ± 50 d zugeordnet²¹⁾. Wenn folglich durch den Kernphotoeffekt $\text{Cr}^{50}(\gamma, n)\text{Cr}^{49}$ das radioaktive Cr^{49} entsteht, so zerfällt dieses weiter zum Teil in das metastabile V^{49} , zum Teil wahrscheinlich direkt in den Grundzustand von V^{49} . Wir haben nach zweistündiger Bestrahlung von Chromtrioxyd das Vanadium abgetrennt. Die im Niederschlag beobachtete schwache Aktivität ist ebenfalls in Fig. 2 eingezeichnet, und die gefundenen 31 min. stimmen recht gut mit der für das V^{49} bekannten 33 min.-Periode überein, obwohl ihre Anfangsaktivität nur rund $\frac{4}{5}$ des Nulleffektes betrug. Dieser wurde jeweils am Schlusse der Messung bestimmt und hat sich durch die bei der chemischen Trennung verwendeten, schwach radioaktiv verunreinigten Substanzen, von 6 auf ~ 30 Stösse pro Minute erhöht. Daraus kann geschlossen werden, dass am Chromisotop Cr^{50} durch die Lithium- γ -Strahlung ebenfalls ein Neutron abgespalten wird.

Die zur Abtrennung von Vanadium verwendete Methode wurde in freundlicher Weise von Herrn Dr. E. JACOBI ausgearbeitet und beruht darauf, dass das Chrom auch in schwach saurer Lösung durch Bleisalz nahezu quantitativ ausgefällt wird, während das Vanadium in Lösung bleibt. Der bestrahlte Chromtrioxydzyylinder (ca. 120 g) wird in 300 cm³ H₂O aufgelöst. Andererseits wird eine entsprechende Menge Bleinitrat (480 g) in 800 cm³ H₂O gelöst, eine Lösung von 2 g Na₃VO₄ als Trägersubstanz zugegeben und so viele Tropfen konz. HNO₃, bis sich der entstandene Pb₃(VO₄)₂-Niederschlag gerade auflöst. Nun wird das CrO₃ in Siedehitze dazugegossen, kurz aufgekocht und der gelbe Bleichromatniederschlag abfiltriert. Das Filtrat wird mit Ammoniak neutralisiert; das Bleivanadat fällt aus. Es wird filtriert und der Niederschlag mit verdünnter Essigsäure ausgewaschen, um evtl. entstandenes Pb(OH)₂ aufzulösen. Die ganze Trennung benötigt 15–20 min.

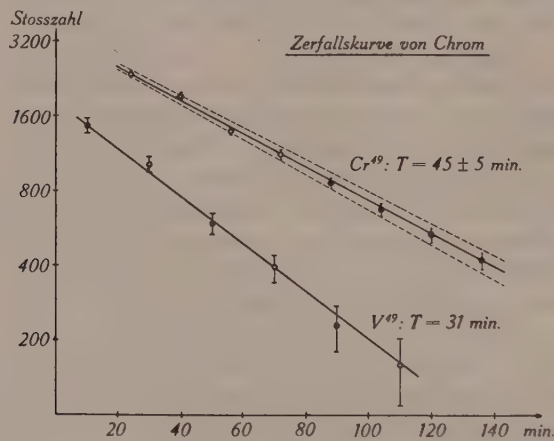


Fig. 2.

Durch den sukzessiven Zerfall von Chrom wird im Zähler die Summe zweier Aktivitäten gemessen, die Cr⁴⁹- und die V⁴⁹-Periode. Leider kann man über deren rel. Anteile an der Gesamtaktivität nichts aussagen, da man die Energie der Cr⁴⁹-β⁺-Teilchen nicht kennt, über dessen K-Einfang nichts weiss und den Prozentsatz der Cr⁴⁹-Kerne nicht bestimmen kann, die in den Grundzustand von V⁴⁹ mit 600 d Halbwertszeit übergehen. Aus der Tatsache, dass die in Fig. 2 aufgetragenen Messpunkte auf einer Geraden liegen, lässt sich schliessen, dass diese im wesentlichen die Cr⁴⁹-Periode darstellt. Dies steht nicht im Widerspruch mit der aus der chemischen Abtrennung des Vanadiums beobachteten 31 min.-

Periode, da dabei eine Anreicherung der radioaktiven Vanadiumkerne aus 120 g CrO_3 erreicht wurde.

Für den an Cr^{50} erhaltenen Kernphotoeffekt $\text{Cr}^{50}(\gamma, n)\text{Cr}^{49}$ ergibt sich eine rel. Ausbeute von:

$$\underline{A_{\text{Cr}^{50}} = 9 \pm 2}$$

in guter Übereinstimmung der Resultate, welche an einem elektrolytisch niedergeschlagenen Chromzylinder und an einem gepressten Cr_2O_3 -Zylinder erhalten worden sind. Die angegebene Ausbeute des Kernphotoeffektes ist vielleicht etwas zu hoch, da ein Teil der im Zähler gemessenen Aktivität von V^{49} herrühren kann.

4. Eisen.

Nach 20 min. dauernder Bestrahlung eines Eisenzylinders wurde eine starke Aktivität beobachtet. Die in Fig. 3 dargestellte

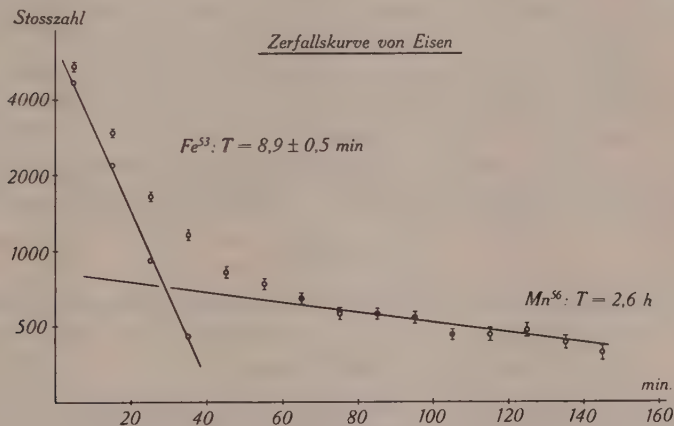


Fig. 3.

Zerfallskurve ist das Ergebnis von drei Einzelmessungen und kann in zwei Anteile zerlegt werden. Die längere Periode von 2,6 h entsteht im Prozess $\text{Fe}^{56}(n, p)\text{Mn}^{56}$, für dessen Halbwertszeit LIVINGOOD und SEABORG²²⁾ $2,59 \pm 0,02 \text{ h}$ gefunden haben. Nach Abzug dieser durch Neutronen verursachten Aktivität verbleibt eine kürzere Periode von $8,9 \pm 0,5 \text{ min.}$, welche eindeutig dem Fe^{53} zugeordnet werden kann²³⁾. Dieses radioaktive Isotop war bisher aus zwei Reaktionen, $\text{Cr}^{50}(\alpha, n)\text{Fe}^{53}$ und $\text{Fe}^{54}(n, 2n)\text{Fe}^{53}$, bekannt. Für die rel. Ausbeute des (γ, n) -Prozesses an Fe^{54} finden wir den Wert:

$$\underline{A_{\text{Fe}^{54}} = 31 \pm 3}$$

Diese rel. Ausbeute ist vielleicht aus folgendem Grunde zu gross. Das Fe^{53} zerfällt in das noch unbekannte Mn^{53} . Nach DICKSON und KONOPINSKI²⁰⁾ sollte das Mn^{53} eine Halbwertszeit von 1 min. haben. Da es nach Ende Bestrahlung mit dem beim Kernphotoeffekt gebildeten Fe^{53} im Gleichgewicht ist, wird im Zähler eine zu grosse Ausbeute gemessen werden. Wir haben versucht, das Mangans isotop Mn^{53} chemisch nachzuweisen, indem wir eine gesättigte Lösung von Eisenchlorid bestrahlten. Nachdem einige mg Mangansalz als Trägersubstanz beigelegt wurden, haben wir das Mangan als Braunstein aus der schwefelsauren Lösung durch Zugabe von festem Ammoniumpersulfat ausgefällt. Nach Variation der Menge an Säure, Lösungsmittel und Oxydationsmittel wurde für einen gut filtrierbaren Niederschlag 4 min. benötigt. Beim Messen des Niederschlags konnte keine Aktivität festgestellt werden. Man kann daraus nur schliessen, dass die Halbwertszeit des Mn^{53} unter 1—2 min. liegen muss, da eine solche Aktivität aus Intensitätsgründen nicht beobachtet werden könnte.

An den drei schweren stabilen Eisenisotopen $\text{Fe}^{56, 57, 58}$ kann der Kernphotoeffekt nicht nachgewiesen werden, da der (γ, n) -Prozess am Fe^{56} auf einen radioaktiven Kern von ~ 4 a Halbwertszeit führt. Obwohl wir einen Eisenzylinder, der während mehreren Monaten als Target diente, auf diese Aktivität hin untersucht haben, konnte kein den Nulleffekt übersteigender Effekt gefunden werden.

5. Nickel.

Nach Messungen von NELSON, POOL und KURBATOW²⁴⁾ besitzt Nickel zwei radioaktive Isotope, das $\text{Ni}^{57}(36 \pm 2 \text{ h})$ und das $\text{Ni}^{63}(2,6 \pm 0,03 \text{ h})$. Beide Aktivitäten können auch durch (γ, n) -Prozess entstehen. Zudem wäre die Entstehung des unbekannten Ni^{59} aus dem stabilen Ni^{60} möglich. Nach 8stündiger Bestrahlung von Nickel konnte die induzierte Aktivität während 84 Stunden verfolgt werden; die aus zwei Messreihen erhaltene Zerfallskurve ist in Fig. 4 gezeichnet. Ihre Halbwertszeit von $36,9 \pm 1,5 \text{ h}$ stimmt so gut mit der für das Ni^{57} bekannten überein, dass die Aktivität durch Kernphotoeffekt aus dem stabilen $\text{Ni}^{58}(67,4\%)$ entstanden sein muss. Für die rel. Ausbeute der (γ, n) -Reaktion finden wir den Wert:

$$A_{\text{Ni}}^{58} = 3,9 \pm 0,7$$

Ni^{57} ist ein Positronenstrahler und zerfällt in das instabile Cobaltisotop Co^{57} . Dieses hat eine Halbwertszeit von $270 \text{ d}^{24)$, so dass sein Zerfall die Ausbeute des Kernphotoeffektes an Nickel nicht fälscht.

Von der 2,6 h-Periode wurde nichts bemerkt, was durch die geringe rel. Häufigkeit des Ausgangsisotops Ni^{64} (0,88 %) erklärt werden kann. Wie schon erwähnt (S. 203) stimmt die von NELSON, POOL und KURBATOW für das Ni^{57} experimentell gefundene Halbwertszeit mit den Vorhersagen von DICKSON und KONOPINSKI nicht

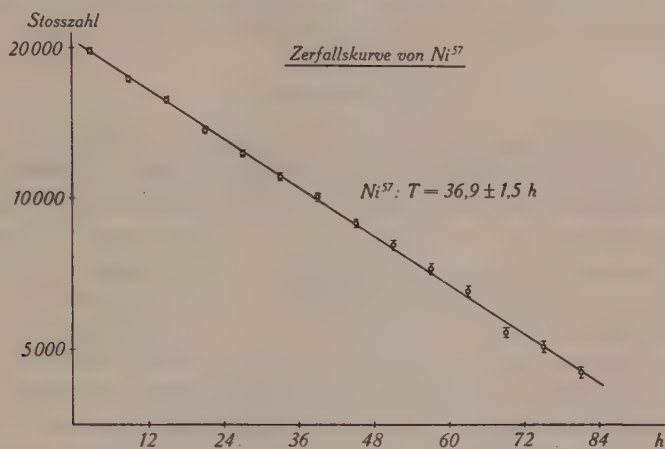


Fig. 4.

überein. Danach käme dem unbekannten Ni^{59} die 36 h-Periode zu, während das Ni^{57} eine Aktivität von 2 min. zeigen sollte. Trotzdem wir besonders nach einer kurzen Halbwertszeit gesucht haben, konnten wir mit der Lithium- γ -Strahlung keine 2 min.-Aktivität finden in Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Forscher (loc. cit.).

6. Kupfer.

Durch Abspalten eines Neutrons von den beiden stabilen Kupferisotopen $\text{Cu}^{63,65}$ entstehen zwei radioaktive Isotope mit den Halbwertszeiten Cu^{62} : $9,92 \pm 0,05$ min. und Cu^{64} : $12,8 \pm 0,3$ h. Die kürzere Periode wurde schon von BOTHE und GENTNER⁴⁾ nach Bestrahlung von Cu mit den Lithium- γ -Strahlen beobachtet. Ihre Anfangsaktivität wird nach der in der Einleitung erwähnten Umrechnung gleich 100 gesetzt. Dabei wurde in den früheren Arbeiten die rel. Häufigkeit des Ausgangsisotops, Cu^{63} , zu 68 % angenommen, während nach massenspektrographischen Messungen von EWALD²⁵⁾ der genauere Wert 70,1 ist. In dieser Arbeit wurde den Ausbeuteberechnungen der EWALD'sche Wert zugrundegelegt.

Wir haben Kupfer nochmals bestrahlt und speziell nach dem Kernphotoeffekt am Isotop Cu^{65} gesucht. Nach je ~ 8 stündiger Bestrahlungsdauer wurde im Zähler nach Abklingen der 9,92 min.-

Periode eine Aktivität beobachtet, deren Halbwertszeit sich aus mehreren Messungen zu $11,9 \pm 1,0$ h ergab. Diese 11,9 h-Periode muss dem Cu^{64} zugeordnet werden, welches somit ebenfalls durch Kernphotoeffekt aus dem stabilen Cu^{65} (29,9%) entsteht. Für die rel. Ausbeute dieses (γ, n)-Prozesses ergibt sich:

$$\underline{A_{\text{Cu}^{65}} = 2,3 \pm 0,4}$$

7. Germanium.

Germanium besitzt fünf stabile Isotope: Ge^{70} (21,2%), Ge^{72} (27,3%), Ge^{73} (7,9%), Ge^{74} (37,1%) und Ge^{76} (6,5%). Daneben sind vier radioaktive Isotope bekannt, die von SEABORG, LIVINGOOD und FRIEDLANDER²⁶⁾ sowie von SAGANE, MIJAMOTO und IKAWA²⁷⁾ näher untersucht worden sind. Hier interessieren hauptsächlich jene radioaktiven Isotope, welche durch den (γ, n)-Prozess entstehen könnten, nämlich Ge^{69} , Ge^{71} und Ge^{75} . Ge^{69} ist bis jetzt nur durch eine einzige Kernreaktion hergestellt worden, nämlich von MANN²⁸⁾ durch α -Bestrahlung von Zink. Seine Halbwertszeit wird mit 195 d angegeben. Über Art und Energie der Strahlung ist nichts bekannt. Ge^{71} ist ein Positronenstrahler, dessen Halbwertszeit von SEABORG,

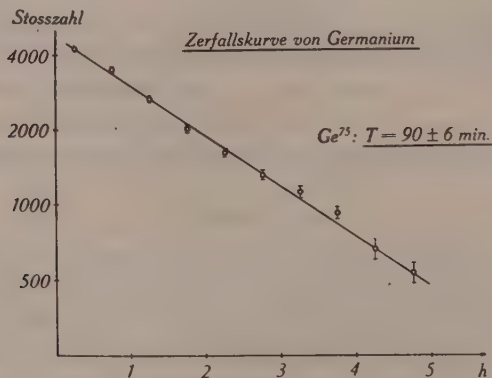


Fig. 5.

LIVINGOOD und FRIEDLANDER²⁶⁾ mit 40 ± 2 h angegeben wird, während SAGANE, MIJAMOTO und IKAWA²⁷⁾ dafür den viel kleineren Wert von 30 ± 4 h gefunden haben. Daneben soll dieses Isotop nach SEABORG u. a. noch einen isomeren Zustand von 11 d Halbwertszeit besitzen; SAGANE u. a. finden keine solche Aktivität in Germanium. Eine ähnliche Halbwertszeit von 9 d ordnen sie einem Galliumisotop zu. Für den Elektronenstrahler Ge^{75} erhielten die genannten Autoren 89 ± 2 min., bzw. 82 ± 2 min. Halbwertszeit.

Um den Kernphotoeffekt $\text{Ge}^{76}(\gamma, n)\text{Ge}^{75}$ zu untersuchen, haben wir einen GeO_2 -Zylinder während je 2 Stunden bestrahlt. Aus 4 Einzelmessungen erhielten wir die in Fig. 5 gezeichnete Zerfallskurve. Ihre Halbwertszeit von 90 ± 6 min. zeigt, dass dabei das radioaktive Ge^{75} gebildet worden ist und stimmt mit der für dieses Isotop bekannten Halbwertszeit überein.

Für die rel. Ausbeute des (γ, n) -Prozesses an Ge^{76} fanden wir den Wert:

$$\underline{A_{\text{Ge}^{76}} = 24 \pm 3}$$

Für das Auffinden des Kernphotoeffektes an Ge^{72} wurde der GeO_2 -Zylinder während 15 h mit der Li- γ -Strahlung bestrahlt und anschliessend über 10 d gemessen, wobei die Zerfalls-

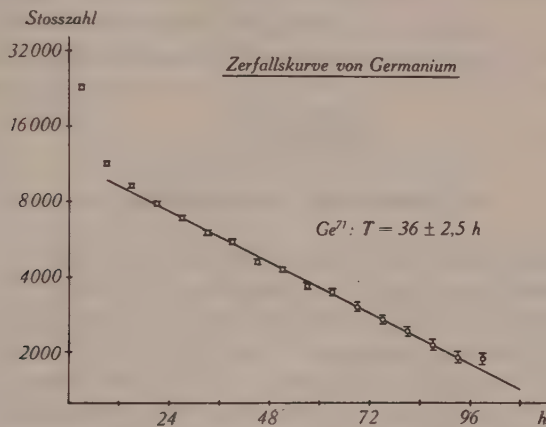


Fig. 6.

kurve der Fig. 6 erhalten wurde. Nach Abklingen der 90 ± 6 min.-Periode bleibt eine Aktivität von $36 \pm 2,5$ h übrig, welche bis auf den Nulleffekt verfolgt werden konnte. Von einer längeren Periode (9—11 d) wurde dabei nichts beobachtet. Die 36 h-Aktivität ist der Reaktion $\text{Ge}^{72}(\gamma, n)\text{Ge}^{71}$ zuzuschreiben, für deren rel. Ausbeute wir den Wert

$$\underline{A_{\text{Ge}^{72}} = 5,5 \pm 1}$$

gefunden haben.

8. Rubidium.

Rubidium hat zwei stabile Isotope mit den Massenzahlen 85 (72,8%) und 87 (27,2%). Das schwerere Isotop ist ein natürlicher β -Strahler mit einer Maximalenergie von 0,132 MeV. Dadurch erhöht sich der Nulleffekt im Zählrohr von 5 auf ~ 20 /min. Wir haben Rubidiumcarbonat bestrahlt und nach dem radioaktiven

Isotop Rb^{84} gesucht, über dessen Halbwertszeit in der Literatur keine eindeutigen Angaben vorhanden sind. Nach Bestrahlungen von einigen min. bis zu 2 h haben wir keine in dieser Grössenordnung liegende Halbwertszeit finden können. Nur die im Zähler gemessene Stosszahl war nach jeder Bestrahlung höher und blieb über viele Stunden konstant. Wir vermuteten deshalb, es handle sich um den Kernphotoeffekt $\text{Rb}^{87}(\gamma, n)\text{Rb}^{86}$, der auf eine Halbwertszeit von 18 ± 1 d führen würde. Nach einer Bestrahlungsdauer von ~ 10 h konnten wir die in Rb_2CO_3 induzierte Aktivität während 18 d verfolgen. Die Auswertung der Zerfallskurve ergab eine Halbwertszeit von rund 17 d, in genügender Übereinstimmung mit der für das Rb^{86} aus anderen Kernreaktionen erhaltenen Periode. Da die $\text{Ra} + \text{Be}$ -Neutronen nur die $\text{Br}^{82}(33,9 \text{ h})$ -Periode induzierten, kann geschlossen werden, dass auch am Rubidiumisotop Rb^{87} der Kernphotoeffekt stattfindet. Seine rel. Ausbeute ergibt sich zu:

$$\underline{A_{\text{Rb}}^{87} = 53 \pm 10}$$

VII. Diskussion der Messergebnisse.

In theoretischen Arbeiten haben BOHR²⁹⁾, BETHE und PLACZEK³⁰⁾, sowie KALCKAR, OPPENHEIMER und SERBER³¹⁾ auch den Kernphotoeffekt behandelt. Danach sind bereits bei mittelschweren Kernen und Anregungsenergien von rund 12 MeV die Wirkungsquerschnitte für den (γ, n) -Prozess von Isotop zu Isotop nicht stark voneinander verschieden und von der Grössenordnung 10^{-25} bis 10^{-26} cm^2 . Bei leichten Kernen und Anregungsenergien dieser Grösse ist der nach der Theorie zu erwartende Wirkungsquerschnitt wesentlich kleiner, und grössere individuelle Schwankungen bei den einzelnen Isotopen könnte man verstehen.

In Tabelle 1 sind die in dieser Arbeit gemessenen Kernphotoeffekte zusammengestellt. Aus ihr ersieht man folgendes: Bei den mittelschweren Kernen ist kein einziger sicherer Fall gefunden worden, in welchem der Wirkungsquerschnitt grössenordnungsmässig nach unten herausfällt. Es muss darauf hingewiesen werden, dass der Kernphotoeffekt nach der hier beschriebenen Messmethode nur für eine beschränkte Zahl von Isotopen überhaupt untersucht werden kann. Wenn dabei der (γ, n) -Prozess nicht beobachtet wurde, so darf nicht ohne weiteres auf einen nach unten herausfallenden Wirkungsquerschnitt geschlossen werden, denn abgesehen davon kann noch aus folgenden Gründen ein (γ, n) -Prozess der Beobachtung entgehen:

1. Geringe rel. Häufigkeit des Ausgangsisotops: Damit lässt sich beispielsweise das negative Resultat für Ni⁶⁴ (0,88 %) und Zn⁶⁷ (0,5 %) erklären.

2. K-Einfang: Bei Positronenstrahlern tritt oft an Stelle der β^+ -Emission der Einfang eines Elektrons aus der K-Schale. Die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohrs für die dabei emittierte Röntgenstrahlung beträgt nur $\sim 1/1000$ derjenigen für Elektronen, so dass sich der Prozess der Beobachtung entzieht. So ist bekannt, dass Cr⁵¹, das durch (γ, n)-Prozess aus dem stabilen Cr⁵² entstehen könnte, grösstenteils durch Einfang eines Hüllenelektrons in Vanadium übergeht, während beim 12,8 h-Kupferisotop Cu⁶⁴ ebenfalls ein Teil der radioaktiven Kerne durch Elektroneneinfang stabil wird.

Tabelle 1.

Relative Ausbeuten des Kernphotoeffektes.

Ausgangsisotop mit rel. Häufigkeit	End- kern	Halbwertszeit		rel. Ausbeute
		unser Ergebnis	Literaturwert	
¹⁴ Si ²⁸ 89,6%	Si ²⁷	4,5 \pm 0,5 s	4,92 s	2,6 \pm 0,5
²² Ti ⁴⁶ 7,95%	Ti ⁴⁵	3,0 \pm 0,3 h	3,08 \pm 0,06 h	7,4 \pm 1
²⁴ Cr ⁵¹ 4,49%	Cr ⁴⁹	45 \pm 5 min.		9 \pm 2
²⁶ Fe ⁵⁴ 5,84%	Fe ⁵³	8,9 \pm 0,5 m	8,9 \pm 0,2 m	31 \pm 3
²⁸ Ni ⁵⁸ 67,4%	Ni ⁵⁷	36,9 \pm 1,5 h	36 \pm 2 h	3,9 \pm 0,7
²⁹ Cu ⁶³ 70,1%	Cu ⁶²	10,5 \pm 0,25	9,92 \pm 0,05 m 10,5 \pm 0,5 m	100 (B & G)
²⁹ Cu ⁶⁵ 29,9%	Cu ⁶⁴	11,9 \pm 1,0 h	12,8 \pm 0,3 h	2,4 \pm 0,4
³² Ge ⁷² 27,3%	Ge ⁷¹	36 \pm 2,5 h	40 \pm 2 h 30 \pm 4 h	5,6 \pm 1
³² Ge ⁷⁶ 6,5%	Ge ⁷⁵	90 \pm 6 m	89 \pm 2 m 82 \pm 2 m	24 \pm 3
³⁷ Rb ⁸⁷ 27,2%	Rb ⁸⁶	\sim 17 d	18 \pm 1 d	53 \pm 10

3. Zu lange Halbwertszeit des entstehenden Isotops: Für die einwandfreie Bestimmung einer Halbwertszeit muss die Anfangsaktivität den Nulleffekt um das Doppelte übersteigen. Da unsere max. Bestrahlungszeiten ungefähr einem Tage entsprechen, so kann bei langen Halbwertszeiten nur ein Bruchteil der Sättigung erreicht werden. Deshalb musste auf die Auffindung der (γ, n)-Reaktion an den Isotopen Cr⁵², Mn⁵⁵, Fe⁵⁶, Co⁵⁹, Zn⁶⁶, Ge⁷⁰, As⁷⁵ und Se⁷⁶ verzichtet werden; auch Krypton konnte aus Intensitätsgründen nicht untersucht werden.

Andererseits kann eine zu grosse Ausbeute erhalten werden, wenn das Folgeprodukt des entstandenen radioaktiven Isotops wieder instabil ist. Wie schon erwähnt, wurde beim Chrom ein sukzessiver Zerfall nachgewiesen, während bei Eisen darüber nicht entschieden werden konnte.

Nach diesen Ausführungen bleibt noch das Nichtauftreten des Kernphotoeffektes an Vanadium besonders zu erwähnen. Vanadium ist hinsichtlich seiner radioaktiven Isotope von WALKE³²⁾ genau untersucht worden. Danach müsste aus dem stabilen V^{51} (100%) ein 3,7 h-Körper durch (γ, n) -Prozess entstehen. Wir haben V_2O_5 während 4 h bestrahlt, aber gar keine Aktivität gefunden ($A < 0,3$). Dies deutet darauf hin, dass entweder die von WALKE dem V^{50} zugeschriebenen β^+ -Teilchen kleine Energie besitzen, oder ein wesentlicher Teil der radioaktiven Vanadiumkerne sich durch K-Einfang umwandelt, da die anderen vorhin besprochenen Gründe für das Nichtbeobachten des (γ, n) -Prozesses hier nicht zutreffen. Wenn man sämtliche bekannten radioaktiven Isotope in einem Sargent-Diagramm aufzeichnet, so ergibt sich, dass einem β -Strahler von 3,7 h Halbwertszeit eine minimale Energie von 0,6 MeV entsprechen müsste. Deshalb bleibt für die Erklärung einer so kleinen Ausbeute des Kernphotoeffektes an V^{51} nur die Annahme, dass beim Positronenstrahler V^{50} ein wesentlicher Teil der Kerne durch K-Einfang stabil wird.

Das Verhältnis R des K-Einfanges zur Positronenemission kann bei erlaubten β -Prozessen aus der FERMI-Theorie berechnet werden^{33) 34)}. R hängt ab von der Kernladung Z und der Energie E_0 (inkl. Ruhemasse) des ausgesandten β -Teilchens. Für den speziellen Fall von V^{50} ($Z = 23$; $W_0 = \frac{E_0}{mc^2} = \frac{0,6 + 0,5}{0,5} \sim 2$) findet man für R den ungefähren Wert $R = 2^*$). Da die beim K-Einfang emittierte Röntgenstrahlung im Aktivitätszählrohr praktisch nicht gezählt wird, ergibt sich bei einer gemessenen rel. Ausbeute A des (γ, n) -Prozesses eine solche von $3 \cdot A$ (für $R = 2$). Deshalb kann als obere Grenze für die rel. Ausbeute des Kernphotoeffektes V^{51} (γ, n) V^{50} der Wert $A < 1$ angegeben werden, mit derselben Genauigkeit, mit welcher der Wert von R aus der FERMI-Theorie bestimmt werden kann.

Wenn der Übergang $V^{50} \rightarrow Ti^{50} + \beta^+$ verboten ist, kann R nicht mehr berechnet werden. Dann ist aber nach dem Sargent-Diagramm die Energie E des Positrons $E > 0,6$ MeV. Dadurch

*) Herrn Prof. Dr. M. FIERZ sind wir für die Berechnung dieses Wertes sehr dankbar.

wird der K-Einfang unwahrscheinlicher, und der Wert $A \cong 1$ kann immer noch als obere Grenze betrachtet werden.

Wenn dem Vanadiumisotop V^{50} die Halbwertszeit $T = 3,7$ h zukommt, so ergibt sich für die rel. Ausbeute des Kernphotoeffektes $V^{51}(\gamma, n)V^{50}$ der kleinste ($A < 1$) aller Werte, die bis jetzt bei den mittelschweren Kernen gefunden wurden.

ALLEN, POOL, KURBATOW und QUILL¹⁹⁾ haben versucht, den Kernphotoeffekt an Ti^{46} nachzuweisen. Nach ihren Überlegungen ändert sich beim Übergang $Ti^{46} \rightarrow Ti^{45}$ der Spin um $\sim 5/2$, dessen Grösse für Ti^{46} (g.g. Typ) 0 oder 1 beträgt, und es sei deshalb unwahrscheinlich, dass die Bestrahlung durch γ -Strahlen den Spin so stark erhöhen könnte. Sie erklärten damit ihr negatives Resultat im Beobachten des Kernphotoeffektes. Wie man der Tabelle 1 entnehmen kann, ist die Ausbeute des (γ, n) -Prozesses an Ti^{46} von gleicher Grössenordnung wie bei den benachbarten Isotopen. Es hat also den Anschein, als ob ein grosser Spinunterschied keinen Einfluss hätte auf die Grösse des Wirkungsquerschnittes eines Kernphotoeffektes. Tatsächlich lässt sich darüber nichts Eindeutiges sagen. Erstens weiss man nichts über den Anteil, den das emittierte Neutron zum Spinunterschied beiträgt. Weiter gilt der oben angegebene Spin von Ti^{45} für den Grundzustand. Beim Kernphotoeffekt kann das Ti^{45} in einem angeregten Zustand entstehen. Es können daher beim Übergang in den Grundzustand ebenfalls Spinänderungen auftreten.

Zusammenfassung.

In Tabelle 1 sind die in dieser Arbeit gemessenen Kernphotoeffekte und ihre rel. Ausbeuten zusammengestellt. Es wurde ein neues radioaktives Chromisotop gefunden. Die Messungen werden diskutiert und stehen im Einklang mit theoretischen Erwägungen.

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, möchten wir für seine wertvolle Unterstützung dieser Arbeit besonders danken. Herrn Dr. JACOBI, der die chemischen Abtrennungen ausführte und dem ALUMINIUMFONDS NEUHAUSEN, welcher die für die Ausführung dieser Untersuchung nötigen Mittel zur Verfügung stellte, sowie der „CIBA“ A.G., Basel, welche uns die Anschaffung der Präparate ermöglichte, danken wir gleichfalls bestens.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: H.P.A. XVII, 139 (1944).
- ²⁾ E. R. GAERTTNER und H. R. CRANE: Phys. Rev. **52**, 582 (1937).
- ³⁾ W. GENTNER: Z. Physik **107**, 354 (1937).

- ⁴⁾ W. BOTHE und W. GENTNER: Z. Physik **106**, 236 (1937); **112**, 45 (1939).
- ⁵⁾ O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: H.P.A. XVI, 33 (1943).
- ⁶⁾ O. LIENHARD: Diss. E.T.H. (1942).
- ⁷⁾ R. PEIERLS: Proc. royal Soc. London **149**, 467 (1935).
- ⁸⁾ K. SCHNETZLER: Z. Physik **95**, 302 (1935).
- ⁹⁾ E. AMALDI, L. R. HAFSTAD und M. A. TUVE: Phys. Rev. **51**, 896 (1937).
- ¹⁰⁾ H. T. RICHARDS: Phys. Rev. **59**, 796 (1941).
- ¹¹⁾ I. R. DUNNING: Phys. Rev. **45**, 586 (1934).
- ¹²⁾ N. FEATHER: Proc. Camb. Phil. Soc. **34**, 599 (1938).
- ¹³⁾ I. HOLTSMARK, R. TANGEN und H. WERGELAND: Norske Vidensk. Selsk. Forhandl. **11**, 46 (1938).
- ¹⁴⁾ L. D. P. KING und D. R. ELLIOTT: Phys. Rev. **58**, 846 (1940).
- ¹⁵⁾ AMALDI, D'AGOSTINO, FERMI, PONTECORVO, RASETTI und SEGRÉ: Proc. roy. Soc. London **149**, 522 (1935).
- ¹⁶⁾ S. FLÜGGE und I. MATTAUCH: Phys. Zeitschr. **44**, 181 (1943).
- ¹⁷⁾ S. EKLUND und N. HOHL: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **29** A, 1 (1943).
- ¹⁸⁾ M. S. LIVINGSTON und H. A. BETHE: Rev. mod. Physics **9**, 245 (1937).
- ¹⁹⁾ I. S. V. ALLEN, M. L. POOL, I. D. KURBATOW und L. L. QUILL: Phys. Rev. **60**, 425 (1941).
- ²⁰⁾ G. DICKSON und E. KONOPINSKI: Phys. Rev. **58**, 949 (1940).
- ²¹⁾ L. TURNER: Phys. Rev. **58**, 679 (1940).
- ²²⁾ I. I. LIVINGOOD und G. T. SEABORG: Phys. Rev. **54**, 391 (1938).
- ²³⁾ I. I. LIVINGOOD und G. T. SEABORG: Phys. Rev. **54**, 51 (1938).
- ²⁴⁾ NELSON, M. L. POOL und I. D. KURBATOW: Phys. Rev. **61**, 428 (1942).
- ²⁵⁾ H. EWALD, erscheint demnächst. Siehe ¹⁶⁾.
- ²⁶⁾ G. T. SEABORG, J. J. LIVINGOOD und F. FRIEDLANDER: Phys. Rev. **59**, 320 (1941).
- ²⁷⁾ R. SAGANE, G. MIJAMOTO und M. IKAWA: Phys. Rev. **59**, 904 (1941).
- ²⁸⁾ W. B. MANN: Phys. Rev. **54**, 649 (1938).
- ²⁹⁾ N. BOHR: Nature **137**, 344 (1936).
- ³⁰⁾ H. A. BETHE und G. PLACZEK: Phys. Rev. **51**, 450 (1937).
- ³¹⁾ F. KALCKAR, I. R. OPPENHEIMER und R. SERBER: Phys. Rev. **52**, 273 (1937).
- ³²⁾ H. WATKE: Phys. Rev. **52**, 777 (1937).
- ³³⁾ E. P. WIGNER: Phys. Rev. **56**, 519 (1939).
- ³⁴⁾ E. KONOPINSKI und G. E. UHLENBECK: Phys. Rev. **48**, 7 (1935).

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Zum Deuteronproblem. I

von M. Fierz und G. Wentzel.

(8. IV. 1944.)

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Zwei-Nukleon-Probleme auf Grund einer Theorie, die dem Nukleon eine Spintr gheit zuschreibt, so dass es angeregte Zustände (Isobaren) besitzt. Das Modell des Nukleons (Isobaren-Energie und Kräfte) wird im wesentlichen der symmetrischen Mesontheorie entnommen (§ 2)¹. Wenn die Isobaren-Anregungsenergie nicht sehr gross ist im Vergleich zur mittleren Wechselwirkungsenergie, so ergeben sich beträchtliche Abweichungen von den früheren Deuteron-Theorien. Zur Lösung des wellenmechanischen Problems in diesem Falle werden zwei Näherungsverfahren vorgeschlagen: Adiabaten-Methode und Variationsverfahren (§ 3). Die Anwendung beschränkt sich (in diesem Teil I) auf Deuteronzustände mit verschwindendem Spin und mit verschwindendem isotopen Spin (§ 4).

§ 1. Einleitung.

In der Feldtheorie der Kernkräfte (Mesontheorie) haben sich zwei verschiedene Betrachtungsweisen herausgebildet. Für die erste, dem Vorbild der elektromagnetischen Strahlungstheorie folgende Betrachtungsweise ist charakteristisch die Entwicklung nach steigenden Potenzen der Kopplungsparameter (St rungsmethode). Wegen der durch die experimentellen Daten geforderten numerischen Grösse dieser Parameter konvergieren diese Entwicklungen sehr schlecht. Der Vorzug dieser Behandlungsweise besteht darin, dass die in der Theorie auftretenden Divergenzen in lorentzinvarianter Art subtrahiert werden k nnen²). Allerdings kann man bei

¹) Nach Abschluss dieser Arbeit erhielten wir Kenntnis von einer Arbeit von W. PAULI u. S. KUSAKA (Phys. Rev. **63** (1943), S. 400), in der auf Grund der gleichen Mesontheorie ebenfalls das Deuteronproblem behandelt wird, jedoch unter Beschränkung auf den Deuteron-Grundzustand (³S) und auf den Grenzfall hoher Isobaren-Energie, wo die Abweichungen von der früheren Theorie geringfügig sind. Da wir hier das Hauptgewicht auf den entgegengesetzten Grenzfall legen und deswegen auch methodisch ganz anders vorgehen, dürfte die Veröffentlichung dieser Arbeit nicht überflüssig sein.

²) G. WENTZEL, ZS. f. Phys. **86** (1933), S. 479 u. 635. P. A. M. DIRAC, Annales de l'Institut H. POINCARÉ **9** (1939), S. 13; Proc. Roy. Soc. **180** (1942), S. 1. E. G RA, Acta Phys. Polon. **7** (1938), S. 159 u. 374; ZS. f. Phys. **120** (1943), S. 121. W. HEITLER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **37** (1941), S. 291 und **38** (1942), S. 296. A. H. WILSON, ebenda **37** (1941), S. 301. E. C. G. STUECKELBERG, Nature **153** (1944), S. 143; Helv. Phys. Acta **17** (1944), S. 3. W. PAULI, Rev. of Mod. Phys. **15** (1943), S. 175.

jedem Schritt der Entwicklung endliche invariante Zusatzterme in willkürlicher Weise addieren, und es lässt sich bis jetzt keine physikalisch befriedigende Vorschrift über die Art der Subtraktion aufstellen. Dies bedeutet, dass durch die Angabe einer Lagrange-Funktion die höheren Näherungen einer solchen Theorie keineswegs definiert sind.

Bei der zweiten Betrachtungsweise entwickelt man nach fallenden Potenzen der Kopplungsparameter¹⁾, und diese Entwicklung konvergiert, wegen der starken Kopplung des Feldes mit den Nukleonen, bedeutend besser. Hier besteht jedoch vorerst keine Möglichkeit, die Divergenzen in invarianter Weise zu eliminieren, und man ist gezwungen, den Nukleonen einen endlichen Radius zuzuschreiben. Wenn aber die Lagrange-Funktion (einschliesslich der Formfunktion der Teilchen) gegeben ist, so ist das betrachtete „Modell“ vollständig definiert. Insbesondere sind die Trägheitseigenschaften der Nukleonen, ähnlich wie die elektromagnetische Masse des Lorentz'schen Elektrons, aus der Theorie berechenbar. Da die Kernkräfte spin- und ladungsabhängig sind, treten hier neben der trägen Masse noch Trägheitsmomente auf, die dem Spin und dem „isotopic spin“ (der Ladung) zugeordnet sind, und entsprechende Rotationsenergien; dies hat zur Folge, dass die Nukleonen angeregte Zustände (Isobaren) mit höheren Werten von Spin und Ladung besitzen. Die Theorie liefert bestimmte Aussagen über die Anregungsenergien der verschiedenen Spin- und Ladungszustände der Teilchen, sowie über ihre Wechselwirkungen in diesen Zuständen. Bei diesen Aussagen geht nun allerdings der Nukleonenradius wesentlich ein. Es zeigt sich aber, dass man auch hier, um mit den Experimenten im Einklang zu bleiben, für den Radius die Grössenordnung des klassischen Elektronenradius oder der Comptonwellenlänge des Protons annehmen muss. Dies ist die Grössenordnung der von HEISENBERG²⁾ postulierten „universellen Länge“, welche die Massen der „Elementarteilchen“ bestimmen soll.

Es scheint uns daher gerechtfertigt, auch jene Folgerungen der Feldtheorie, welche vom Radius der Nukleonen abhängen, in einer unrelativistischen Näherung ernst zu nehmen, obwohl bis jetzt unklar ist, welche Rolle dieser Radius in einer lorentzinvarianten Theorie spielen wird. Die ersterwähnten Theorien, bei welchen

¹⁾ G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **13** (1940), S. 269; **14** (1941), S. 633; **16** (1943), S. 222 u. 551. J. R. OPPENHEIMER und J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* **60** (1941), S. 150. W. PAULI und S. M. DANCOFF, *Phys. Rev.* **62** (1942), S. 85. R. SERBER und S. M. DANCOFF, *Phys. Rev.* **63** (1943), S. 143. W. PAULI und S. KUSAKA, *Phys. Rev.* **63** (1943), S. 400.

²⁾ W. HEISENBERG, *Ann. d. Phys.* **32** (1938), S. 20.

die Divergenzen in invarianter Weise subtrahiert werden können, zeigen ja durch die Unbestimmtheit ihrer höheren Näherungen, dass noch wesentliche Gesichtspunkte zur Einschränkung der mannigfaltigen Möglichkeiten fehlen; solche Gesichtspunkte könnten sich aber gerade durch das Studium der Theorie bei starker Kopplung ergeben. Überdies verdienen die aus dieser Theorie folgenden Kernkräfte, für deren Eigenschaften die Existenz der isobaren Zustände bestimmend ist, auch unabhängig von ihrer speziellen Ableitung ein gewisses Interesse, da hierdurch der Kreis der Gesichtspunkte, nach denen die experimentellen Erscheinungen diskutiert werden können, erweitert wird.

Für die Theorie der zusammengesetzten Kerne bedeutet die Annahme von angeregten Nukleon-Zuständen eine erhebliche Komplikation. Nur die einfachsten Probleme kommen daher zunächst in Betracht. Es sind dies einerseits die Viel-Körper-Probleme, d. h. die schweren Kerne; diese sind bereits von COESTER¹⁾ mittels statistischer Näherungsmethoden untersucht worden. Andererseits bietet sich als nächstliegendes Problem das Zwei-Körper-Problem des Deuterons und seiner Isobaren, das den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden soll.

§ 2. Das Nukleon-Modell.

Die verschiedenen Varianten der Mesontheorie liefern bekanntlich verschiedene Modelle des Nukleons. Die Skalartheorie kann ausgeschlossen werden, da sie den Erfahrungstatsachen sicher nicht gerecht wird. Von den anderen Varianten sind bisher nur die Pseudoskalar- und die Vektorthorie, sowie die Theorie, die mit einer Mischung dieser beiden Felder rechnet, unter der Annahme starker Kopplung durchgeführt worden²⁾; auf diese Theorien sind wir also angewiesen. Weiter unterscheidet man „neutral“, „charged“ und „symmetrical theories“. Die symmetrische Theorie (im Sinne von

¹⁾ F. COESTER, *Helv. Phys. Acta* **17** (1944), S. 35. Nach dieser Arbeit können die schweren Kerne in Übereinstimmung mit der Erfahrung beschrieben werden. PAULI und KUSAKA äussern sich hierüber nur kurz (l. c., S. 415). Während ihre Angaben über die Stabilität der schweren Kerne in der symmetrischen Mischungstheorie (s. u.) mit COESTERS Ergebnissen übereinstimmen, befürchten sie, dass die Berücksichtigung der Coulombenergie zu kleine Gleichgewichtsladungen ergibt. Die ausführlichen Rechnungen von COESTER (l. c., § 6) zeigen jedoch, dass die Gleichgewichtsladung in ziemlich empfindlicher Weise von den Parametern der Theorie abhängt und daher sehr wohl mit dem Erfahrungswert in Einklang gebracht werden kann. — Auch in anderer Hinsicht (magnetische Momente von Proton, Neutron und Deuteron) scheint uns PAULIS und KUSAKAS Beurteilung der Theorie zu pessimistisch; doch kann darauf hier nicht eingegangen werden.

²⁾ Zitate in Fussnote 1, S. 216.

KEMMER¹⁾) empfiehlt sich dadurch, dass sie „ladungsunabhängige“ Kräfte liefert, ohne — wie die „neutral theory“ — auf die Mesontheorie des β -Zerfalls verzichten zu müssen.

Während die Lagrangefunktion der Pseudoskalartheorie bei unrelativistischer Näherung (ruhende Nukleonen) nur einen einzigen Kopplungsparameter aufweist, treten in der Vektorthorie bekanntlich deren zwei auf, die den Wechselwirkungen der longitudinalen bzw. transversalen Mesonen mit den Proton-Neutronen zugeordnet sind: g_{long} und g_{transv} . Ist $g_{\text{long}} = 0$, oder bleibt der Quotient $g_{\text{long}}/g_{\text{transv}}$ dem Betrage nach unter einer gewissen Grenze²⁾, so ergibt die Vektorthorie denselben Ausdruck für die Isobaren-Energie wie die Pseudoskalartheorie. Man kann dann auch beide Felder gemeinsam annehmen (Mischungstheorie), wobei die Möglichkeit besteht, gewisse unerwünschte Terme im Wechselwirkungspotential durch Wahl der Parameter zu eliminieren³⁾.

Wenn man diese — freilich schon sehr ins Detail gehenden — Konsequenzen der Mesontheorie wörtlich nehmen will, so wird man der Pseudoskalar-, Vektor- oder Mischungstheorie, und zwar der symmetrischen Variante, einstweilen eine Vorrangstellung einräumen müssen. Zu ihren Gunsten spricht aber auch die hohe Symmetrie, mit der das Modell des Nukleons in dieser Theorie ausgestattet wird. Wir wollen daher dieses Modell unserer Betrachtung der Zweikörperprobleme zugrundelegen.

Der Ansatz für die Isobaren-Energie laute demnach:

$$H^I = \frac{\varepsilon}{2} |\tilde{P}|^2 + \text{const} \dots \quad (1)$$

Hier bedeutet \tilde{P} einen Kreiseldrehimpuls mit den Eigenwerten

$$|\tilde{P}|^2 = j(j+1), \quad \text{wo } j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

Seine Projektionen auf eine raumfeste und eine „körperfeste“ Achse können diagonal gemacht werden; sie haben halbganze Eigenwerte m, n , wobei $|m| \leq j, |n| \leq j$; j und m sind die Spinquantenzahlen, $n + \frac{1}{2}$ die Ladungszahl des Nukleonzustandes. Für das Folgende ist es bequem, die Konstante in (1) so zu wählen,

¹⁾ N. KEMMER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34** (1938), S. 354.

²⁾ Vgl. G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **16** (1943), S. 551, insbesondere S. 579. Andernfalls setzt sich die Isobaren-Energie aus zwei Rotator-Energien zusammen, die dem Spin und dem isotopen Spin getrennt entsprechen.

³⁾ C. MÖLLER und L. ROSENFELD, Kgl. Danske Vidensk. S. XVII, 8 (1940). J. SCHWINGER, Phys. Rev. **61** (1942), S. 387.

dass der tiefste Eigenwert von H^I null wird; dann haben wir die Eigenwerte:

$$H^I = \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2)$$

Zum Modell gehören ferner die Kernkräfte. Hier interessieren nur die Zweikörperkräfte. Neben einer Zentralkraft liefern die genannten Mesontheorien im allgemeinen noch eine „Tensorkraft“ (Spin-Bahn-Kopplung), die bekanntlich zur Erklärung des elektrischen Quadrupolmoments des Deuterons herangezogen wird. Wir wollen aber die mathematische Aufgabe vereinfachen, indem wir die Tensorkraft zunächst fortlassen; man wird sie nachträglich als Störung berücksichtigen können. Dann ist die statische Wechselwirkungsenergie von der Form

$$V(r) \cdot \Omega, \quad (3)$$

wo r den Abstand der beiden Nukleonen bedeutet und wo Ω eine bestimmte Funktion der Euler'schen Winkel der beiden Nukleon-Kreisel ist¹⁾. In einer vorangegangenen Arbeit des einen von uns²⁾ wurde die zugehörige Ω -Matrix berechnet, zunächst im Schema der Spin- und Ladungsquantenzahlen der beiden einzelnen Nukleonen ($j_1 n_1 m_1 j_2 n_2 m_2$), dann durch eine unitäre Transformation als Matrix bezüglich der Quantenzahlen

$$J, M, K, N, j_1, j_2, \quad (4)$$

hier bedeuten J und $M = m_1 + m_2$ Betrag und Komponente des Deuteron-Spins, und K und $N = n_1 + n_2$ sind die entsprechenden Quantenzahlen des isotopen Spins, d. h. $N + 1$ ist die Gesamtladung des Zwei-Nukleon-Systems; J, M, K, N sind ganzzahlig, und es gilt $|M| \leq J, |N| \leq K$. Die Matrix Ω ist aus Symmetriegründen diagonal bezüglich der Quantenzahlen J, M, K, N ; sie zerfällt demnach in Teilmatrizen bezüglich j_1, j_2 , die noch von J und K abhängen; dabei kommen in jeder Teilmatrix nur solche j_1, j_2 -Werte vor, für die gemäss dem „Vektormodell“ die Ungleichungen gelten:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2, |j_1 - j_2| \leq K \leq j_1 + j_2. \quad (5)$$

Was andererseits die Potentialfunktion V in (3) anbelangt, so ist –

¹⁾ $\Omega = \sum_{i_e} S_{i_e}^{(1)} S_{i_e}^{(2)}$ in der Bezeichnung der in Fussnote 2, S. 218 zitierten Arbeit; vgl. Gl. (15.8), S. 592.

²⁾ M. FIERZ, Helv. Phys. Acta 17 (1944), S. 27. In dieser Arbeit sind die Grössen S_{i_e} (s. die vorangehende Fussnote) mit x_{ik} bezeichnet (bis auf gewisse Vorzeichen).

nach den genannten Mesontheorien — ihre r -Abhängigkeit in grossen Abständen ($r \gg$ Radius des Nukleons) diejenige des Yukawa-Potentials ($\text{const. } e^{-\mu r}/r$) oder zweier superponierter Yukawa-Potentiale (mit $\mu_V \neq \mu_{PS}$: Mischungstheorie). Wir brauchen indessen über die r -Abhängigkeit noch nicht zu verfügen. Dagegen ist wichtig, dass — im Einklang mit den Mesontheorien —

$$V(r) > 0 \quad (6)$$

angenommen wird; denn nach COESTER (l. c.) ist es dieses Vorzeichen, das die Stabilität der schweren Kerne garantiert.

Die Hamiltonfunktion H des Zweikörperproblems setzt sich danach aus folgenden Bestandteilen zusammen: kinetische Energie der Relativbewegung (Operator $-\Delta/M_p$, wo M_p = Protonmasse; $\hbar = 1$), Isobaren-Energien (2) der beiden Nukleonen¹⁾, und Wechselwirkung (3). Wir denken uns H , gesondert für jedes Wertesystem der Quantenzahlen J, M, K, N , als Matrix bezüglich j_1 und j_2 geschrieben:

$$(j_1 j_2 | H | j_1' j_2') = \left\{ \frac{-\Delta}{M_p} + \frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \frac{1}{2})^2 + (j_2 + \frac{1}{2})^2 - 2] \right\} \cdot (j_1 j_2 | 1 | j_1' j_2') \\ + V(r) \cdot (j_1 j_2 | \Omega | j_1' j_2'). \quad (7)$$

Die Schrödingergleichung lautet dann

$$\sum_{j_1' j_2'} (j_1 j_2 | H | j_1' j_2') F(j_1' j_2', \mathbf{r}) = E \cdot F(j_1 j_2, \mathbf{r}) \quad (8)$$

(\mathbf{r} = Vektor der Relativkoordinaten, $|\mathbf{r}| = r$).

Das PAULI'sche Ausschlussprinzip verlangt, dass die Schrödingerfunktion, wenn sie als Funktion der ursprünglichen Variablen $j_1 m_1 n_1 j_2 m_2 n_2$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ dargestellt wird, bei Vertauschung der Koordinaten beider Teilchen das Vorzeichen wechselt. Für die reduzierte Schrödingerfunktion in (8) bedeutet dies:

$$\left. \begin{aligned} F(j_1 j_2, \mathbf{r}) &= -F(j_2 j_1, -\mathbf{r}), \text{ wenn } J + K \text{ gerade;} \\ F(j_1 j_2, \mathbf{r}) &= +F(j_2 j_1, -\mathbf{r}), \text{ wenn } J + K \text{ ungerade.} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ein wesentlicher Parameter der Hamiltonfunktion (7) ist das Verhältnis ε/\bar{V} [\bar{V} = Mittelwert von V ; vgl. etwa (26)]. Ist $\varepsilon \gg \bar{V}$, so kann man näherungsweise $\varepsilon = \infty$ setzen, d. h. den Einfluss der angeregten Nukleonzustände auf die energetisch tiefliegenden Deu-

¹⁾ Wir betrachten die Isobaren-Energien als additiv. Die nach der Mesontheorie zu erwartenden Abweichungen von der Additivität sind in der Tat belanglos; vgl. PAULI und KUSAKA, l. c., Fussnote 7 auf S. 404.

teronzustände vernachlässigen: $F(j_1 j_2, \tau) = 0$ ausser für $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$. Es ist aber

$$\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \mid \Omega \mid \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } J = K = 0, \\ -\frac{1}{3} & \text{für } J = 1, K = 0 \text{ und } J = 0, K = 1, \\ \frac{1}{9} & \text{für } J = K = 1. \end{cases} \quad (10)$$

In dieser Grenze besteht kein Unterschied zwischen Mesontheorien mit starker oder schwacher Kopplung, und man kommt zu einer wohlbekannten älteren Deuterontheorie zurück¹⁾. Es ist nun die Frage, wie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Hamiltonfunktion (7) sich ändern, wenn die Isobarenenergie ε abnimmt und schliesslich klein gegen \bar{V} wird. Namentlich im letzteren Grenzfall müssen sich ganz neue Verhältnisse ergeben, und es wird zu untersuchen sein, für welche Parameterwerte die Übereinstimmung mit der Erfahrung hergestellt werden kann. Wenn auch vermutlich ein mittlerer Wert von ε/\bar{V} ($\approx 1/5$) am ehesten das Richtige treffen wird, legen wir doch besonderes Gewicht auf den Grenzfall $\varepsilon \ll \bar{V}$, weil hier die Wirkungen der Spin-Trägheit am ausgeprägtesten sind.

§ 3. Näherungsmethoden.

Wir haben zuerst versucht, für den Fall des Treppenpotentials [$V(r) = V_0$ für $r < r_0$, $= 0$ für $r > r_0$] exakte Lösungen aufzustellen und auszuwerten; doch führen die Stetigkeitsbedingungen für $r = r_0$ auf eine wenig übersichtliche Gleichung. Man wird daher mit Näherungsmethoden eher zum Ziel kommen. Wir besprechen hier zwei naheliegende Methoden.

A. Adiabaten-Methode.

Wie in der Theorie zweiatomiger Moleküle²⁾ betrachten wir den Kernabstand r zunächst als einen Parameter. Bei festgehaltenem r haben wir statt (7), (8) die Schrödingergleichung

$$\frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \frac{1}{2})^2 + (j_2 + \frac{1}{2})^2 - 2] a(j_1 j_2) + V \sum_{j_1' j_2'} (j_1 j_2 \mid \Omega \mid j_1' j_2') a(j_1' j_2') = W \cdot a(j_1 j_2); \quad (11)$$

¹⁾ (10) entspricht — abgesehen von einem Faktor $1/9$ — dem bekannten Austauschoperator $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$. Die betreffende Deuterontheorie ist die von RARITA und SCHWINGER (Phys. Rev. **59** (1941), S. 436 u. 556) als „symmetrical“ bezeichnete Theorie; diese Autoren untersuchen aber speziell die Wirkung der Tensorkraft. Von dieser Theorie ausgehend, kann man im Falle $\bar{V} \ll \varepsilon$ die Ausserdiagonalelemente der Wechselwirkungsmatrix $V \cdot \Omega$ als kleine Störungen berücksichtigen. So gehen PAULI und KUSAKA in ihrer oben zitierten Arbeit vor, und zwar rechnen sie in der Näherung, dass nur die F -Komponenten mit $j_1, j_2 \leq 3/2$ als von null verschieden betrachtet werden.

²⁾ M. BORN und R. OPPENHEIMER, Ann. d. Phys. **84** (1927), S. 457. R. DE L. KRONIG, ZS. f. Phys. **50** (1928), S. 347.

ihre Eigenwerte seien W_n , ihre Eigenvektoren $a_n(j_1 j_2)$. Wir können die Eigenvektoren reell wählen, weil die Ω -Matrix reell ist. Da V von r abhängt — die Art der Abhängigkeit bleibe noch offen —, sind W_n und a_n Funktionen des Parameters r . Für jeden Wert von r seien die Eigenvektoren auf 1 normiert, so dass

$$\sum_{j_1 j_2} a_{n'}(j_1 j_2, r) a_n(j_1 j_2, r) = \delta_{nn'}. \quad (12)$$

Die Lösungen der Schrödingergleichung (8) entwickeln wir nach diesen Eigenvektoren:

$$F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = \sum_n a_n(j_1 j_2, r) f_n(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Aus (7) und (8) folgt dann:

$$\sum_n \left\{ -E + \frac{-\Delta}{M_p} + W_n(r) \right\} a_n(j_1 j_2, r) f_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

Es sei

$$\left. \begin{aligned} A_{n'n} &= -\frac{2}{M_p} \sum_{j_1 j_2} a_{n'}(j_1 j_2, r) \frac{\partial a_n(j_1 j_2, r)}{\partial r}, \\ B_{n'n} &= -\frac{1}{M_p} \sum_{j_1 j_2} a_{n'}(j_1 j_2, r) \frac{\partial^2 a_n(j_1 j_2, r)}{\partial r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Beachtet man, dass

$$\Delta(a f) = a \cdot \Delta f + 2 \frac{\partial a}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) f + \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} \cdot f,$$

so ergibt (14), mit (12) und (15):

$$\left\{ -E + \frac{-\Delta}{M_p} + W_m(r) \right\} f_m(\mathbf{r}) + \sum_n \left\{ B_{mn} + A_{mn} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} f_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (16)$$

Für die Diagonalelemente der Matrizen (15) gilt nach (12):

$$A_{nn}(r) = 0, \quad B_{nn} = + \frac{1}{M_p} \sum_{j_1 j_2} \left(\frac{\partial a_n(j_1 j_2, r)}{\partial r} \right)^2. \quad (17)$$

An Stelle von (16) kann man daher auch schreiben:

$$\left\{ -E + \frac{-\Delta}{M_p} + W_m(r) + B_{mm}(r) \right\} f_m(\mathbf{r}) + \sum_n' \left\{ B_{mn} + A_{mn} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} f_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (18)$$

wo der Strich am Summenzeichen die Auslassung des Terms $n = m$ verlangt.

Man wird nun etwa — nach dem Vorbild der Molekültheorie — auf die Gleichung (18) das Störungsverfahren anwenden können. Als nullte Näherung bietet sich das Eigenwertproblem:

$$\left\{ -\hat{E}_m + \frac{-\Delta}{M_p} + W_m(r) + B_{mm}(r) \right\} \hat{f}_m(\mathbf{r}) = 0, \quad (19)$$

dessen Eigenwerte $\hat{E}_{m\alpha}$ und dessen normierte Eigenfunktionen $\hat{f}_{m\alpha}(\mathbf{r})$ seien. Für jeden Wert der Quantenzahl m liefern die Funktionen $\hat{f}_{m\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) ein vollständiges Orthogonalsystem, nach dem die betreffende Funktion \hat{f}_m in (18) entwickelt werden kann:

$$\hat{f}_m(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} c_{m\alpha} \hat{f}_{m\alpha}(\mathbf{r}).$$

(18) ist dann äquivalent dem Eigenwertproblem der Matrix $\Phi_{m\alpha, n\beta}$:

$$\Phi_{m\alpha, n\beta} = \hat{E}_{m\alpha} \cdot \delta_{\alpha\beta},$$

$$\Phi_{m\alpha, n\beta} = \int d^3\mathbf{r} \cdot \hat{f}_{m\alpha}(\mathbf{r}) \left\{ B_{mn}(r) + A_{mn}(r) \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} \hat{f}_{n\beta}(\mathbf{r}) \quad (20)$$

($m \neq n$).

Die Eigenwerte E dieser Matrix wären dann nach dem üblichen Störungsverfahren zu bestimmen.

B. Variationsverfahren.

Zur Schrödingergleichung (8) gehört das folgende Variationsproblem: Es soll

$$\bar{H} = \int d^3\mathbf{r} \cdot \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2'} F^*(j_1 j_2, \mathbf{r}) (j_1 j_2 | H | j_1' j_2') F(j_1' j_2', \mathbf{r}) \quad (21)$$

durch Variation der Funktionen F und F^* zum Extremum gemacht werden, mit der Nebenbedingung

$$\int d^3\mathbf{r} \cdot \sum_{j_1 j_2} F^*(j_1 j_2, \mathbf{r}) F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = 1. \quad (22)$$

Die Extremalwerte von \bar{H} sind die Eigenwerte E der Gleichung (8).

Wir gehen nun ähnlich vor wie Fock¹⁾ in seiner Begründung der HARTREE-Näherung der Atomtheorie: Wir beschränken uns auf Funktionen vom Typus

$$F(j_1 j_2, \mathbf{r}) = a(j_1 j_2) \cdot f(\mathbf{r}), \quad F^*(j_1 j_2, \mathbf{r}) = a(j_1 j_2) \cdot f^*(\mathbf{r}), \quad (23)$$

1) V. Fock, ZS. f. Phys. **61** (1930), S. 126.

wo $a (= a^*)$ von \mathbf{r} unabhängig und f von j_1, j_2 unabhängig ist; dabei sei

$$\sum_{j_1 j_2} a^2(j_1 j_2) = 1, \quad \int d^3 \mathbf{r} \cdot f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = 1. \quad (24)$$

Mit dieser beschränkten Auswahl von Funktionen F, F^* soll jetzt \bar{H} extremal gemacht werden. Wenn wir zunächst f und f^* festhalten, also nur die $a(j_1 j_2)$ variieren, so ergeben sich für diese die Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \tfrac{1}{2})^2 + (j_2 + \tfrac{1}{2})^2 - 2] a(j_1 j_2) + \bar{V} \sum_{j_1' j_2'} \langle j_1 j_2 | \Omega | j_1' j_2' \rangle a(j_1' j_2') = \bar{W} \cdot a(j_1 j_2), \quad (25)$$

wo

$$\bar{V} = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}). \quad (26)$$

Von der Gleichung (11) unterscheidet sich (25) dadurch, dass $V(\mathbf{r})$ durch den Mittelwert \bar{V} ersetzt ist, sodass der Eigenwert \bar{W} von \mathbf{r} unabhängig wird. Setzt man (25) in (7), (8) ein, so wird

$$\bar{H} = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f^*(\mathbf{r}) \cdot \frac{-\Delta}{M_p} f(\mathbf{r}) + \bar{W}. \quad (27)$$

Dieser Ausdruck ist jetzt noch durch Wahl von f, f^* extremal zu machen, wobei der Term \bar{W} durch (25), (26) in seiner Abhängigkeit von f, f^* bestimmt zu denken ist. Die Euler'sche Gleichung dieser Variationsaufgabe ist einer Schrödingergleichung ähnlich (s. § 4).

§ 4. Deuteronzustände mit $J = 0, K = 0$.

Die vorstehenden Überlegungen sollen jetzt für den einfachsten Fall $J = K = 0$ ausgeführt werden. Es handelt sich also um Deuteronzustände, die sowohl Spin-Singletts als Ladungs-Singletts sind. ($K = 0, N = 0$ heisst: Ladung = + 1). Nach dem „Vektormodell“ (vgl. (5)) gibt es dann nur F -Komponenten mit $j_1 = j_2$. Das Ausschlussprinzip besagt nach (9):

$$F(jj, \mathbf{r}) = -F(jj, -\mathbf{r}), \quad (28)$$

d. h. es verbietet S -, D -...-Terme.

Die Ω -Matrix hat im Falle $J = K = 0$ folgende nicht-verschwindenden Elemente¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \langle jj | \Omega | jj \rangle &= 1 \\ \langle jj | \Omega | j+1, j+1 \rangle &= \langle j+1, j+1 | \Omega | jj \rangle = 1 \end{aligned} \right\} j \geq \tfrac{1}{2}.$$

¹⁾ M. FIERZ, l. c., Gl. IV.

Mit der Abkürzung $a(j) = a_j$ lautet also die Gleichung (11):

$$\{-W + \varepsilon [(j + \frac{1}{2})^2 - 1] + V\} a_j + V(a_{j-1} + a_{j+1}) = 0 \quad (29)$$

$$(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots; a_{-\frac{1}{2}} = 0).$$

Dieses Gleichungssystem ist aus der Theorie der Mathieu'schen Funktionen wohlbekannt. Wir definieren eine Funktion $\psi(x)$ durch die Fourierreihe

$$\psi(x) = \sum_{j \geq \frac{1}{2}} a_j \frac{\sin(j + \frac{1}{2})x}{\sqrt{\pi}}; \quad (30)$$

sie ist periodisch mit der Periode 2π und ungerade:

$$\psi(x + k \cdot 2\pi) = \psi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x). \quad (31)$$

Beachtet man, dass

$$2 \cos x \cdot \psi(x) = \sum_{j \geq \frac{1}{2}} a_j \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{ \sin(j + \frac{3}{2})x + \sin(j - \frac{1}{2})x \}$$

$$= \sum_{j \geq \frac{1}{2}} (a_{j-1} + a_{j+1}) \frac{\sin(j + \frac{1}{2})x}{\sqrt{\pi}}, \quad (32)$$

so folgt aus (29), dass $\psi(x)$ der Mathieu'schen Differentialgleichung genügt:

$$-\varepsilon \psi'' + \{-W - \varepsilon + V(1 + 2 \cos x)\} \psi = 0. \quad (33)$$

Von den Eigenwerten W dieser Gleichung kommen hier nur diejenigen in Betracht, deren zugehörige Eigenfunktionen die Eigenschaften (31) besitzen¹⁾. Dass man auf diese Weise *alle* Eigenwerte des Gleichungssystems (29) erhält, erkennt man am einfachsten durch den Grenzübergang $V \rightarrow 0$. Die Mathieu-Funktionen $\psi_s(x)$ mit den Eigenschaften (31) gehen nämlich in diesem Limes in $\text{const.} \sin(sx)$ ($s = 1, 2, \dots$) über; nach (33) wird also

$$\lim_{V \rightarrow 0} W_s = \varepsilon(s^2 - 1), \quad \text{wo } s = 1, 2, \dots,$$

und dies sind offenbar auch die Eigenwerte des Systems (29) für $V = 0$.

¹⁾ In der Bezeichnung von M. J. O. STRUTT [Lamé'sche, Mathieu'sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. I, Julius Springer, Berlin 1932] sind es die Mathieu'schen Funktionen erster Art $S_2\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$, $S_4\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$, ... Die Eigenwerte W als Funktionen der Parameter ε und V kann man durch die Reihenentwicklungen S. 31 bis 37 des Strutt'schen Buches bestimmen, oder aus den Kurven $\lambda_{S_2}, \lambda_{S_4}, \dots$ der Figur auf S. 24 [die gleiche Figur findet man auch in ZS. f. Phys. **69** (1931), S. 606]; dabei ist $h^2 = 4 \frac{V}{\varepsilon}$, $\lambda = 4 \left(\frac{W-V}{\varepsilon} + 1 \right)$.

Für den Fall $V \ll \varepsilon$ liefert die Störungsmethode in Anwendung auf (29) eine Entwicklung nach Potenzen von V/ε :

$$W_s = \varepsilon(s^2 - 1) + V + \frac{2}{4s^2 - 1} \frac{V^2}{\varepsilon} + \dots \quad \text{für } s \neq 1, \\ W_1 = V - \frac{1}{8} \frac{V^2}{\varepsilon} + \dots \quad (V \ll \varepsilon). \quad (34)$$

Im anderen Grenzfall $\varepsilon \ll V$ hat die Mathieu-Gleichung (33) den Charakter einer Schrödingergleichung, deren Potentialfunktion $2V \cos x$ ein tiefes Minimum bei $x = \pi$ hat [im Periodizitätsbereich $0 \leq x < 2\pi$; $V > 0$ nach (6)]. Man kann daher in nullter Näherung $\cos x$ durch $(-1 + (x - \pi)^2/2)$ ersetzen; dadurch wird (33) zur Schrödingergleichung eines linearen harmonischen Oszillators, mit den Eigenwerten

$$W_{(n)} = -V + \sqrt{\varepsilon V} (2n + 1) + \dots \quad (n \text{ ganz}).$$

Die additive Konstante $-\varepsilon$ ist in dieser Näherung zu vernachlässigen. Die weitere Entwicklung des $\cos x$ liefert Anharmonizitäten, die in bekannter Weise störungsmässig zu behandeln sind. Für die Eigenwerte erhält man so eine Entwicklung nach Potenzen von $\sqrt{\varepsilon/V}$:

$$W_{(n)} = -V + \sqrt{\varepsilon V} (2n + 1) - \varepsilon \left(\frac{n(n+1)}{8} + \frac{17}{16} \right) + \dots \quad (35) \\ (\varepsilon \ll V, \quad n \cdot \sqrt{\varepsilon V} \ll V).$$

Nach (31) müssen aber die Eigenfunktionen die Symmetrie-Eigenschaft $\psi(\pi - x) = -\psi(\pi + x)$ besitzen; hierdurch wird die Oszillationsquantenzahl auf ungerade Werte beschränkt:

$$n = 2s - 1, \quad \text{wo } s = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Der tiefste Eigenwert ist also

$$W_{(1)} = -V + 3\sqrt{\varepsilon V} - \frac{21}{16}\varepsilon + \dots \quad (\varepsilon \ll V). \quad (37)$$

Die zu den tiefsten Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen $\psi(x)$ sind nur in der Umgebung von $x = \pi$ merklich von null verschieden, und zwar in einem Intervall der Grössenordnung $(\varepsilon/V)^{1/4}$. Ihre Fourieranalyse gemäss (30) liefert daher als hauptsächliche Komponenten a_j solche mit hohen j -Werten. Nach (30) ist

$$-\int_0^{2\pi} dx \psi \psi'' = \sum_j (j + \frac{1}{2})^2 a_j^2 \equiv \overline{(j + \frac{1}{2})^2};$$

in nullter Näherung findet man hierfür:

$$\overline{(j + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{V}{\varepsilon}} (n + \frac{1}{2}) \quad (\varepsilon \ll V). \quad (38)$$

Speziell für $n = 1$ ist

$$\left. \begin{aligned} a_j &= 2\pi^{-1/4} \left(\frac{\varepsilon}{V} \right)^{3/8} (j + \frac{1}{2}) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{V} \right)^{1/2} (j + \frac{1}{2})^2}, \\ j &= 2\pi^{-1/2} \left(\frac{V}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad \overline{\left(\frac{j - \bar{j}}{j} \right)^2} = \frac{3\pi}{8} - 1 \approx 0,18 \\ &\quad (n = 1, \quad \varepsilon \ll V). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Im Übergangsbereich zwischen den beiden Grenzfällen ($\varepsilon \sim V$) können keine „Überschneidungen“ der Eigenwerte eintreten; dadurch sind die Eigenwerte mit gleichen s -Werten — (34) einerseits, (35) mit (36) andererseits — eindeutig einander zugeordnet.

Diese Formeln für W sollen jetzt im Rahmen der beiden Näherungsmethoden (§ 3) verwertet werden.

A. Adiabaten-Näherung.

Wenn $\varepsilon \ll \bar{V}$ angenommen wird, kann man einen r -Wert r_ε durch die Gleichung

$$V(r_\varepsilon) = \varepsilon$$

definieren, und es wird dann gelten:

$$\begin{aligned} V(r) &\ll \varepsilon \quad \text{für} \quad r \gg r_\varepsilon, \\ V(r) &\gg \varepsilon \quad \text{für} \quad r \ll r_\varepsilon. \end{aligned}$$

Man wird also im Aussenbereich ($r \gg r_\varepsilon$) die Formel (34), im Innenbereich ($r \ll r_\varepsilon$) die Oszillatornäherung (35 ff.) verwenden können. Speziell für den tiefsten Eigenwert $s = 1$ gilt nach (34) und (37):

$$W_1(r) = \begin{cases} +V(r) - \frac{1}{8} [V(r)]^2/\varepsilon + \dots & \text{für } r \gg r_\varepsilon, \\ -V(r) + 3\sqrt{\varepsilon \bar{V}(r)} - \frac{21}{16} \varepsilon + \dots & \text{für } r \ll r_\varepsilon. \end{cases} \quad (40)$$

In der Schrödingergleichung (19) ignorieren wir vorerst den Term B_{mm} . Die Funktion $W_m(r)$ bestimmt die „adiabatische Potentialkurve“ des betreffenden Deuteronzustandes, $W_1(r)$ (40) speziell die tiefstliegende Potentialkurve mit $J = K = 0$. Da die betreffenden Schrödingerfunktionen $f_m^o(r)$ nach (13) und (28) ungerade sein müssen, handelt es sich um P-, F-...-Potentialkurven. Da aber das Deuteron in Wirklichkeit keine stabilen P-, F-...-Zustände besitzt, müssen die Konstante ε und die Funktion $V(r)$ so gewählt

werden, dass es keine diskreten negativen Energie-Eigenwerte mit $J = K = 0$ gibt. (Im Teil II dieser Arbeit wird gezeigt werden, dass dies mit der Existenz stabiler S-Zustände verträglich ist.) Die P-Potentiale sind jedoch bekanntlich von Wichtigkeit für die Theorie der Neutron-Proton-Streuung; namentlich bestimmen sie die Anisotropie der Streuung im Schwerpunktssystem (bei nicht zu kleinen Energien). Es ist daher von Interesse, die Funktion $W_1(r)$ mit der entsprechenden Potentialfunktion jener älteren Theorie zu vergleichen, die die Mesontheorie nur in störungstheoretischer Näherung verwendet (schwache Kopplung) und die demgemäss die Existenz von Nukleon-Isobaren ausschliesst. Zu dieser Theorie gelangen wir, wie früher (§ 2) bemerkt, durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow \infty$. Dann wird aber nach (34) $W_1(r) = V(r)$. Dies entspricht einer überall abstossenden Kraft. Nach (40) dagegen ist die Kraft in kleinen Abständen anziehend: $W_1(r) \cong -V(r)^{1/4}$. Auch wenn die oben gemachte Voraussetzung $\varepsilon \ll \bar{V}$ fallen gelassen wird, ist nach (34), (35) in jedem Falle $W_1(r) < V(r)$. Die Existenz der Isobaren hat also zur Folge, dass die unterste P-Potentialkurve ($J = K = 0$) herabgedrückt wird, was sich in der Anisotropie der Neutron-Proton-Streuung bemerkbar machen muss. Dieser Effekt lässt sich natürlich erst berechnen, wenn die anderen massgebenden S- und P-Potentiale bekannt sind.

In den vorstehenden qualitativen Betrachtungen haben wir uns nur der grössten adiabatischen Näherung bedient, indem wir die Grössen $A_{mn}(r)$ und $B_{mn}(r)$ in den Gleichungen (16) bis (20) vernachlässigt haben. Ihre Berechnung tragen wir jetzt nach, zunächst für den „Innenbereich“ $r \ll r_\varepsilon$. Durch die normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ der Mathieu-Gleichung (33) drücken sie sich folgendermassen aus:

$$A_{mn} = -\frac{2}{M_p} \int_0^{2\pi} dx \psi_m \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \quad B_{mn} = -\frac{1}{M_p} \int_0^{2\pi} dx \psi_m \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2}; \quad (41)$$

man verifiziert dies leicht durch Einsetzen der Fourierentwicklung (30) und Vergleich mit den Definitionsformeln (15). Für $r \ll r_\varepsilon$, $V(r) \gg \varepsilon$, sind ψ_n, ψ_m Oszillator-Eigenfunktionen; die Indices n, m identifizieren wir mit den (ungeraden) Oszillator-Quantenzahlen [vgl. (36): $n = 2s + 1$]. Bei Vernachlässigung der Anharmonizitäten sind die normierten Oszillator-Eigenfunktionen von der Form:

$$\psi_n = \left(\frac{V(r)}{\varepsilon} \right)^{1/8} \text{mal Funktion von} \left(\left(\frac{V(r)}{\varepsilon} \right)^{1/4} \cdot \xi \right),$$

¹⁾ W_1 wird negativ für $V/\varepsilon > 6$ (rund).

wo $\xi = x - \pi$. Infolgedessen wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_n}{\partial r} &= \frac{1}{8} \frac{d \log V}{dr} \left(1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi_n, \\ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} &= \frac{1}{8} \frac{d^2 \log V}{dr^2} \left(1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi_n \\ &\quad + \frac{1}{64} \left(\frac{d \log V}{dr} \right)^2 \left(1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \psi_n.\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\left(1 + 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi_n = \sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2}.$$

Hiermit ergibt (41) (für $r \ll r_\varepsilon$):

$$\left. \begin{aligned}A_{nn} &= 0, & B_{nn} &= \frac{1}{32 M_p} \left(\frac{d \log V}{dr} \right)^2 (n^2 + n + 1), \\ A_{n, n-2} &= -A_{n-2, n} = \frac{1}{4 M_p} \frac{d \log V}{dr} \sqrt{n(n-1)}, \\ B_{n, n-2} &= -B_{n-2, n} = \frac{1}{8 M_p} \frac{d^2 \log V}{dr^2} \sqrt{n(n-1)}, \\ B_{n, n-4} &= B_{n-4, n} = -\frac{1}{64 M_p} \left(\frac{d \log V}{dr} \right)^2 \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)};\end{aligned} \right\} \quad (42)$$

alle übrigen Matrixelemente verschwinden. Wählt man etwa $V(r) = V(0) e^{-\mu r}$, so ergibt (42) die Grössenordnung

$$B_{nn} \sim B_{n, n \pm 4} \sim \frac{\mu^2}{M_p}, \quad A_{n, n \mp 2} \sim \frac{\mu}{M_p} \quad (\text{für } r \ll r_\varepsilon). \quad (43)$$

Im Aussenbereich $r \gg r_\varepsilon$ ($V \ll \varepsilon$) sind die Matrixelemente, wie man leicht abschätzt, mindestens um einen Faktor $\sim V/\varepsilon$ kleiner. Man kann daher die Formeln (42) für kleine r -Werte bis zu r_ε hinaus gelten lassen und A_{mn} , B_{mn} weiter aussen verschwindend klein annehmen.

Das Diagonalelement B_{nn} spielt in den Gleichungen (18), (19) die Rolle eines Zusatzes zum adiabatischen Potential W_n ; so wird z. B. die tiefste Potentialkurve um B_{11} gehoben, was bei kleinen Abständen nach (42)

$$\frac{3}{32 M_p} \left(\frac{d \log V}{dr} \right)^2 \sim \text{einige MeV}$$

ausmacht. Die anderen A - und B -Terme in (18) ($n \neq m$) beschreiben Übergänge von einer Potentialkurve zur anderen. So ist z. B. ein Übergang $n=1 \rightarrow 3$ ($s=1 \rightarrow 2$) möglich, was einem unelastischen Streuprozess entspricht, bei dem beide Nukleonen in den isobaren Zustand $j = 3/2$ befördert werden. Die Realisierung dieses Prozesses würde natürlich die Energie 3ε , d. h. die doppelte Anregungsenergie eines Nukleons erfordern (im Schwerpunktsystem). Aber auch bei kleineren Energien können die angeregten Zustände als „virtuelle Zwischenzustände“ den Streuvorgang beeinflussen. Dieser Effekt lässt sich am einfachsten abschätzen, wenn man die r -Funktionen in (18) (W , A und B) durch geeignete Treppenfunktionen approximiert. Er erweist sich als belanglos, wenn die Abstände der Potentialkurven $W_{(n)}$ im Innenbereich gross gegen μ^2/M_p sind (vgl. (43)), und dies heisst nach (35):

$$\sqrt{\varepsilon V(0)} \gg \frac{\mu^2}{M_p}. \quad (44)$$

Identifiziert man μ mit der Masse der Höhenstrahlungsmesonen so wird $\mu^2/M_p \sim 10$ MeV. Aber selbst wenn man statt dessen den grossen Wert von rund 50 MeV für μ^2/M_p einsetzt, der aus den Proton-Proton-Streuversuchen abgeleitet wurde¹⁾, und für $V(0)$ den entsprechenden Wert von etwa 100 MeV, erweist sich die adiabatische Näherung noch bis zu ε -Werten von etwa 20 MeV hinunter als brauchbar²⁾. Dieser ε -Wert entspricht einer Nukleon-Anregungsenergie von $3\varepsilon/2 = 30$ MeV; es ist dies der Wert, auf den COESTER (l. c.) durch die Diskussion der schweren Kerne geführt wurde³⁾. Ein höherer ε -Wert wäre für die Adiabaten-Näherung günstiger; doch wäre dann die Annahme $\varepsilon \ll \bar{V}$ nicht mehr zutreffend, so dass der Verlauf der W -Kurven für mittlere Werte von $V(r)/\varepsilon$ massgebend würde. Jedenfalls wird man quantitative Auskünfte von der

¹⁾ Vgl. L. E. HOISINGTON, S. S. SHARE und G. BREIT, Phys. Rev. **56** (1939), S. 884. Die im Text angegebenen Daten beziehen sich auf das Exponentialpotential (const. $e^{-\mu r}$) dieser Autoren; nach der hier diskutierten Theorie wäre für das 1S -Potential streng genommen anzusetzen (vgl. Teil II dieser Arbeit):

$$W(r) = -V(r) + \sqrt{\varepsilon \bar{V}(r)} - \frac{9}{16} \varepsilon + \dots \quad (r \ll r_g).$$

²⁾ Durch die Berücksichtigung der Zahlfaktoren in (42) und (35) wird nämlich die Bedingung (44) beträchtlich abgeschwächt. Selbst für $\sqrt{\varepsilon \bar{V}(0)} \approx \mu^2/M_p$ werden die Eigenwerte E durch die Kopplung der $W_{(n)}$ -Kurven sicher nicht stärker gestört als durch eine Verschiebung dieser Kurven um einige MeV im Innenbereich.

³⁾ COESTER berücksichtigte dabei auch die Bedingungen, die der Mesontheorie durch die Annahme starker Kopplung auferlegt sind. — Man beachte, dass COESTER's „ ε “ gleich unserem $\varepsilon/2$ ist.

Adiabaten-Näherung nur bei nicht zu kleinen ε -Werten verlangen können. Trotzdem dürften die qualitativen Aussagen über den Verlauf der Potentialkurven auch bei kleineren ε -Werten wenigstens einen heuristischen Wert haben.

B. Variationsmethode.

Da die HARTREE-Näherung eher diskrete Energie-Eigenwerte als Eigenfunktionen zu bestimmen gestattet, wird uns das Variationsverfahren hinsichtlich der wirklichen Deuteronzustände mit $J = K = 0$ wenig dienlich sein können. Um das Verfahren trotzdem an diesem einfachsten Fall zu erproben, wollen wir für den Moment — entgegen der Wirklichkeit — ε und $V(r)$ so gewählt denken, dass stabile Zustände mit $J = K = 0$ zustandekommen.

Wird der durch (26) definierte Mittelwert \bar{V} als gross gegen ε vorausgesetzt, so sind die Eigenwerte \bar{W} des Gleichungssystems (25) aus (35) zu entnehmen:

$$\bar{W}_{(n)} = -\bar{V} + \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (2n + 1) - \varepsilon \left(\frac{n(n+1)}{8} + \frac{17}{16} \right) + \dots \quad (45)$$

Setzt man dies in (27) ein, so führt das Extremalproblem für \bar{H} auf folgende Gleichung für die Funktion $f(\mathbf{r})$:

$$\left\{ -\bar{E}_n + \frac{-\Delta}{M_p} - V(r) \left[1 - \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (n + \tfrac{1}{2}) + \dots \right] \right\} f = 0, \quad (46)$$

und der zugehörige Extremalwert von \bar{H} wird

$$E = \bar{E}_n + \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (n + \tfrac{1}{2}) - \varepsilon \left(\frac{n(n+1)}{8} + \frac{17}{16} \right) + \dots \quad (47)$$

(46) ist, streng genommen, keine lineare Gleichung für f , da \bar{V} gemäss (26) von f abhängt; da aber der Term $\sim \sqrt{\varepsilon \bar{V}}$ in (46) (für $n \sim 1$) nur eine kleine Korrektur darstellt, kann man in ihm f durch einen Näherungswert ersetzen; dann ist (46) eine Schrödingergleichung mit der Potentialfunktion

$$-V(r) \left[1 - \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (n + \tfrac{1}{2}) + \dots \right]. \quad (48)$$

Dies entspricht wieder anziehenden Kräften. Um abzuschätzen, wie die Energien E von den Oszillationsquantenzahlen n abhängen, ersetzen wir das Potential (48) in noch etwas vergrößerter Näherung durch

$$-V(r) + \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (n + \tfrac{1}{2}) + \dots \quad (49)$$

Dann wird nach (47)

$$E \cong C + \sqrt{\varepsilon \bar{V}}(2n+1) + \dots, \quad (50)$$

wo C ein dem Potential $-V(r)$ entsprechender Energie-Eigenwert ist:

$$\left\{ -C + \frac{-\Delta}{M_p} - V(r) \right\} f = 0. \quad (51)$$

Dieses Ergebnis stimmt im wesentlichen überein mit demjenigen, das man aus der adiabatischen Näherung durch Extrapolation auf kleine ε -Werte erhält¹⁾.

Die Gleichung (38), in der V jetzt die Bedeutung \bar{V} hat, besagt: $j^2 \sim \sqrt{\bar{V}/\varepsilon} \gg 1$, d. h. die wesentlichen Komponenten a_j gehören zu hohen j -Werten. Wenn überdies der Schwankungsbereich der Variablen j relativ klein ist, wie es nach (39) für den tiefsten Term $n=1$ der Fall ist, so ist anzunehmen, dass der dem Variationsverfahren zugrundeliegende Ansatz (23) eine brauchbare Näherung ergibt. Denkt man sich nämlich die exakte Lösung in der Form $F(j, \mathbf{r}) = a_j f(j, \mathbf{r})$ geschrieben, so wird man, falls a_j nur in einem kleinen j -Intervall merklich von 0 verschieden ist, $F(j, \mathbf{r})$ näherungsweise durch $a_j f(\bar{j}, \mathbf{r})$ ersetzen können, was eben (23) entspricht. Wenigstens für die Berechnung von Erwartungswerten wie \bar{H} dürfte dies keinen grossen Fehler mit sich bringen. Freilich tendiert das relative Schwankungsquadrat von j nach (39) auch im Limes $\bar{V}/\varepsilon \rightarrow \infty$ nicht gegen Null. Eine Verbesserung des HARTREE-FOCK-Ansatzes (23) im Sinne einer Zuziehung allgemeinerer Funktionentypen $F(j, \mathbf{r})$ soll hier nicht versucht werden.

In der Fortsetzung dieser Arbeit sollen die Zustände mit $J + K \neq 0$ mit denselben beiden Näherungsmethoden diskutiert werden. Es wird sich zeigen, dass die zu verschiedenen J - und K -Werten gehörigen tiefsten Eigenwerte bzw. Potentialkurven in ihrer relativen Lage recht genau bestimmt werden können.

Basel, Physikal. Anstalt der Universität.

Zürich, Physikal. Institut der Universität.

¹⁾ In der Gl. (19) (mit $B_{mm} \rightarrow 0$) kann dann nämlich im massgebenden r -Bereich W_m gemäss (35) ausgedrückt werden; betrachtet man nun den Term $\sqrt{\varepsilon V(r)}(2n+1)$ als eine kleine Störung — wie es dem Übergang von (48) zu (49) entspricht —, so folgt für die Eigenwerte wieder die Formel (50), mit dem einzigen Unterschied, dass \sqrt{V} durch $\sqrt{\bar{V}}$ ersetzt ist.

Compte-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique

tenue à Langnau, le 6 mai 1944.

Président: Prof. Dr. H. KÖNIG (Berne), absent.

Vice-président: Prof. Dr. G. WENTZEL (Zurich).

Secrétaire: Prof. Dr. A. MERCIER (Berne).

Partie administrative.

Les rapports de caisse et de la vérification des comptes sont lus et approuvés.

En remplacement du professeur K. ZUBER, l'assemblée désigne le professeur E. STAHEL comme second vérificateur des comptes.

Le professeur M. WEHRLI, délégué au service de renseignements et de presse, présente son rapport et se propose de restreindre son activité au minimum nécessaire.

Le professeur GRUNER, rédacteur des *Helv. Phys. Acta*, présente son rapport sur la *Revue de la Société*, qui contient d'excellentes communications scientifiques et prospère grâce à des subventions bienvenues.

La Société approuve la candidature des membres suivants:

a) Membres ordinaires: MM. PIERRE JEANGUENIN (Courtelary), FRITZ COESTER (Zurich), JEAN DREYFUS-GRAF (Genève), WILHELM SPINNLER (Bâle), HERMANN LOOSLI (Wallisellen), RENÉ MAEDER (Bâle), PETER BAERTSCHI (Zurich).

b) Membre collectif: Schweiz. Elektrotechniker Verein.

Compte tenu de la réinscription de M. H. HAUSMANN, la Société compte à ce jour 259 membres.

La prochaine séance aura lieu à Sils au sein de la Société Helvétique des Sciences Naturelles.

*Communications scientifiques.***Über eine Brückenschaltung für Relaxationsschwingungen**

von H. ZICKENDRAHT (Basel).

Beim Bau eines Gerätes, das unter Anwendung der klassischen „Blinkschaltung“ (GASSIOT 1862, HITTORF 1879) die Nervenreizleitungsvorgänge im menschlichen Herzen durch ein elektrisch arbeitendes Modell nachbilden und veranschaulichen soll (VAN DER POL 1926), ergab sich die Notwendigkeit, zwei voneinander unabhängig arbeitende Blinkschaltungen (durch Widerstände hindurch aufgeladene Kondensatoren die sich periodisch über Glimmstrecken entladen) elektrisch zu koppeln. Hierbei entstand die Brückenschaltung Fig. 1, die wohl ohne weiteres verständlich sein dürfte.

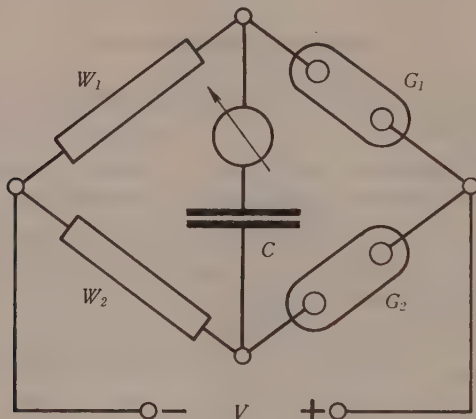


Fig. 1.

Legt man an die beiden Enden der Brückenschaltung einerseits eine hohe Gleichspannung (etwa 440 Volt) andererseits einen Kondensator (einige μF) an, so tritt meist einfacher Stromdurchgang durch den oberen und untern Zweig der Schaltung auf, wobei die beiden Glimmlampen G_1 und G_2 dauernd aufleuchten. Dieser Zustand bietet kein weiteres Interesse. Ergibt sich aber durch den Schaltstoss beim Anlegen der Batterie oder durch irgend eine andere Ursache eine kleine Asymmetrie im Stromverlauf durch beide Zweige, so beginnt die Anordnung im Gegentakt zu schwingen, wobei der Gleichstrom einmal den Weg $G_1 C W_2$, das andere Mal den Weg $G_2 C W_1$ nimmt. Der Kondensator C in der eigentlichen Brücke wird also periodisch alternierend geladen, es entstehen sehr regelmässige Relaxationsschwingungen, denen man je nach Wahl

der Konstanten W und C die verschiedensten Frequenzen geben kann. Die Kippschwingungen können so langsam gewählt werden, dass sie sich mit Demonstrationsgalvanometern bequem vorführen lassen. Ebensogut vermag man aber auch tonfrequente Relaxationsschwingungen zu erhalten.

Es wurden verschiedene Formen von Glimmlampen, aber auch *Gastrioden* (Thyratrons) in Anwendung gebracht. Die letzteren ergeben kräftige Schwingungen verhältnismässig hoher Spannungsamplituden. Beispiel: $C = 0,034 \mu F$. Kondensatorstrom bei der Frequenz 213 Hertz: 3,2 Milliampères; Wechselspannung über dem Kondensator 158 Volt eff.; Gleichspannung $V = 430$ Volt. Die *Kurvenformen* lassen sich bei geeigneter Disposition, über die später zusammenhängend berichtet werden soll, beeinflussen und es können nahezu geradlinige Dreiecksformen erhalten werden, ein Umstand, der die Geräte als Zeitablenkungsgeneratoren für Kathodenoszillographen oder für Television wertvoll erscheinen lässt.

Eine einfache mathematische Theorie erlaubt, die Strom- und Spannungsverhältnisse in der Brücke mit Glimmstrecken zu berechnen; ist nämlich W_g der momentane Widerstand der Gasstrecke zur Zeit t und V die angelegte Gleichspannung, so ist der den Kondensator in einer der beiden Richtungen durchfliessende Strom zur Zeit t gegeben durch die Gleichung:

$$i_1 = \frac{V[W_1 e^{\frac{t}{CW_1}} + W_2]}{W_1 e^{\frac{t}{CW_1}}[W_2 + W_g] + W_2 W_g}$$

Macht man W_1 und W_2 gleich, so erfolgen Kippschwingungen gleicher Halbperioden, varriert man das Verhältnis der beiden Widerstände W_1 und W_2 , so lassen sich die Dauern der beiden Halbperioden in weiten Grenzen verändern, wobei scharf linear begrenzte sog. „Sägezahnkurven“ erhalten werden können.

Etude rapide d'un galvanomètre

par A. JAQUEROD (Neuchâtel).

La méthode dont il s'agit permet, en un minimum de temps, de déterminer toutes les caractéristiques essentielles d'un galvanomètre quelconque; notamment la *résistance intérieure*, et pour un type à cadre mobile la *résistance critique*. Le circuit utilisé, le plus simple possible, comporte le galvanomètre shunté, une grande résistance R , une pile et une clé.

Soient G et S les résistances du galvanomètre et du shunt, R une résistance environ mille fois plus grande que G (ex. un mégohm); i et i_0 les courants dans G et R . La loi d'Ohm donne

$$i_0 S = i(S+G) \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \frac{1}{i} = \frac{1}{i_0} + \frac{G}{i_0 S}.$$

Or i_0 est pratiquement constant; donc $\frac{1}{i}$ est fonction linéaire de $\frac{1}{S}$; i sera représenté en unités arbitraires par la déviation ϑ , i_0 par ϑ_0 . La droite est définie par deux points que l'on choisira aussi éloignés que possible; il sera préférable d'en déterminer plusieurs (proportionnalité de ϑ et i). Si α est le coefficient angulaire de la droite, on a :

$$\alpha = \frac{G}{i_0}; \quad \text{d'où} \quad G = i_0 \alpha \quad \text{ou} \quad G = \vartheta_0 \alpha.$$

La mesure de la f. e. m. E de la pile permettra de calculer en valeur absolue $i_0 = \frac{E}{R}$ et par suite la *constante statique*.

Pour déterminer la *résistance critique* on observera les oscillations du galvanomètre, la clé étant ouverte, pour divers shunts S (deux au minimum), et on calculera le décrément logarithmique Λ (Log. nat.).

Le couple de frottement global a un moment :

$$-\left(r_0 + \frac{K}{R_1}\right) \frac{d\Theta}{dt} = -r \frac{d\Theta}{dt},$$

r_0 dépendant du frottement visqueux de l'air et du frottement intérieur du fil de suspension; R_1 est la résistance $S + G$ et K une constante. En effet les courants induits sont en raison inverse de R_1 , et l'amortissement dû à ces courants leur est proportionnel.

On sait par la théorie classique du galvanomètre que

$$\Lambda = \frac{r}{2I} T$$

I étant le moment d'inertie du cadre et T la pseudopériode. Multiplions le second membre haut et bas par \mathfrak{C} , période sans amortissement :

$$\Lambda = \frac{\mathfrak{C} r}{2I} \frac{T}{\mathfrak{C}}; \quad \text{or} \quad \frac{T}{\mathfrak{C}} = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

donc

$$\frac{\Lambda}{\sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}} = \frac{\mathfrak{C}}{2I} r = \frac{\mathfrak{C}}{2I} \left(r_0 + \frac{K}{R_1}\right) = a + b \cdot \frac{1}{R_1}.$$

La grandeur

$$\frac{A}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{4\pi^2}}}$$

est donc fonction linéaire de $1/R_1$ (v. fig. 1).

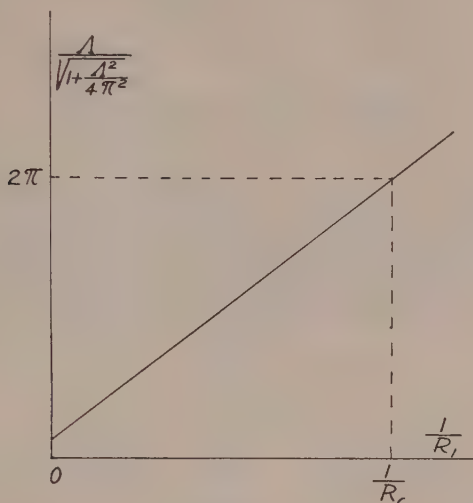


Fig. 1.

Si la résistance R_1 tend vers R_c , résistance critique totale, A tend vers l'infini et par suite

$$\frac{A}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{4\pi^2}}}$$

tend vers 2π . On lira donc directement sur le graphique (fig. 1), ou on calculera, la valeur de $1/R_c$; comme on connaît G , le shunt critique sera déterminé.

On profitera enfin de l'observation des oscillations du galvanomètre pour déterminer au chronographe sa *période*, et cela avec un shunt infini, donc à circuit ouvert. Elle sera en général très voisine de \mathfrak{C} . La connaissance de la constante statique permettra alors de calculer la *constante balistique*, puisque le rapport de ces deux constantes est égal à $2\pi/\mathfrak{C}$.

En résumé l'observation d'un minimum de deux déviations statiques, de la f. e. m. de la pile, de deux décroissements logarithmiques et d'une période d'oscillation — le tout ne prenant pas plus d'une heure — et en supposant connues les résistances utilisées,

permettra d'obtenir: la constante statique, la constante balistique, la résistance intérieure, la résistance critique d'un galvanomètre, et enfin le facteur de correction permettant de ramener les élongations balistiques pour une résistance extérieure quelconque à ce qu'elles seraient sans amortissement (à l'aide de la fig. 1).

Quelques observations supplémentaires de déviations statiques permettront de vérifier que ces déviations sont bien proportionnelles aux courants i .

Température d'ébullition et altitude

par A. JAQUEROD (Neuchâtel).

Lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère, la pression diminue suivant une courbe à courbure très prononcée, à peu près exponentielle. D'autre part la courbe des tensions de vapeur, de l'eau par exemple, donc la courbe exprimant la température d'ébullition en fonction de la pression, est également fortement incurvée. Or, chose

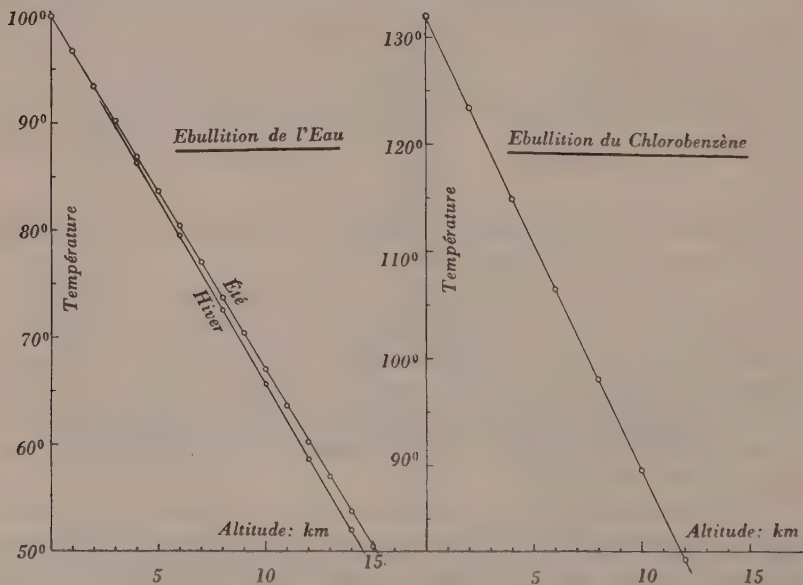


Fig. 2.

curieuse, si l'on porte sur un graphique la température d'ébullition en fonction de l'altitude — donc si l'on combine les deux courbes précédentes par élimination de la pression — on obtient une droite remarquablement réalisée (voir la fig. 2).

On n'entrevoit guère de ce fait assez surprenant d'interprétation théorique: il s'agit de deux phénomènes sans liaison appa-

rente. Par contre une interprétation empirique est par exemple celle-ci: Si on suppose l'atmosphère de composition et de température uniformes, la pression est représentée en fonction de h (altitude) rigoureusement par $\log p = \log p_0 - \alpha h$. En outre, et pour un faible intervalle de températures, le log. de la tension de vapeur est à peu près fonction linéaire de la température: $\log p = a + bt$. Par élimination de p on a bien: $t = A - Bh$.

Avec l'atmosphère isotherme, la droite n'est acceptable que jusqu'à 5—6 km. au plus. Ce qui est remarquable, c'est qu'en tenant compte de la décroissance de la température de l'air avec l'altitude (atmosphère réelle *moyenne*) la droite se poursuit jusqu'à la stratosphère (11—13 km.).

L'essai a été fait avec un autre liquide, le chlorobenzène, dont les tensions de vapeur sont bien établies, avec un résultat encore plus frappant (figure 2). Sauf pour l'altitude 0 les points sont en ligne droite à moins du dixième de degré près. L'éther donne un résultat moins bon, mais acceptable.

Le tableau ci-dessous donne quelques-unes des valeurs numériques qui ont été utilisées. La répartition des pressions en altitude est tirée des « Smithsonian physical tables », 7ème édition, et se rapporte à l'été.

Altitude km.	Pression mm.	Températ. Eau	d'ébullition C_6H_5Cl
0	760,0	100°	132,0
2	598,0	93,4	123,4
4	466,6	86,8	114,9
6	360,2	80,4	106,5
8	274,3	73,7	98,1
10	205,1	67,0	89,6
12	151,2	60,2	81,2
14	111,1	53,8	73,0

La relation linéaire apparaît immédiatement en faisant les différences dans les deux dernières colonnes (l'interpolation des températures d'ébullition n'a été faite qu'au dixième de degré).

La « loi » empirique dont il s'agit pourrait peut-être rendre des services.

1° Dans la région où elle est valable, on en tire immédiatement en effet une relation très simple entre les températures d'ébullition de deux liquides sous une même pression. Le premier liquide donne:

$t = t_0 - ah$ et le second: $t' = t_0' - a'h$, d'où par élimination de h :
 $t' = t_0' - a'/a (t_0 - t)$.

Il suffit donc de connaître deux températures d'ébullition d'un corps quelconque pour pourvoir calculer les autres par comparaison avec un liquide de référence.

2° Il ne paraît pas impossible d'imaginer — et de construire — un petit ébullioscope facilement transportable et à lecture directe. Cet appareil servirait d'altimètre, pour les avions notamment, et présenterait sur les baromètres anéroïdes les avantages suivants:

Sa graduation serait équidistante en altitude; sa sensibilité serait donc constante alors que c'est loin d'être le cas pour les altimètres actuels.

Il ne présenterait pratiquement pas d'hystérésis ni de résidus élastiques qui sont si gênants avec les anéroïdes.

Il n'exigerait aucune compensation thermique, compensation toujours assez aléatoire chez les altimètres usuels.

Si l'appareil thermométrique était un couple, la lecture d'altitude se ferait directement sur un cadran, et l'enregistrement ne présenterait, semble-t-il, aucune difficulté. On pourrait donc utiliser la méthode dans le sondage de l'atmosphère par ballon ou radio-sonde.

La question de la rapidité d'établissement de l'équilibre thermique resterait à étudier, elle ne serait certainement pas insoluble.

Das Bandenspektrum von Tellurdichlorid mit schwerem Chlor

von M. WEHRLI und W. SPINNLER (Basel).

Die Symmetrie mehratomiger, symmetrischer Moleküle wird durch die nicht total symmetrischen Schwingungen gestört. Es können deshalb Elektronen-Bandensysteme mehratomiger Moleküle mit wesentlicher Intensität auftreten, die ungestört verboten sind. Der einfachste Fall eines solch „verbotenen“ Systems scheint das im Sichtbaren liegende Absorptionsspektrum von TeCl_2 zu sein, das, wie kürzlich festgestellt worden ist¹⁾, sehr wahrscheinlich zu einem solchen „verbotenen“ Elektronenübergang gehört. Da die bisherigen Beobachtungen zu einer eindeutigen und ausführlichen Schwingungsanalyse nicht ausreichen, wurde unter Verwendung eines 6 m Konkavgitters das Spektrum von TeCl_2 mit von CLUSIUS

¹⁾ M. WEHRLI, H.P.A. **9**, 208, 1936; **11**, 339, 1938. — M. WEHRLI und N. GUTZWILLER, H.P.A. **14**, 307, 1941.

und DICKEL¹⁾ angereichertem schwerem Chlor Cl^{37} untersucht. Das hat den Vorteil, dass man im Gegensatz zu gewöhnlichem Chlor auch die Isotopenaufspaltungen $\Delta\nu$ der schwachen Kanten erhält und dass man meistens sicher feststellen kann, ob es sich bei zwei nahen Kanten um einen Isotopeneffekt handelt oder nicht. Bei mehratomigen Chloriden beobachtet man dabei die grösste, mögliche Aufspaltung $\Delta\nu$, nämlich die zwischen dem leichtesten und dem schwersten isotonen Molekül, bei TeCl_2 zwischen TeCl_2^{35} und TeCl_2^{37} , die doppelt so gross ist wie die zwischen TeCl_2^{35} und $\text{TeCl}_2^{35}\text{Cl}^{37}$, die man mit gewöhnlichem Chlor erhält.

Die Hauptschwierigkeit bereitete die Herstellung einer genügenden Menge von „schwerem“ TeCl_2 , da das Spektrum mit 5 cm Schichtdicke 150 mm Druck benötigt. HCl reagiert mit metallischem Tellur nicht. Zuerst musste deshalb aus der vorliegenden Probe, die 73% Cl^{37} enthielt, ein Cl_2 -Gasstrom hergestellt werden. Als beste Methode erwies sich die Elektrolyse einer wässrigen HCl-Lösung. Man kann dabei durch Strommessung die Verarmung an Cl-Ionen gut verfolgen und durch Spannungsänderung den Cl_2 -Strom leicht regulieren.

Beobachtete Isotopenaufspaltungen $\Delta\lambda$ zwischen TeCl_2^{37} und TeCl_2^{35}
und zugehörige Kanten ν von TeCl_2^{35} .

$\Delta\lambda$	ν	$\Delta\nu$	$\Delta\lambda$	ν	$\Delta\nu$	$\Delta\lambda$	ν	$\Delta\nu$
+ 10,0	15909,3	+ 23,3	- 3,3	17789,9	- 10,4	- 9,9	19072,1	- 35,9
+ 3,7	16159,0	+ 9,7	- 2,6	17840,1	- 8,3	- 11,1	19094,3	- 39,6
+ 6,9	16286,7	+ 18,3	- 3,1	17861,4	- 9,8	- 11,3	19202,2	- 40,9
+ 4,2	16409,6	+ 11,4	- 4,0	17973,5	- 12,9	- 11,7	19287,7	- 44,1
+ 4,9	16530,6	+ 13,4	- 6,4	18057,9	- 20,8	- 11,2	19371,8	- 41,9
+ 2,4	16665,7	+ 12,2	- 8,9	18163,6	- 29,4	- 11,1	19394,0	- 41,7
- 1,2	16789,9	- 3,3	- 7,1	18174,8	- 23,4	- 11,8	19501,1	- 44,8
+ 1,4	16907,2	+ 4,0	- 7,8	18366,5	- 26,7	- 13,4	19595,5	- 51,4
+ 0,5	17048,2	+ 1,5	- 7,7	18466,2	- 26,6	- 12,7	19675,3	- 49,0
+ 0,9	17210,8	+ 2,6	- 7,4	18481,2	- 25,2	- 13,0	19700,5	- 50,3
- 0,7	17361,1	- 9,1	- 8,4	18591,2	- 29,0	- 13,3	19802,0	- 52,1
- 1,6	17431,7	- 4,9	- 9,0	18675,9	- 31,3	- 14,3	19897,3	- 56,4
- 0,2	17474,9	- 0,6	- 8,8	18771,3	- 31,0	- 13,8	20097,7	- 55,6
- 3,0	17552,6	- 9,3	- 9,1	18787,9	- 32,1	- 15,9	20198,4	- 64,6
- 4,0	17677,6	- 12,5	- 10,2	18896,9	- 36,3	- 10,4	20473,5	- 43,5
- 4,3	17744,8	- 13,6	- 12,4	18982,3	- 41,0			

λ = Wellenlänge in AE. ν = Wellenzahlen von TeCl_2^{35} in cm^{-1} .

¹⁾ Wir sind den Herren Proff. K. CLUSIUS, München, E. MIESCHER und Dr. K. WIELAND für die freundliche Überlassung des schweren Münchner-HCl zu herzlichem Danke verpflichtet.

Die Diskussion der beobachteten Isotopenaufspaltungen hat unter Berücksichtigung der Auswahlregeln zu folgenden Aussagen geführt: Die intensivsten Banden des Spektrums bilden ein Teilbandensystem mit längern, äquivalenten Termfolgen wie bei einem 2atomigen Molekül. Aus der Intensitätsverteilung ergeben sich im angeregten Zustande wesentlich grössere Gleichgewichtsabstände von Te und Cl, als im Grundzustande. Die zugehörigen Termdifferenzen entsprechen den totalsymmetrischen Schwingungen mit den Frequenzen $\omega'_s = 310$ im oberen und $\omega''_s = 380 \text{ cm}^{-1}$ im untern Zustande. Bezeichnet man die entsprechenden Quantenzahlen mit v'_s und v''_s , diejenigen der nicht totalsymmetrischen Valenzschwingungen mit v'_{as} und v''_{as} und diejenigen der Deformationsschwingungen mit v'_δ und v''_δ , so gehört das obige Teilsystem zu $\begin{bmatrix} v'_s & 1 & 0 \\ v''_s & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d. h. $v'_{as} = 1$ und $v''_{as} = v'_\delta = v''_\delta = 0$. Damit wird bestätigt, dass das Spektrum zu einem „verbotenen“ Elektronensprung gehört. Denn bei einem erlaubten Übergang müsste das intensive Teilsystem zur Quantenzahlkombination $\begin{bmatrix} v'_s & 0 & 0 \\ v''_s & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gehören, was den experimentellen Aufspaltungen $\Delta\nu$ widerspricht.

Die übrigen, schwächeren Banden haben die Quantenzahlen $\begin{bmatrix} v'_s & 1 & v'_\delta \\ v''_s & 0 & v''_\delta \end{bmatrix}$, wobei der Sprung $|v''_\delta - v'_\delta|$ nach den Auswahlregeln stets geradzahlig ist. Die Frequenzen der Deformationsschwingungen werden $\omega'_\delta = 58$ und $\omega''_\delta = 71 \text{ cm}^{-1}$. Da die Zunahme der Aufspaltungen $\Delta\nu$ mit ν nicht genau einem linearen Molekül entspricht, muss dieses mindestens im angeregten Zustande gewinkelt sein. Unabhängig von der Grösse des Valenzwinkels ergibt sich das Produkt aus elastischer Zugkonstante und elastischer Biegekonstante der TeCl-Bindung im angeregten Zustande zu $2,2 \cdot 10^8 \text{ Dyn}^2/\text{cm}^2$ und im Grundzustande zu $4,9 \cdot 10^8 \text{ Dyn}^2/\text{cm}^2$. Für das ähnliche Sublimatmolekül HgCl_2 sind diese Grössen 2,1 und $5,9 \cdot 10^8 \text{ Dyn}^2/\text{cm}^2$. Die ausführliche Arbeit wird in dieser Zeitschrift erscheinen.

Analyse dimensionnelle et analyse géométrique ou algébrique; les caractères d'une grandeur physique

par ANDRÉ MERCIER (Berne).

On peut obtenir des indications d'ordre physique par de simples considérations sur les dimensions (période d'un pendule, résistance d'une aile d'avion, etc.).

Dans une équation entre nombres complexes de la forme $a + ib$, on identifie les parties réelles et imaginaires. Si $a + ib$

représente une grandeur physique, les dimensions de a ne sont pas nécessairement les mêmes que celles de b .

Si \vec{r} désigne un vecteur de position, les produits

$$\vec{r} \cdot \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r} \times \vec{r}$$

ont mêmes dimensions (L^2), mais un caractère géométrique différent, donc une nature physique différente.

Il ne suffit donc pas de vérifier l'homogénéité des *dimensions* d'une formule physique, il faut aussi en vérifier l'homogénéité *géométrique* (scalaires, vecteurs, tenseurs . . .). Tout comme la considération des dimensions donne des indications, celle du caractère géométrique peut en fournir aussi. Ainsi, si l'on veut savoir quelles sont celles des grandeurs électrodynamiques qui sont parfaitement *réversibles* lors du renversement du signe du temps, on en examinera le caractère tensoriel d'espace-temps et en déduira sans autre calcul p. ex. que le potentiel vecteur et le champ magnétique sont anti-réversibles (changent de signe) alors que le potentiel scalaire ou le champ électrique est réversible.

Une manière parallèle d'envisager cet état de choses consiste à considérer le caractère *algébrique* des grandeurs physiques. Il est par exemple très commode d'employer les nombres de Clifford dans des problèmes où l'on doit tenir compte de la théorie de la relativité restreinte. Ce sont là des nombres hypercomplexes qui généralisent ceux de la forme $a + ib$. Dans $a + ib$, a et ib ont un caractère algébrique différent. De même, les éléments d'un nombre hypercomplexe sont algébriquement inhomogènes. Une identification dans une équation hypercomplexe, ou toute méthode basée sur l'examen du caractère hypercomplexe ou algébrique peut fournir rapidement des indications assez précises. Ainsi, à l'exemple de JUVET et SCHIDLOF, on peut établir des théorèmes très généraux d'intégration partielle du type de ceux de GAUSS, OSTROGRADSKY, STOKES; on peut aussi obtenir des renseignements d'ordre physique, par exemple pour les seize grandeurs attachées par L. DE BROGLIE à l'électron de Dirac. Ainsi, on peut dire sans calcul lesquelles de ces 16 grandeurs sont parfaitement réversibles ou anti-réversibles vis-à-vis d'un renversement du signe du temps; on retombe sur le classement de WATANABE. La même méthode permet de montrer qu'il ne serait pas naturel de chercher à attribuer à l'électron de Dirac un courant magnétique. Il n'y a en effet aucune place pour cela dans le tableau hypercomplexe des 16 grandeurs de L. DE BROGLIE. Cela n'exclut pas qu'il existe des pôles magnétiques indépendants (Dirac)¹.

Le caractère géométrique et le caractère algébrique sont apparentés par l'intermédiaire de la représentation matricielle ou de la théorie des transformations.

La question de ces caractères est fondamentale en physique. Son examen est, du point de vue didactique, tout aussi important que celui de l'homogénéité dimensionnelle. On a tort de le négliger dans l'enseignement, non seulement parce qu'il ressortit à une question fondamentale, mais aussi parce qu'il aide à comprendre ce qu'on a trop souvent traité d'abstrait ou de mathématiquement inaccessible à celui qui n'a pas de talent théorique particulier. Ces choses traitées d'inaccessibles (tenseurs, fonctions d'onde, matrices, spineurs, opérateurs, etc.) ne sont en réalité pas aussi abstruses qu'on le dit souvent, et l'expérience nous a montré que la méthode didactique proposée, à savoir l'étude du caractère complet des grandeurs physiques, a du succès.

Par caractère complet, il faut entendre les quatre caractères suivants, que nous classons de deux manières:

1 ^o Ordre historique (but proposé d'emblée)	{	caractère numérique
		caractère dimensionnel
		caractère géométrique ou algébrique
		caractère opératoire.

Nous considérons ici, en plus des caractères relevés plus haut, le caractère *numérique* évident qu'on a reconnu en tout premier lieu et qui ressort du but proposé d'emblée dans la recherche physique, la *mesure*, — ainsi que le caractère *opératoire*, qui est le plus fondamental de tous et que voici classé austrement:

2 ^o Ordre déductif (but atteint à la fin)	{	caractère opératoire (distinction entre états et observables. Opérateurs linéaires, hermitiens. Différentiateurs, ∇ , Δ , etc.).	
		caractère géométrique ou algébrique	combinaison ou analyse
			des opérateurs (composantes ou construction
			santes ou construction
		caractère dimensionnel	de ∇ , de l'opérateur hamiltonien, etc.
		caractère numérique (définition de la mesure, valeurs propres ou moyennes, choix des unités).	

¹⁾ A ce propos, remarquons que le rapport du magnéton de Bohr à l'atome de magnétisme (pôle magnétique élémentaire) de DIRAC est égal au rayon classique de l'électron. On peut s'attendre à ce résultat en vertu d'un *principe* de la théorie des dimensions (BRIDGMANN), selon lequel les facteurs numériques qui figurent dans les équations de dimensions sont de l'ordre de l'unité.

Suivant l'ordre déductif, on peut par exemple établir l'équation de SCHRÖDINGER d'une manière que nous tenons pour plus simple et dont le sens profond nous paraît plus compréhensible qu'en suivant l'ordre historique plein d'embuches et de constructions apparemment arbitraires.

Liaisons quasi-optiques: Modèles d'ellipsoïdes et d'antennes spatiales, avec résultats expérimentaux

par JEAN DREYFUS-GRAF (Genève et Berne).

Une liaison est donnée entre un dipôle émetteur 1, rayonnant la puissance N (Watt), et un récepteur 2, situé à la distance d (m) de 1, dans son plan équatorial. Le front de l'onde est sphérique. Dans le cas où le milieu est assimilable à un espace vide et infini (Fig. 1), selon Maxwell-Hertz, le champ électrique effectif engendré par 1, au lieu de 2, est

$$V = 9,5 \cdot \frac{\sqrt{N}}{d} \quad (\text{volt/m}) \quad (1)$$

On cherche à déterminer par une méthode approximative, mais accessible à la compréhension visuelle, le champ E quand un écran donné perturbe la liaison, d restant constant. A cet effet, la forme abstraite du calcul intégral sera remplacée par des opérations sur des modèles géométriques, concrétisant certains caractères physiques.

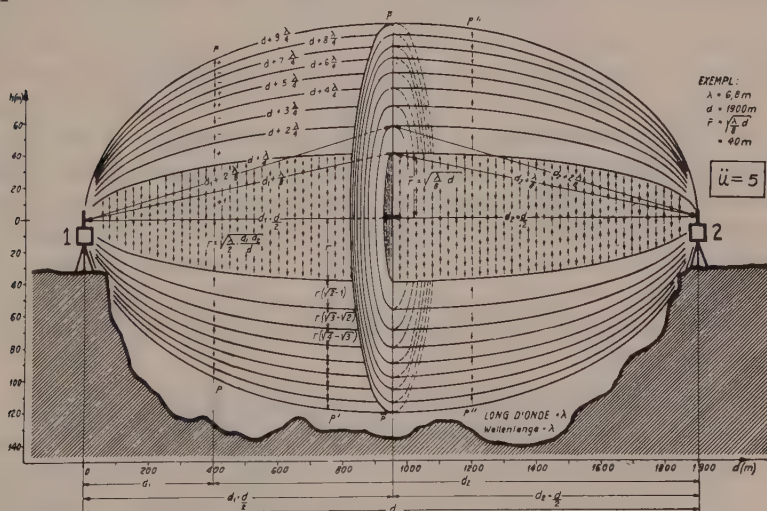


Fig. 1. Ellipsoïde de liaison. Exemple, avec surélévation $\ddot{u} = 5$.

1. « *Ellipsoïde de liaison* » (dans un espace vide, infini). Au lieu de considérer, comme FRESNEL, la résultante des émetteurs secondaires de HUYGENS situés sur une demi-sphère finie, on prend la résultante de ceux qui se trouvent dans un plan infini, normal à l'axe de liaison 1—2, à la distance d_1 de 1, et $d_2 = (d - d_1)$ de 2. Le lieu géométrique des points du plan, dont la somme des distances de 1 et de 2 est $d + n \cdot \lambda/4$ (où λ = longueur d'onde et $n = 1, 2, 3 \dots$), est un « *cercle-quart-d'onde* » d'ordre n , dont le rayon est $r_n = \sqrt{n} \cdot r_1$. La résultante de tous les « *anneaux-quart-d'onde* », de largeurs $(r_{n+1} - r_n) = r_n = r_1(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est nulle. La résultante de tous les émetteurs de HUYGENS du plan infini se réduit donc à ceux du « *disque de liaison* », de rayon

$$\left. \begin{aligned} r_1 \equiv r &= \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{d_1 d_2}{d}}; & d_1 \text{ et } d_2 > 2\lambda; \\ \text{si } d_1 = d_2 = d/2: \bar{r} &= \sqrt{\frac{\lambda}{8} d} = \text{rayon médian} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ce disque correspond à la première demi-zône de FRESNEL. La preuve rigoureuse de ce résultat a été établie par KIRCHHOFF. L'enveloppe de tous les disques de liaison, quand on fait varier d_1 entre 0 et d , est « *l'ellipsoïde de liaison* », qui est en quelque sorte le modèle de la liaison dans un vide infini, puisqu'il contient l'ensemble des émetteurs de HUYGENS dont la résultante est identique à celle de l'espace infini. (Grand-axe = $d + \lambda/4$; demi-petit-axe = rayon médian = \bar{r}). Au voisinage de 1 ou de 2 (d_1 ou $d_2 \leq d/10$), il dégénère en le « *paraboloïde de liaison* », de rayon $r = \sqrt{\frac{\lambda}{8} d_2}$, indépendant de la distance d , pour $d_2 \leq d/10$, par exemple.

2. « *Ecrans de liaison* ». Un écran de liaison est une surface « opaque » dont les dimensions sont au moins comparables au rayon r , selon (2), d'un disque lésé par lui. Il est dit « absorbant » ou « réflecteur », selon que la résultante, au récepteur, des ondes réfléchies par lui est pratiquement nulle ou différente de zéro. Un « mur », respectivement un « miroir », est un écran de liaison assimilable à un demi-plan perpendiculaire à l'axe 1—2, respectivement à un plan parallèle à cet axe.

3. *Facteur de mur absorbant*. Le plan critique contient la crête du mur et est normal à l'axe 1—2. En l'absence du mur, il contiendrait le disque de liaison de rayon r , selon (2). Mais la présence du mur rend celui-ci fictif, de même que tout l'ellipsoïde de liaison. La crête du mur passe à la hauteur positive $|+h| = h_+$ ou négative

tive $|-h| = h_-$, par rapport à l'axe 1—2. Pour d_1 et $d_2 > 2h_-$, les distances de la crête du mur à 1 et à 2 sont environ égales à leurs projections sur l'axe 1—2, $d_{13} \simeq d_1$, $d_{32} \simeq d_2$. La hauteur relative du mur est $h/r = \sqrt{n}$.

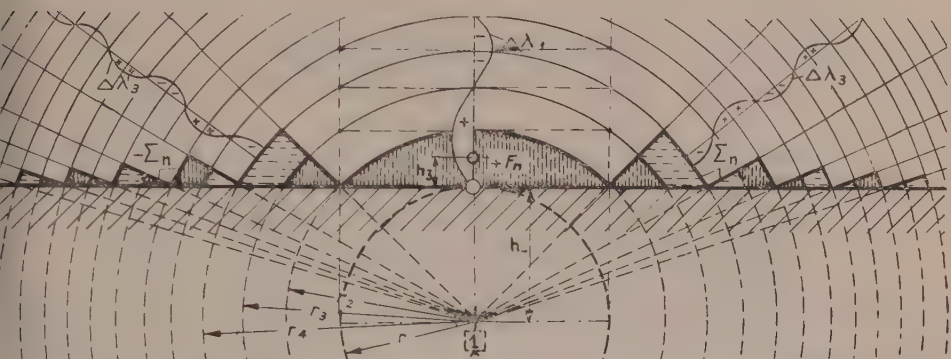


Fig. 2. Plan critique, segment d'anneau-quart-d'onde, antennes spatiales.

a) *Hauteur négative* (récepteur dans l'ombre géométrique). Le facteur de mur, ou champ relatif, S_-/V est concrétisé, en première approximation, par le rapport de la surface F_n du segment du premier anneau-quart-d'onde, émergeant au-dessus du mur, à la surface πr^2 du disque de liaison fictif.

$$\frac{F_n}{\pi r^2} = \frac{n+1}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right); \quad n = \left(\frac{h_-}{r} \right)^2; \quad d > 4h_-.$$

Cette approximation correspond assez exactement à la loi de diffraction résultant des intégrales de FRESNEL ou de la spirale de CORNU. Mais notre modèle, en respectant la sphéricité du front d'onde, fait apparaître de chaque côté du segment F_n une succession infinie de petites surfaces, dont la résultante est différente de zéro. Son expression approximative est une série semi-convergente

$$2 \Sigma_n \simeq r^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{2(n+2p-1)} \sqrt{\frac{n}{2p}} \cdot (-1)^{p+1}$$

Sa sommation jusqu'au dixième terme donne environ $-2\Sigma_n \simeq 0,25 \cdot F_n$.
Donc le facteur de mur, conforme à notre modèle, devient

$$\frac{S_-}{V} = 0,75 \cdot \frac{F_n}{\pi r^2} \cdot K_d; \quad K_d = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2h_-}{d}\right)^2}} \simeq 1 \text{ pour } d > 4h_-$$

b) *Hauteur positive ou négative.* Le facteur du mur absorbant peut être exprimé par 3 formules très simples, valables dans certaines limites :

$$\left. \begin{array}{l} \infty > h_- > 0,7 \cdot r : \\ \boxed{\frac{S_-}{V} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{h_-} \cdot K_d} \quad -0,7 \cdot r < h < +1,3 \cdot r : \\ \boxed{\frac{S}{V} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{h}{r}} \\ 1,3 \cdot r < h_+ < \infty : \\ \boxed{\frac{S_+}{V} = 1 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{h_+} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{h_+^2}{r^2} \right) \simeq 1} \end{array} \right\} \quad (3)$$

où $r = \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{d_1 d_2}{d}} \cdot K_r$; $K_r = \sqrt{1 + \left(\frac{h_-}{d} \right)^2} \simeq 1$ pour $d > 4 h_-$

Un mur de hauteur totale H , et de largeur $2 \cdot B$, est encore assimilable à un demi-plan (infini) si $B > H > 10 h_- > 10 r$. Le rayon r du disque fictif est donné par (2), mais doit être corrigé par le coefficient K_r lorsque $4 h_- > d$.

4. « *Antennes spatiales* ». Le segment F_n peut être considéré comme un réseau de dipôles virtuels (longueur $\lambda/2$), dirigé à la fois sur l'émetteur 1 sur le récepteur 2. C'est un relais virtuel que nous nommerons « antennes spatiales ». Au centre de gravité de $0,75 \cdot F_n$, on peut imaginer une « antenne spatiale de diffraction » unique 3. Sa hauteur moyenne au-dessus de la crête du mur est

$$h_3 = 0,4 \cdot r (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad n = \left(\frac{h_-}{r} \right)^2; \quad \frac{h_-}{r} > 1; \quad h_3 \simeq \frac{r^2}{5 h_-}. \quad (4)$$

Le modèle de la liaison diffractée par un mur est une chaîne de deux « ellipsoïdes de diffraction » (Fig. 3), d'axes 1—3 et 3—2. Leurs rayons médians respectifs sont

$$\bar{r}_{13} = \sqrt{\frac{\lambda}{8} d_{13}}; \quad \bar{r}_{32} = \sqrt{\frac{\lambda}{8} d_{32}};$$

$$d_{13} \simeq d_1, \quad d_{32} \simeq d_2 \quad \text{pour } d_1 \text{ et } d_2 > 2 h_-.$$

5. *Facteur de deux murs absorbants.* Supposons que l'ellipsoïde d'axe 1—3 soit lesé à son tour par un deuxième mur absorbant (Fig. 3), de hauteur h'_- au-dessus de l'axe 1—2, où $\frac{h'_-}{r'} \leq \frac{h_-}{r}$, et

de hauteur h_{13} par rapport à l'axe 1-3, à la distance d_{14} de 1, et d_{43} de 3. Il en résulte un deuxième facteur de mur absorbant

$$\frac{S_{13}}{V_{13}} = f\left(\frac{h_{13}}{r_{13}}\right), \text{ selon (3), où } r_{13} = \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{d_{14} \cdot d_{43}}{d_{13}}}.$$

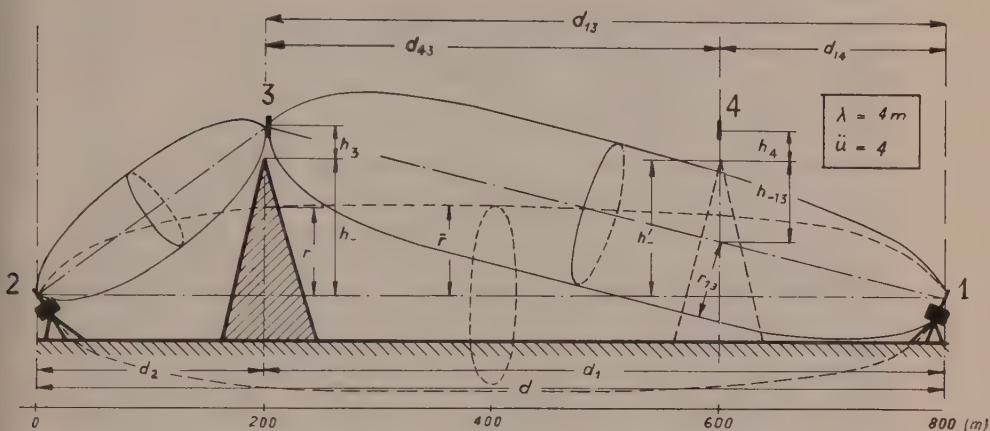


Fig. 3. Chaîne de deux ellipsoïdes de diffraction.

La réaction de S_{13}/V_{13} sur S_-/V est négligeable pratiquement, tant que $\frac{h_-'}{r'} \leq \frac{h_-}{r}$. On commencera donc toujours par le mur dont la hauteur relative (négative) est la plus grande. Le facteur de deux murs absorbants est

$$\left(\frac{S_-}{V}\right)_{\text{II}} = \frac{S_-}{V} \cdot \frac{S_{13}}{V_{13}}.$$

6. *Coefficient de mur conducteur.* ($\varepsilon = 1$; $\sigma = \infty$). Tant que $h_3 \ll \lambda/4$, l'antenne de diffraction se comporte comme un réseau directif, indépendant de son support. Par contre, quand $h_3 < \lambda/4$, sa réflexion par la crête d'un mur conducteur, par exemple, n'est pas négligeable. Le facteur de mur conducteur est $\left(\frac{S_-}{V}\right)_c = C \cdot \frac{S_-}{V}$ où C est un coefficient de correction.

a) *Polarisation perpendiculaire.* (Vecteur électrique \perp à la crête du mur). L'antenne de diffraction semble prolongée par son image, et $C_{\perp} = \frac{\lambda}{4 h_3}$; $0 < h_3 < \lambda/4$; C_{\perp} correspond à la formule de RÜDENBERG, où $\sqrt{N'} = 40 \cdot h'/\lambda$.

b) *Polarisation parallèle.* L'antenne de diffraction semble pourvue d'un réflecteur mal orienté:

$$C_{\parallel} = \sqrt{2} \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{h_3}{\lambda} \right); \quad 0 < h_3 < 3/8 \lambda.$$

7. *Autres facteurs d'écran.* Si des ellipsoïdes de liaison ou de diffraction sont lésés par des miroirs, ou même s'ils s'en rapprochent seulement, ils semblent accompagnés par des ellipsoïdes-image, affectés d'un coefficient de réflexion variable. On peut considérer quatre cas-types, selon que le miroir est conducteur ($\varepsilon = 1$; $\sigma = \infty$) ou isolant ($\varepsilon = 80$; $\sigma = 0$) et que la polarisation est perpendiculaire ou parallèle. Les cas intermédiaires peuvent en être déduits. Si les écrans ont des formes compliquées, on cherchera à les assimiler graphiquement à des murs ou à des miroirs, ou à des prismes reconstituables graduellement par des éléments de murs ou de miroirs, le facteur d'écran E/V étant le produit des facteurs d'éléments constitutifs, mais la réaction des uns sur les autres n'est alors pas toujours négligeable. Une surface « lisse » du globe terrestre pourra souvent être assimilée à un prisme triangulaire isocèle. La réfraction par la troposphère a pour effet d'incurver les axes d'ellipsoïdes. On pourra en tenir compte en réduisant d'autant les hauteurs relatives (négatives).

8. *Résultats expérimentaux.* Grâce à la complaisance des Directeurs du Bureau fédéral des Poids et Mesures, Berne, MM. BUCHMÜLLER et Prof. KÖNIG, les modèles esquissés ci-dessus ont pu être contrôlés partiellement par l'expérience. L'émetteur était un « turbator » de MM. BROWN, BOVERI & CIE, Baden, le récepteur, un détecteur agissant sur un galvanomètre, et les antennes à 16 dipôles. La longueur d'onde de 12 cm a permis d'obtenir en laboratoire des effets de diffraction par des murs en anticorodal 2 mm., de l'ordre du mètre carré. La précision des mesures de champ et de longueurs était de l'ordre de $\pm 5\%$. Dans ces limites, le facteur de mur et de deux murs, ainsi que les coefficients de murs conducteurs ont été confirmés. Il semble que les modèles d'ellipsoïdes et d'antennes spatiales concrétisent les caractères physique essentiels de liaisons quasi-optiques. Ils paraissent aussi applicables à d'autres ondes, en principe.

Note: Les paragraphes 6 et 7 n'ont pas été exposés à la séance du 6 mai 1944. Les figures montrées pendant cette séance ne peuvent pas être reproduites ici et devront faire l'objet d'autres publications.

Durch Kernphotoeffekt an Cer und Neodym erhaltene neue Aktivitäten

von O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (Zürich).

Durch Bestrahlung von *Cer* in Form von Cerosulfid mit der Li-Gammastrahlung von 17 MeV Quantenenergie erhielten wir eine Aktivität mit einer Halbwertszeit von $T = 1,1 \pm 0,1$ min. Durch einen (γ, n) -Prozess entstanden, ist diese Periode entweder Ce^{139} oder Ce^{141} zuzuschreiben. Eine 2,1 min.-Positronenaktivität, die POOL und QUILL¹⁾ durch $(n, 2n)$ -Prozess an Cer (Bestrahlung von Ceroxyd) erhalten haben und dem Ce^{139} zuschreiben, konnte nicht gefunden werden.

An *Neodym* wurde durch die Li-Gammastrahlung eine $1,6 \pm 0,3$ h-Aktivität induziert. Die Bestrahlung des gleichen Neodympräparates (Neodymnitrat) mit einer Ra + Be-Neutronenquelle von 69 mC Ra-Äquiv. ergab zwei Aktivitäten mit Halbwertszeiten von $T = 62 \pm 5$ min und $T \sim 35$ h. Die 62 min-Aktivität wird bei Verlangsamung der Neutronen in Paraffin und sonst gleicher geometrischer Anordnung von Neutronenquelle und Präparat um einen Faktor 8 verstärkt. Der Verstärkungsfaktor der 35 h-Aktivität konnte bis jetzt noch nicht bestimmt werden. Die 1,6 h-Aktivität wurde bei Bestrahlung mit Neutronen nicht gefunden. Diese durch die Gammastrahlung induzierte Aktivität ist deshalb wahrscheinlich aus dem leichtesten Nd-Isotop entstanden, und wäre somit dem Nd^{141} zuzuschreiben.

Die ausführliche Arbeit wird in den H.P.A. erscheinen.

¹⁾ M. L. POOL und L. L. QUILL: Phys. Rev. **53** (1938), 437.

Zum Deuteronproblem. II¹⁾

von G. Wentzel.

(22. IV. 1944)

Es werden diejenigen Deuteron-Zustände untersucht, bei denen entweder der Spin J oder der isotope Spin K null ist. Unter ihnen erweisen sich ein S -Zustand mit $K = 0, J = 1$ und ein solcher mit $J = 0, K = 1$ als die energetisch tiefsten Zustände (die beiden Terme sind gleich bei Vernachlässigung der Tensorkraft), und zwar gilt dies nicht nur für grosse sondern auch für kleine Werte der Isobaren-Energie. Da die zwei tiefsten Zustände mit den bekannten Deuteron-Zuständen 3S und 1S identifiziert werden können, entspricht die Theorie in dieser Hinsicht der Erfahrung. Neu gegenüber den früheren Theorien ist die Voraussage isobarer Deuteron-Zustände; der Spin-Ladungs-Charakter und die Anregungsenergien der tiefsten dieser Zustände werden diskutiert.

§ 1. Verallgemeinerung der Gleichungen (I, 29 und 33).

Im I. Teil dieser Arbeit, § 4, wurden die Deuteron-Zustände mit $J=K=0$ untersucht. Hier kommen wir zum nächst verwickelteren Fall: Eine der beiden Quantenzahlen J, K sei null, die andere beliebig. Es handelt sich also um Zustände, die entweder Spin-Singletts oder Ladungssingletts sind. Da die Tensorkraft — wie in I — ignoriert werden soll, ist die Theorie bezüglich J und K symmetrisch; es genügt daher, den einen Fall ($J=0, K$ beliebig) zu betrachten; der andere Fall ($K=0, J$ beliebig) ergibt sich dann durch Vertauschung von J und K . Nach dem „Vektormodell“ (vgl. (I, 5)) gibt es auch hier nur F -Komponenten mit $j_1 = j_2 = j$; ferner ist die ungerade Zahl $j_1 + j_2 = 2j$ auf die Werte $\geq J$ und $\geq K$ beschränkt, d. h. j durchläuft nur die Werte $j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \dots$, wo j_0 die kleinste halbganze Zahl bedeutet, die sowohl $\geq J/2$ als $\geq K/2$ ist;

$$\text{für } J=0: j_0 = \begin{cases} K/2, & \text{wenn } K \text{ ungerade,} \\ (K+1)/2, & \text{wenn } K \text{ gerade.} \end{cases} \quad (1)$$

Das Pauliprinzip besagt nach (I, 9):

$$F(jj, \mathbf{r}) = \mp F(jj, -\mathbf{r}), \text{ je nachdem } J+K \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade.} \end{cases} \quad (2)$$

¹⁾ Teil I: M. FIERZ und G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **17** (1944), S. 215. Die dortigen Bezeichnungen werden hier übernommen; Gleichungsnummern mit vorgesetzter I beziehen sich auf Teil I.

Wie im Falle $J=K=0$ untersuchen wir zunächst die Gleichung (I, 11) bzw. (I, 25), d. h. das *Problem zweier ruhender Nukleonen* (festgehaltene Ortskoordinaten). Mit den Bezeichnungen

$$a(jj) = a_j, \quad (jj | \Omega | j'j') = \Omega_{jj'}$$

haben wir das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \{-W + \varepsilon[(j + \frac{1}{2})^2 - 1]\} a_j + V \sum_{j' \geq j_0} \Omega_{jj'} a_{j'} &= 0 \\ (j = j_0, j_0 + 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Indem wir uns für den Fall

$$J = 0, K \text{ beliebig}$$

entscheiden, können wir nach FIERZ¹⁾ ansetzen:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{jj} &= 1 - \frac{K(K+1)}{2j(j+1)}, \\ \Omega_{j,j-1} &= \Omega_{j-1,j} - \frac{\sqrt{j^2 - (\frac{K}{2})^2} \cdot \sqrt{j^2 - (\frac{K+1}{2})^2}}{j \cdot \sqrt{j^2 - 1/4}}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

alle anderen Matrixelemente = 0.

Für die folgenden Rechnungen empfiehlt es sich, die Quadratwurzeln zu beseitigen; dies kann z. B. durch die folgende Substitution geschehen, wobei wir gleichzeitig statt j den ganzzahligen Index $s = j + \frac{1}{2}$ einführen:

$$a_{s-\frac{1}{2}} = b_s \sqrt{\gamma_s}, \quad \text{wo} \quad (5)$$

$$\gamma_s = [s^2 - (\frac{1}{2})^2] [s^2 - (\frac{3}{2})^2] [s^2 - (\frac{5}{2})^2] \cdots [s^2 - (\frac{K}{2})^2]. \quad (6)$$

Beachtet man, dass

$$\frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_s} = \frac{(j - \frac{K}{2})(j - \frac{K+1}{2})}{(j + \frac{K}{2})(j + \frac{K+1}{2})} \cdot \frac{j + \frac{1}{2}}{j - \frac{1}{2}} \quad (j = s - \frac{1}{2}),$$

so erhält man anstelle von (3), (4):

$$\left. \begin{aligned} \{-W + \varepsilon[s^2 - 1]\} b_s + V \sum_{s' \geq s_0} \bar{\Omega}_{ss'} b_{s'} &= 0 \\ (s \geq s_0 = j_0 + \frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹⁾ M. FIERZ, *Helv. Phys. Acta* **17** (1944), S. 181, Gl. IV. Berichtigung zu I: Diese Arbeit von FIERZ ist auch in Fussnote 2 S. 219 gemeint.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega}_{ss} = \Omega_{ss} &= 1 - \frac{K(K+1)}{2(s^2 - \frac{1}{4})}, \\ \bar{\Omega}_{s, s-1} &= \frac{\left(j - \frac{K}{2}\right)\left(j - \frac{K+1}{2}\right)}{j(j - \frac{1}{2})} = 1 + \frac{K(K-1)}{2(s-1)} - \frac{K(K+1)}{2s-1}, \\ \bar{\Omega}_{s-1, s} &= \frac{\left(j + \frac{K}{2}\right)\left(j + \frac{K+1}{2}\right)}{j(j + \frac{1}{2})} = 1 - \frac{K(K-1)}{2s} + \frac{K(K+1)}{2s-1}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

alle andern Matrixelemente = 0.

Die neue Matrix $\bar{\Omega}$ ist natürlich nicht-hermitisch, da die Substitution (5) nicht-unitär ist¹⁾.

Im Gleichungssystem (3) durchlaufen die Indices j, j' nur die Werte $\geq j_0$ (vgl. (1)). Seine Eigenwerte W sind aber gleichzeitig auch Eigenwerte des erweiterten Gleichungssystems, das man erhält, wenn man j, j' alle halbganzen Werte $\geq \frac{1}{2}$ durchlaufen lässt²⁾. Dies beruht darauf, dass nach (4)

$$\Omega_{j_0, j_0-1} = \Omega_{j_0-1, j_0} = 0$$

ist; infolgedessen zerfällt das erweiterte System in ein System von Gleichungen für die Komponenten $a_{j_0}, a_{j_0+1}, \dots$ allein, das mit (3) übereinstimmt und die Eigenwerte W besitzt, und in ein (endliches) System von Gleichungen für die Grössen $a_{1/2}, a_{3/2}, \dots, a_{j_0-1}$, dessen Eigenwerte im allgemeinen nicht Eigenwerte von (3) sind; die letzteren Eigenwerte sind leicht zu berechnen und können daher mit den gesuchten Eigenwerten W nicht verwechselt werden; wir nennen sie „falsche Eigenwerte“. Analog erweitern wir jetzt auch das Gleichungssystem (7), indem wir die Indices s, s' über alle ganzzahligen Werte ≥ 1 laufen lassen. Allerdings zerfällt dieses System *nicht*, da nach (8)

$$\text{zwar } \bar{\Omega}_{s_0, s_0-1} = 0, \text{ aber } \bar{\Omega}_{s_0-1, s_0} \neq 0$$

ist (für $K \geq 2$) (die Matrix $\bar{\Omega}$ ist nur „halb reduziert“). Trotzdem stimmen sowohl seine „richtigen“ wie seine „falschen“ Eigenwerte mit denen von (3) überein, wie leicht zu sehen ist. Die zu den richtigen Eigenwerten W gehörigen Eigenvektoren des erweiterten Systems besitzen „falsche“ Komponenten $b_1, b_2, \dots, b_{s_0-1}$; doch braucht man diese nur nullzusetzen, um die Eigenvektoren des engeren Gleichungssystem (7) zu erhalten (bezüglich der Normie-

¹⁾ Durch die Substitution $a_{s-1/2} = b_s/\sqrt{\gamma_s}$ wäre man zur transponierten Matrix gelangt.

²⁾ Eine Erweiterung tritt natürlich nur ein für $j_0 \geq 3/2$, d. h. $K \geq 2$.

nung vgl. § 2). Bei der Erweiterung können übrigens die Matrixkomponenten

$$\Omega_{jj'} \text{ mit } j < j_0, \text{ bzw. } \bar{\Omega}_{ss'} \text{ mit } s < s_0 \quad (9)$$

nach Belieben gewählt werden; die richtigen Eigenwerte W sind von dieser Wahl unabhängig, und dies kann geradezu als ein Kriterium für einen richtigen Eigenwert benutzt werden.

Wenn wir nun vom erweiterten System (7) ausgehen, wo also s und s' von 1 an laufen, so können wir bei den weiteren Rechnungen ähnlich vorgehen wie in I, § 4. Durch die Fourierreihe

$$\varphi(\eta) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \frac{\sin s \eta}{\sqrt{\pi}} (-1)^s \quad (10)$$

definieren wir eine Funktion der Variablen η mit den Eigenschaften:

$$\varphi(\eta + k \cdot 2\pi) = \varphi(\eta), \quad \varphi(-\eta) = -\varphi(\eta). \quad (11)$$

Ferner sei

$$D(\eta\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} \bar{\Omega}_{ss'} \cdot \sin s \eta \cdot \sin s' \xi \cdot (-1)^{s+s'}. \quad (12)$$

Aus den Gleichungen (7) folgt dann, dass die Funktion φ der Integro-Differential-Gleichung

$$\varphi''(\eta) + \left(\frac{W}{\varepsilon} + 1 \right) \varphi(\eta) - \frac{V}{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} D(\eta\xi) \varphi(\xi) d\xi = 0 \quad (13)$$

genügt. Dies ist die Verallgemeinerung der Mathieu-Gleichung (I, 33)¹⁾.

Zur Berechnung des Kerns D setzen wir die Ausdrücke (8) in (12) ein (und zwar vorläufig auch für $s < s_0$) und trennen die Terme mit verschiedener K -Abhängigkeit:

$$D = D_0 + \frac{K(K-1)}{2} D_1 + \frac{K(K+1)}{2} D_2. \quad (14)$$

Zunächst:

$$\begin{aligned} D_0(\eta\xi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sin s \eta \{ \sin s \xi - \sin (s+1) \xi - \sin (s-1) \xi \} \\ &= (1 - 2 \cos \xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \{ \cos s(\xi - \eta) - \cos s(\xi + \eta) \}. \end{aligned}$$

¹⁾ Hätten wir, gemäss der Bemerkung in Fussnote 1, S. 254, mit der transponierten $\bar{\Omega}$ -Matrix gerechnet, so stände in (13) der Kern $D(\xi\eta)$ statt $D(\eta\xi)$.

Definieren wir eine periodische δ -Funktion durch

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is z} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \cos sz \right), \quad (15)$$

so wird

$$\begin{aligned} D_0(\eta\xi) &= (1 - 2 \cos \xi) \cdot \frac{1}{2} \{ \delta(\xi - \eta) - \delta(\xi + \eta) \}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} D_0(\eta\xi) \varphi(\xi) d\xi &= (1 - 2 \cos \xi) \cdot \frac{1}{2} \{ \varphi(\eta) - \varphi(-\eta) \} \\ &= (1 - 2 \cos \xi) \cdot \varphi(\eta). \end{aligned} \quad (16)$$

Für $K = 0$ wird $D = D_0$, und (13) geht in die Mathieu-Gleichung (I, 33) über ($x = \pi + \eta$). Weiter ist:

$$\begin{aligned} D_1(\eta\xi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sin s\xi \{ \sin(s-1)\eta - \sin(s+1)\eta \} \\ &= -\sin \eta \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \{ \sin s(\xi - \eta) + \sin s(\xi + \eta) \}. \end{aligned}$$

Aus (15) folgt aber durch Integration von $-z$ bis $+z$, wo $|z| < 2\pi$:

$$\begin{aligned} \int_{-z}^{+z} dz \delta(z) &\equiv \frac{z}{|z|} = \frac{1}{\pi} \left(z + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin sz}{s} \right), \\ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin sz}{s} &= \frac{\pi}{2} \frac{z}{|z|} - \frac{z}{2} \quad (\text{für } |z| < 2\pi). \end{aligned}$$

Hiermit wird, falls ξ und η auf das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ beschränkt werden:

$$D_1(\eta\xi) = -\sin \eta \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\xi - \eta}{|\xi - \eta|} + \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} \right] - \frac{1}{\pi} \xi \right\}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\xi - \eta}{|\xi - \eta|} + \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} \right] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \xi > |\eta|, \\ -1, & \text{wenn } \xi < -|\eta|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (17)$$

Beachtet man noch, dass φ ungerade ist, so folgt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_1(\eta\xi) \varphi(\xi) d\xi = -2 \sin \eta \cdot \left[\int_{\eta}^{\pi} \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \xi \varphi(\xi) d\xi \right].$$

Hierfür schreiben wir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_1(\eta\xi) \varphi(\xi) d\xi = 2 \sin \eta \cdot \left[\int_0^{\eta} \varphi(\xi) d\xi + \Gamma \right], \quad (18)$$

$$\Gamma = - \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{\pi} \xi \right) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Schliesslich [vgl. (8), (12), 14)]:

$$D_2(\eta\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sin s\eta \left\{ \sin s\xi \cdot \left(-\frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\sin(s-1)\xi}{s-\frac{1}{2}} - \frac{\sin(s+1)\xi}{s+\frac{1}{2}} \right\}.$$

Ersetzt man in den Termen mit den Nennern $s+\frac{1}{2}$ die Zahl s durch $-s$, so erhält man folgende, von $-\infty$ bis $+\infty$ laufende Summe:

$$\begin{aligned} D_2(\eta\xi) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \sin s\eta \cdot \{ \sin s\xi - \sin(s-1)\xi \} \\ &= -2 \sin \frac{\xi}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \sin s\eta \cdot \cos(s-\frac{1}{2})\xi. \end{aligned}$$

Schreiben wir hier

$$\sin s\eta = \sin(s-\frac{1}{2})\eta \cdot \cos \frac{\eta}{2} + \cos(s-\frac{1}{2})\eta \cdot \sin \frac{\eta}{2},$$

so liefert der zweite Term aus Symmetriegründen keinen Beitrag zur Summe, und es kommt:

$$\begin{aligned} D_2(\eta\xi) &= -\cos \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\xi}{2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \{ \sin(s-\frac{1}{2})(\eta-\xi) + \sin(s-\frac{1}{2})(\eta+\xi) \}. \end{aligned}$$

Nun folgt aber aus (15) für $|z| < 2\pi^1$:

$$\begin{aligned} \int_{-z}^{+z} dz \delta(z) e^{-\frac{iz}{2}} &\equiv \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s-\frac{1}{2}} (e^{i(s-\frac{1}{2})z} - e^{-i(s-\frac{1}{2})z}) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(s-\frac{1}{2})z}{s-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Folglich

$$D_2(\eta\xi) = -\cos \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\xi}{2} \cdot \left[\frac{\eta-\xi}{|\eta-\xi|} + \frac{\eta+\xi}{|\eta+\xi|} \right].$$

¹ Für beliebige z gilt:

$$\int_{-z}^{+z} dz \delta(z) e^{-\frac{iz}{2}} \equiv \frac{\sin z/2}{|\sin z/2|} = \frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(s-\frac{1}{2})z}{s-\frac{1}{2}}.$$

Mit Hilfe von (17) (wo ξ und η zu vertauschen sind) findet man:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_2(\eta\xi) \varphi(\xi) d\xi = -4 \cos \frac{\eta}{2} \int_0^{\eta} \sin \frac{\xi}{2} \cdot \varphi(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Wir setzen nun den Kern (14), unter Benutzung von (16), (18) und (20), in die Integro-Differential-Gleichung (13) ein. Mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{W+V}{\varepsilon} + 1, \quad \beta = \sqrt{\frac{V}{\varepsilon}}^1) \quad (21)$$

lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \varphi''(\eta) + [\alpha - 2\beta^2(1 - \cos \eta)] \varphi(\eta) \\ + \beta^2 K(K+1) \cdot 2 \cos \frac{\eta}{2} \int_0^{\eta} \sin \frac{\xi}{2} \varphi(\xi) d\xi \\ - \beta^2 K(K-1) \cdot \sin \eta \left[\int_0^{\eta} \varphi(\xi) d\xi + \Gamma \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Wir wollen noch untersuchen, wie der Kern D sich ändert, wenn wir von der oben erwähnten Freiheit Gebrauch machen, die \overline{Q} -Komponenten (9) abzuändern. Ändern wir z. B. in (12) die Komponenten $\overline{Q}_{1s'}$ ab, was für $K \geq 2$ ($s_0 \geq 2$) erlaubt ist, so ändert sich

$$\begin{aligned} D(\eta\xi) \quad \text{um} \quad \sin \eta \sum_{s'} c_{s'} \sin s' \xi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} D(\eta\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad \text{um} \quad \sin \eta \int_0^{\pi} f(\xi) \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

wo $f(\xi)$ eine beliebige Funktion ist. Fügt man den betreffenden Zusatzterm in (13) bzw. (22) hinzu, so bedeutet dies nichts anderes als eine Änderung des Wertes der Konstanten Γ in (22); während diese bisher durch (19) definiert war, tritt nun an die Stelle des Faktors $(1 - \xi/\pi)$ im Integranden eine beliebige Funktion von ξ . Wir können daher Γ als eine beliebig wählbare Konstante auffassen; die „richtigen“ Eigenwerte W müssen von dieser Wahl unabhängig sein, was wir im Folgenden verifizieren werden. Die zugehörigen Eigenfunktionen φ sind natürlich von Γ abhängig; eine Änderung von Γ bewirkt in der Fourierreihe (10) eine Änderung der „falschen Komponenten“ $s < s_0$ (und umgekehrt). Das Gesagte gilt, wie bemerkt, nur für $K \geq 2$; doch braucht diese Einschrän-

¹⁾ V ist gemäss (I, 6) positiv angenommen.

kung nicht besonders vermerkt zu werden, da Γ in (22) mit $K(K-1)$ multipliziert ist und daher für $K=0$ oder 1 garnicht auftritt. Entsprechend kann man für $K \geq 4$ ($s_0 \geq 3$) einen weiteren Term $\text{const} \cdot \sin 2\eta$ in (22) hinzufügen, und so fort; wir wollen aber Einfachheit halber davon absehen und nur den einen Γ -Term in (22) stehen lassen.

Wir kommen nun zur Bestimmung der Eigenwerte der Gleichungen (3) bzw. (22). Da es sich schon im einfachsten Fall $K=0$ um das Eigenwertproblem einer Mathieu-Gleichung handelt, sind wir für $K > 0$ erst recht gezwungen, uns auf die Untersuchung der beiden Grenzfälle $V \ll \varepsilon$ und $V \gg \varepsilon$ zu beschränken und eventuell für $V \sim \varepsilon$ eine Interpolation zu versuchen. Der erstgenannte Grenzfall ist natürlich durch eine Störungsrechnung leicht zu erledigen: betrachtet man in der Matrix des Gleichungssystems (3) die Matrix $\Gamma \cdot Q$ als eine kleine Störung, so findet man für die Eigenwerte W folgende Entwicklung nach Potenzen von V/ε :

$$W = \varepsilon \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right] + V \Omega_{jj} + \frac{V^2}{2\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{j,j-1}^2}{j} - \frac{\Omega_{j,j+1}^2}{j+1} \right) + \dots \quad (23)$$

$(j \geq j_0, \text{ d. h. } j \geq K/2; \quad V \ll \varepsilon).$

Führen wir statt j wieder die ganze Zahl $s = j + \frac{1}{2}$ ein, so können wir, unter Benutzung von (8), anstelle von (23) auch schreiben:

$$W_s = \varepsilon [s^2 - 1] + V \bar{\Omega}_{ss} + \frac{V^2}{\varepsilon} \left(\frac{\bar{\Omega}_{s,s-1} \bar{\Omega}_{s-1,s}}{2s-1} - \frac{\bar{\Omega}_{s,s+1} \bar{\Omega}_{s+1,s}}{2s+1} \right) + \dots \quad (24)$$

$(s \geq s_0, \text{ d. h. } s \geq \frac{K+1}{2}; \quad V \ll \varepsilon).$

Den anderen Grenzfall dagegen werden wir auf Grund der Gleichung (22) behandeln. In dieser nehmen wir also jetzt $\beta \gg 1$ an, was nach (21) $V \gg \varepsilon$ bedeutet.

§ 2. Grenzfall $\beta \gg 1$.

Für $K=0$ lösten wir in I, § 4 die Schrödingergleichung (22), indem wir deren „Potentialfunktion“ in der Umgebung ihres Minimums ($x = \pi$, d. h. hier $\eta = 0$) entwickelten; wurden vom Cosinus nur die quadratischen Terme beibehalten, so ergaben sich die Eigenwerte eines harmonischen Oszillators; die höheren Entwicklungsterme entsprachen anharmonischen Störungen.

Für $K \neq 0$ liegt es nahe, eine analoge Entwicklung zu versuchen. Wir ersetzen daher in (22) $(1 - \cos \eta)$ durch $\eta^2/2$, und in

den K -abhängigen Termen $\cos \eta/2$ durch 1, $\sin \xi/2$ durch $\xi/2$ und $\sin \eta$ durch η . Es wird sich zeigen, dass die dabei vernachlässigten Terme wirklich nur anharmonische Störungen ergeben. Für die „nullte Näherung“ setzen wir also folgende Gleichung an:

$$\varphi''(\eta) + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi(\eta) + \beta^2 K(K+1) \int_0^\eta \xi \varphi(\xi) d\xi - \beta^2 K(K-1) \eta \left[\int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi + \Gamma \right] = 0. \quad (25)$$

Differenziert man diese Gleichung K -mal nach η , so folgt $[\varphi^{(l)}$ bedeutet die l -te Ableitung von φ]:

$$\varphi^{(K+2)}(\eta) + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi^{(K)}(\eta) = 0; \quad (26)$$

d. h. die Funktion

$$\varphi^{(K)} = \psi \quad (27)$$

genügt der Oszillatorgleichung:

$$\psi'' + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \psi = 0. \quad (28)$$

Von den Lösungen dieser Gleichung kommen nur die — für grosse $|\eta|$ exponentiell abklingenden — Oszillator-Eigenfunktionen in Betracht, da nur sie den (später zu besprechenden) Normierungsbedingungen unterworfen werden können. Folglich sind die Eigenwerte des Parameters α :

$$\alpha_n = \beta (2n + 1). \quad (29)$$

Da aber φ nach Definition eine ungerade Funktion ist, gilt für ihre K -te Abteilung ψ_n :

$$\psi_n(-\eta) = (-1)^{K+1} \cdot \psi_n(\eta). \quad (30)$$

Für die durch (29) definierte Oszillationsquantenzahl n bedeutet dies:

$$n + K = \text{ungerade Zahl}; \quad (31)$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 1, 3, 5, \dots, \text{ wenn } K \text{ gerade,} \\ n = 0, 2, 4, \dots, \text{ wenn } K \text{ ungerade.} \end{array} \right\} \quad (32)$$

Die entsprechenden Eigenwerte W sind nach (21) und (29):

$$W_{(n)} = -V + \sqrt{\varepsilon V} (2n + 1) + \dots \quad (33)$$

In dieser „harmonischen Näherung“ sind also die Eigenwerte mit $K = 2, 4, \dots$ die gleichen wie die früher (I, § 4) für $K = 0$ gefun-

denen; für $K = 1, 3, 5, \dots$ dagegen liegen alle Eigenwerte nach (32) um $2\sqrt{\varepsilon V}$ tiefer. Die K -Entartung, d. h. das Zusammenfallen der zu geraden bzw. ungeraden K -Werten gehörigen Eigenwerte, besteht, wie sich zeigen wird, nur solange die Anharmonizitäten vernachlässigt werden. Alle gefundenen Eigenwerte sind „richtige“ Eigenwerte im Sinne des § 1, d. h. Eigenwerte des ursprünglichen (nicht erweiterten) Gleichungssystems (3), wie schon aus ihrer Unabhängigkeit von Γ folgt.

Nach (27) sind die Eigenfunktionen φ der Gleichung (25) durch K -malige Integration der Oszillator-Eigenfunktionen ψ zu erhalten. Durch wiederholte Integration zwischen 0 und η bilden wir zunächst die Funktionen:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(-1)}(\eta) &= \int_0^\eta \psi(\xi) d\xi, & \psi^{(-2)}(\eta) &= \int_0^\eta \psi^{(-1)}(\xi) d\xi = \int_0^\eta \psi(\xi)(\eta - \xi) d\xi, \\ \dots, & & \psi^{(-l-1)}(\eta) &= \int_0^\eta \psi^{(-l)}(\xi) d\xi = \frac{1}{l!} \int_0^\eta \psi(\xi)(\eta - \xi)^l d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Dann ist offenbar

$$\varphi(\eta) = \psi^{(-K)}(\eta) + P_{K-1}(\eta), \quad (35)$$

wo P_{K-1} ein ungerades Polynom höchstens $(K-1)$ -ten Grades ist. Geht man mit (35) in die Gleichung (25) ein, und benutzt man die Gleichung, die aus der Oszillatorgleichung (28) durch K -malige Integration zwischen 0 und η folgt, so erhält man lineare Gleichungen für die Koeffizienten des Polynoms, die dieses eindeutig zu bestimmen gestatten. Seine Kenntnis ist aber für das Folgende nicht nötig. Zu beachten ist, dass die Koeffizienten des Polynoms vom Parameter Γ abhängen; dies entspricht dem in § 1 hervorgerufenen Umstand, dass in der Fourierreihe (10) die „falschen Komponenten“ $b_s (s < s_0)$ von Γ abhängig sind. Natürlich ist die Formel (35) für die Eigenfunktionen φ , wegen der in der harmonischen Näherung gemachten Vernachlässigungen, nur für $|\eta| \ll 1$ gültig; auf die Aussenbereiche ($\eta \rightarrow \pm \pi$) kommen wir später zurück.

Als nächstes berechnen wir die durch die „Anharmonizitäten“ hervorgerufenen Eigenwertstörungen. Indem wir in der Entwicklung der trigonometrischen Funktionen in (22) jeweils einen Schritt weiter gehen [also z. B.

$$2 \cos \frac{\eta}{2} \sin \frac{\xi}{2} \text{ durch } \xi - \frac{1}{8} \xi \eta^2 - \frac{1}{24} \xi^3$$

ersetzen], kommt anstelle von (25):

$$\left. \begin{aligned} & \varphi''(\eta) + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi(\eta) + \beta^2 K(K+1) \int_0^\eta \xi \varphi(\xi) d\xi \\ & \quad - \beta^2 K(K-1) \eta \left[\int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi + \Gamma \right] \\ & = \beta^2 \left\{ -\frac{1}{12} \eta^4 \varphi(\eta) + K(K+1) \left[\frac{1}{8} \eta^2 \int_0^\eta \xi \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{24} \int_0^\eta \xi^3 \varphi(\xi) d\xi \right] \right. \\ & \quad \left. - K(K-1) \frac{1}{6} \eta^3 \left[\int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi + \Gamma \right] \right\} \equiv U(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die kleinen Korrekturterme haben wir rechterhand in der Störungsfunktion U zusammengefasst; in ihr kann in erster Näherung φ durch seinen Wert nullter Näherung (35) ausgedrückt werden. Mit den Definitionen (34) (bezüglich φ statt ψ) wird

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \xi \varphi d\xi &= \eta \varphi^{(-1)} - \varphi^{(-2)}, \\ \int_0^\eta \xi^3 \varphi d\xi &= \eta^3 \varphi^{(-1)} - 3 \eta^2 \varphi^{(-2)} + 6 \eta \varphi^{(-3)} - 6 \varphi^{(-4)}; \end{aligned}$$

folglich

$$U = \beta^2 \left\{ -\frac{1}{12} \eta^4 \varphi - K(K-1) \frac{1}{6} \eta^3 [\varphi^{(-1)} + \Gamma] + K(K+1) \left[\frac{1}{8} \eta^3 \varphi^{(-1)} - \frac{1}{4} \eta^2 \varphi^{(-2)} + \frac{1}{4} \eta \varphi^{(-3)} - \frac{1}{4} \varphi^{(-4)} \right] \right\} \quad (37)$$

Durch K -malige Differentiation der Gleichung (36) folgt unter Benutzung von Früherem:

$$\varphi^{(K+2)} + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi^{(K)} = U^{(K)}, \quad (38)$$

und für die K -te Ableitung der Störungsfunktion erhält man aus (37) durch eine längere Rechnung:

$$\begin{aligned} U^{(K)} &= \beta^2 \left\{ -\frac{1}{12} \eta^4 \varphi^{(K)} + \frac{K(K+1)}{4} \eta [\eta \varphi^{(K-2)} - \varphi^{(K-3)}] \right. \\ & \quad \left. + \frac{K(K^2-1)}{12} [2 \eta \varphi^{(K-3)} - 3 \varphi^{(K-4)}] - K(K-1) \Gamma \eta^{(K-2)} \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Der Term $\sim \Gamma$ kommt nur für $K \geq 2$ vor; $\eta^{(K-2)}$ bedeutet die $(K-2)$ -te Ableitung von η , d. h.:

$$\eta^{(3)} = \eta, \quad \eta^{(1)} = 1, \quad \eta^{(2)} = \eta^{(3)} = \dots = 0.$$

Der Ausdruck (39) lässt sich vereinfachen durch Berücksichtigung

der Gleichung (25), die φ in nullter Näherung bestimmt. Differenziert man nämlich diese Gleichung $(K-2)$ -mal (unter der Voraussetzung $K \geq 2$), bzw. $(K-1)$ -mal (unter der Voraussetzung $K \geq 1$), so kommt:

$$\begin{aligned} \varphi^{(K)} + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi^{(K-2)} + 2 \beta^2 [2 \eta \varphi^{(K-3)} - 3 \varphi^{(K-4)}] \\ - \beta^2 K (K-1) \Gamma \eta^{(K-2)} = 0 \quad (K \geq 2), \\ \varphi^{(K+1)} + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi^{(K-1)} + 2 \beta^2 [\eta \varphi^{(K-2)} - \varphi^{(K-3)}] \\ - \beta^2 K (K-1) \Gamma \eta^{(K-1)} = 0 \quad (K \geq 1). \end{aligned}$$

Die hier durch eckige Klammern hervorgehobenen Ausdrücke sind dieselben wie in (39); diese Ausdrücke (die nur für $K \geq 2$ bzw. $K \geq 1$ in (39) auftreten) können daher aus (39) eliminiert werden. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} U^{(K)} = -\frac{1}{12} \beta^2 \eta^4 \varphi^{(K)} - \frac{K(K+1)}{8} \eta [\varphi^{(K+1)} + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi^{(K-1)}] \\ - \frac{K(K^2-1)}{24} [\varphi^{(K)} + (\alpha - \beta^2 \eta^2) \varphi^{(K-2)}]. \quad (40) \end{aligned}$$

Die Terme $\sim \Gamma$ haben sich gerade fortgehoben (nur für $K=2$ und $K=3$ ist dies nicht-trivial). Zu beachten ist aber, dass das in φ enthaltene Polynom noch von Γ abhängt. α bedeutet in (40) den zur Oszillator-Eigenfunktion $\varphi^{(K)} = \psi$ gehörigen Eigenwert (29).

Kehren wir nun zur Gleichung (38) zurück und denken wir uns dort linkerhand die (gestörte) Funktion $\varphi^{(K)}$ nach den Oszillator-Eigenfunktionen ψ_n entwickelt, so werden wir auf das Eigenwertproblem der Matrix

$$\alpha_n \cdot \delta_{mn} + U_{mn}^{(K)} \quad (41)$$

geführt, wo

$$\begin{aligned} U_{mn}^{(K)} = \int d\eta \psi_m \left\{ -\frac{1}{12} \beta^2 \eta^4 \varphi_n^{(K)} - \frac{K(K+1)}{8} \eta [\varphi_n^{(K+1)} + (\alpha_n - \beta^2 \eta^2) \varphi_n^{(K-1)}] \right. \\ \left. - \frac{K(K^2-1)}{24} [\varphi_n^{(K)} + (\alpha_n - \beta^2 \eta^2) \varphi_n^{(K-2)}] \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

φ_n bedeutet hier die ungestörte Eigenfunktion (35); $\varphi_n^{(K)} = \psi_n$, $\int d\eta \psi_n^2 = 1$. [Die Integration nach η braucht nur über den Bereich erstreckt zu werden, in welchem die Oszillatorfunktion ψ_m merklich von null verschieden ist: $|\eta| \lesssim \beta^{-1/2} \ll 1$; die Kenntnis der Funktion φ_n für grössere $|\eta|$ -Werte ist also hier nicht erforderlich.] Im Integranden in (42) kann man zufolge der Oszillatorgleichung setzen:

$$\psi_m(\alpha_n - \beta^2 \eta^2) = \psi_m(\alpha_n - \alpha_m) - \psi_m''.$$

Im Diagonalelement $U_{nn}^{(K)}$, das hier allein interessiert, verschwindet daher der mit dem Faktor $K(K^2 - 1)$ versehene Term, wie man durch partielle Integration unmittelbar sieht. Für den anderen K -abhängigen Term findet man:

$$\begin{aligned} \int d\eta \cdot \eta [\psi_n \varphi_n^{(K+1)} - \psi_n' \varphi_n^{(K-1)}] &= \int d\eta [2\eta \psi_n \psi_n' + \psi_n' \varphi_n^{(K-1)}] \\ &= \int d\eta \left[\eta \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi_n^2) - \psi_n^2 \right] = -2. \end{aligned}$$

Bei den partiellen Integrationen sind die Γ -abhängigen Polynome herausgefallen. Der von K unabhängige Term in (42) (für $m = n$) entspricht der uns schon bekannten Anharmonizität für $K = 0$ (Mathieu-Gleichung). Somit wird

$$U_{nn}^{(K)} = \frac{K(K+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{8} - \frac{1}{16}. \quad (43)$$

Nach (29) und (41) ist der korrigierte Eigenwert α in erster Näherung:

$$\alpha = \beta(2n+1) + U_{nn}^{(K)};$$

führen wir ihn in (21) ein, so erhalten wir folgende — für $\beta \gg 1$ oder $V \gg \varepsilon$ gültige — Eigenwertformel:

$$\begin{aligned} W_{(n)} = -V + \sqrt{\varepsilon V} (2n+1) + \varepsilon \left[\frac{K(K+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{8} - \frac{17}{16} \right] + \dots; \\ \left. \begin{aligned} n = 0, 2, 4, \dots, \text{ wenn } K \text{ ungerade,} \\ n = 1, 3, 5, \dots, \text{ wenn } K \text{ gerade.} \end{aligned} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Es sei hier daran erinnert, dass die ganzen vorstehenden Rechnungen sich auf Deuteronzustände mit dem Spin $J = 0$ beziehen. Wie eingangs bemerkt, können aber die Quantenzahlen J und K jederzeit vertauscht werden; die Formel (44) gilt also, wenn wir in ihr J anstelle von K schreiben, auch für Zustände beliebigen Spins, sofern deren „isotoper Spin“ $K = 0$ ist (Ladungssingletts).

Unter den betrachteten Eigenwerten — mit $J = 0$ oder $K = 0$ — sind die tiefsten diejenigen mit den Quantenzahlen

$$\left. \begin{aligned} n = 0, J = 0, K = 1 \quad \text{und} \quad n = 0, J = 1, K = 0: \\ W_{(0)} = -V + \sqrt{\varepsilon V} - \frac{9}{16} \varepsilon + \dots \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Wir werden sie (vgl. § 3) den untersten Deuteronzuständen 1S und 3S zuzuordnen haben, was mit dem Pauliprinzip verträglich ist. Von den Eigenwerten $J = K = 0$, die wir schon in I, § 4 betrachteten und die zu P -, F -...-Termen gehören, liegt der tiefste ($n = 1$)

um etwa $2\sqrt{\varepsilon V}$ höher. Bei festgehaltener Oszillationsquantenzahl n ist die K - bzw. J -Abhängigkeit der Eigenwerte W durch die Terme

$$\frac{\varepsilon}{4} K(K+1) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varepsilon}{4} J(J+1)$$

gegeben; die quadratische Abhängigkeit ist eine ganz ähnliche wie in der „Isobaren-Energie“ des einzelnen Nukleons: $\frac{\varepsilon}{2} j(j+1)$.

Die Zuordnung der Eigenwerte (44) zu den für den anderen Grenzfall ($\beta \ll 1$) berechneten Eigenwerten W_s (24) wird durch folgende Verknüpfung der Quantenzahlen n in (44) und s in (24) hergestellt:

$$2s = n + J + K + 1. \quad (46)$$

Dadurch sind nämlich, bei festen Werten von J und K , die tiefsten Eigenwerte (24) und (44) einander zugeordnet, ebenso die zweit-tiefsten Eigenwerte (24) und (44), desgleichen die nächst höheren usw. Eine andere Zuordnung ist nicht möglich, da sich sonst bei Variation des Parameters β verschiedene Eigenwerte mit gleichem J und K überschneiden müssten, was ausgeschlossen ist. —

Zwei Bemerkungen zum Grenzfall $\beta \gg 1$ sind noch nachzutragen. Wie schon hervorgehoben wurde, bestimmt die Oszillator-näherung den Verlauf der Eigenfunktionen φ nur in der Nähe des Punktes $\eta = 0$ ($|\eta| \ll 1$), und ihr Verlauf weiter aussen bleibt noch zu untersuchen. Wegen des ungeraden Charakters von φ genügt es, die eine Hälfte des Periodizitätsintervalls zu betrachten: $0 < \eta < \pi$. Die Oszillator-Eigenfunktionen ψ_n sind (sofern $n \sim 1$) nur für $\eta \lesssim \beta^{-1/2}$ merklich von null verschieden; gehen wir nun in das Gebiet $\beta^{-1/2} \ll \eta \ll 1$, wo zwar die Näherungsformel (35) noch brauchbar, ψ aber schon fast auf null abgeklungen ist, so wird $\psi^{(-K)}$, und damit nach (35) auch φ , asymptotisch gleich einem Polynom $(K-1)$ -ten Grades:

$$\varphi = c_1 \eta^{K-1} + c_2 \eta^{K-2} + \dots \quad \text{für } \beta^{-1/2} \ll \eta \ll 1.$$

Von diesen Termen ist der erste — oder wenn $c_1 = 0$ ist¹⁾, der zweite — gross gegen die weiteren Terme, wie man leicht abschätzt. Wir behaupten nun, dass der weitere Verlauf der Eigenfunktion φ ,

¹⁾ Da das in (35) eingehende ungerade Polynom P_{K-1} von dem frei wählbaren Parameter Γ abhängt, kann man durch Wahl von Γ erreichen, dass entweder $c_1 = 0$ (wenn K gerade) oder $c_2 = 0$ (wenn K ungerade). Diese Wahl von Γ vereinfacht die für das Folgende erforderlichen Abschätzungen. — Für $K=1$ ist natürlich $c_2 \equiv 0$.

wenn man η gegen π anwachsen lässt, durch folgende Formel dargestellt wird:

$$\varphi \cong \cos \frac{\eta}{2} \cdot \left[c_1 \left(2 \sin \frac{\eta}{2} \right)^{K-1} + c_2 \left(2 \sin \frac{\eta}{2} \right)^{K-2} \right] \quad (47)$$

für $\beta^{-1/2} \ll \eta \leq \pi$.

Geht man nämlich mit diesem Ansatz in die (exakte) Bestimmungsgleichung (22) ein, so heben sich dort die mit dem Faktor β^2 versehenen Terme — ohne den I -Term — gerade fort, und die übrigen bleibenden Terme¹⁾ sind klein gegen die einzelnen β^2 -Terme (für $\eta \gg \beta^{-1/2}$). Man wird daher φ als eine Entwicklung (nach β^{-1}) ansetzen können, deren höchste Terme durch (47) gegeben sind. Diese gehen aber auch für $\eta \ll 1$ in $c_1 \eta^{K-1} + c_2 \eta^{K-2}$ über, womit der Anschluss an die Oszillatornäherung hergestellt ist. Für $\eta = \pi$ verschwindet φ (linear), und für $\eta > \pi$ gilt — wegen der Symmetrieeigenschaften (11) — wieder die gleiche Formel (47); der Übergang in den benachbarten Periodizitätsbereich vollzieht sich also in völlig regulärer Weise.

Die zweite Bemerkung betrifft die *Normierung* der Eigenvektoren des Gleichungssystems (3). Bei den Anwendungen in I, § 3 [vgl. (I, 12 und 24)] wurde $\sum_j a_j^2 = 1$ verlangt; nach (5) bedeutet dies:

$$\sum_s \gamma_s b_s^2 = 1. \quad (48)$$

Da γ_s nach (6) für $s < s_0$ verschwindet, kann die Summe in (48) über alle s -Werte (von 1 an) erstreckt werden. Wir setzen gemäss (10)

$$b_s = (-1)^s \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \frac{\sin s\eta}{\sqrt{\pi}} \varphi(\eta) \quad (49)$$

und bilden $\gamma_s b_s$, wobei wir in γ_s (6) $s^2 \sin s\eta$ durch $-\partial^2 \sin s\eta / \partial \eta^2$ ersetzen und die Differentialoperatoren vermöge partieller Integration an φ angreifen lassen:

$$\gamma_s b_s = (-1)^{K+s} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \frac{\sin s\eta}{\sqrt{\pi}} A_K \varphi(\eta), \quad \text{wo} \quad (50)$$

$$A_K = \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{2}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] \cdots \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{K}{2} \right)^2 \right]$$

¹⁾ D. h. $\varphi'' + \alpha \varphi$ und der I -Term; ferner gehören hierher die Beiträge der kleinen ξ -Werte zu den Integralen von 0 bis η in (22) [für $\xi \lesssim \beta^{-1/2}$ ist (47) durch (35) zu ersetzen!].

Aus (49) und (50) folgt, bei Berücksichtigung von (11):

$$\sum_s \gamma_s b_s^2 = (-1)^K \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \varphi \cdot \Delta_K \varphi. \quad (51)$$

Nehmen wir nun wieder $\beta \gg 1$ an, so liefert der Bereich $\beta^{-1/2} \ll \eta \leq \pi$ keinen Beitrag zum Normierungsintegral; denn dort kann φ nach (47) in der Form geschrieben werden:

$$\varphi = \text{Realteil von } \left\{ \lambda_1 e^{\frac{i\eta}{2}} + \lambda_2 e^{i\eta} + \dots + \lambda_K e^{\frac{iK\eta}{2}} \right\},$$

und infolgedessen ist

$$\Delta_K \varphi = 0 \quad \text{für} \quad \beta^{-1/2} \ll |\eta| \leq \pi. \quad (52)$$

Andererseits ist im Oszillationsbereich ($|\eta| \gtrsim \beta^{-1/2}$) Δ_K durch $\partial^{2K}/\partial \eta^{2K}$ ersetzbar; damit vernachlässigt man nur Terme der relativen Ordnung β^{-1} . Daher wird nach (51) und (27):

$$\sum_s \gamma_s b_s^2 = (-1)^K \int d\eta \varphi \varphi^{(2K)} = \int d\eta [\varphi^{(K)}]^2 = \int d\eta \psi^2.$$

Die Normierungsbedingung (48) bedeutet daher, wenn Fehler der Ordnung β^{-1} in Kauf genommen werden, nichts anderes als

$$\int d\eta \psi^2 = 1. \quad (53)$$

In der gleichen Weise kann man auch den Erwartungswert von $s^2 = (j + \frac{1}{2})^2$ berechnen; man findet dafür wieder die Formel (I, 38):

$$\overline{s^2} = \sum_s s^2 \gamma_s b_s^2 = - \int d\eta \psi \psi'' = \beta(n + \frac{1}{2}). \quad (54)$$

§ 3. Diskussion der Ergebnisse.

Das Problem (3), das wir bis jetzt behandelt haben, entspricht dem Deuteron mit festgehaltenen Ortskoordinaten. Wir gehen nun zum eigentlichen Deuteronproblem über, indem wir — gemäß den Ausführungen in I, §§ 2 und 3 — die Energie der Relativbewegung berücksichtigen; und zwar stützen wir uns dabei wieder auf die beiden in I, § 3 entwickelten Näherungsmethoden.

A. Adiabaten-Verfahren.

Bei dieser Methode ist in (3) bzw. (I, 11) V als Funktion des Nukleonabstandes r zu betrachten; dadurch werden die Eigenwerte W Funktionen von r , und diese Funktionen sind die Poten-

tialfunktionen der „adiabatischen“ Näherung. Die tiefstliegende Potentialkurve gehört nach Obigem zu den Quantenzahlen

$$J = 0, K = 1 \quad \text{oder} \quad J = 1, K = 0; \quad n = 0, s = 1:$$

$$W_{(0)}(r) = \begin{cases} -\frac{1}{3} V(r) - \frac{5}{27} \frac{[V(r)]^2}{\varepsilon} + \cdots & \text{für } V(r) \ll \varepsilon, \\ -V(r) + \sqrt{\varepsilon V(r)} - \frac{9}{16} \varepsilon + \cdots & \text{für } V(r) \gg \varepsilon \end{cases} \quad (55)$$

[vgl. (24) mit (8), bzw. (45)]. Nach dem Pauliprinzip (2) [vgl. auch (I, 13)] sind die betreffenden Schrödingerfunktionen *gerade* [$f(-\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$]. Als tiefste Deuteronzustände haben wir daher zwei S -Zustände zu erwarten; dass beide Zustände hier dieselbe Energie erhalten, liegt natürlich an der Vernachlässigung der „Tensorkraft“. Der eine Zustand ($J = 0$) ist ein 1S -Zustand, und zwar ein Ladungstriplett: zu $K = 1$ gehören (vgl. I, § 2) die isotopen Spinkomponenten $N = -1, 0, +1$, d. h. die Ladungen $N + 1 = 0, 1, 2$; wir haben diesen Zustand mit dem (wahrscheinlich instabilen) 1S -Zustand zu identifizieren, der aus der wellenmechanischen Theorie der Neutron-Proton-Streuung und der Proton-Proton-Streuung bekannt ist. Der andere tiefe Zustand ($J = 1$), der mit dem Deuteron-Grundzustand zu identifizieren ist, ist ein 3S -Zustand und ein Ladungssinglett ($K = 0, N = 0$, Ladung $N + 1 = 1$).

Es ist klar, dass man bei einem beliebig vorgegebenen Wert der Isobaren-Konstanten ε die Wechselwirkungsfunktion $V(r)$ so einrichten kann, dass die adiabatische Potentialfunktion (55) für den 3S -Zustand als tiefsten Zustand die richtige Bindungsenergie (≈ 2 MeV) liefert. Man kann daher aus der Erfahrungstatsache allein, dass die untersten Deuteronzustände die oben charakterisierten 3S - und 1S -Zustände sind, noch nicht auf den Wert der Isobaren-Energie schliessen; insbesondere können kleine Werte von ε nicht ausgeschlossen werden. Dagegen hängt die Reihenfolge der nächst höheren Zustände bzw. Potentialkurven sehr wesentlich von ε ab, genauer gesagt vom Verhältnis ε/\bar{V} (vgl. I). Da die Annahme $\varepsilon \gg \bar{V}$ auf die bekannte ältere Theorie zurückführt, beschränken wir uns hier auf die Diskussion des Falles $\varepsilon \ll \bar{V}$.

Wie in I, § 4 definieren wir einen kritischen Abstand r_ε durch $V(r_\varepsilon) = \varepsilon$; im Bereich $r \ll r_\varepsilon$, wo $V(r) \gg \varepsilon$ ist, kann die Formel (44) angewendet werden. Im betrachteten Falle $\varepsilon \ll \bar{V}$ ist r_ε so gross, dass man bei der Berechnung diskreter Energie-Eigenwerte (mit exponentiell abklingenden Schrödingerfunktionen) die Potentialkurven (44) auch für $r \gtrsim r_\varepsilon$ gelten lassen kann; der dabei begangene Fehler kann durch eine Störungsrechnung korrigiert wer-

den. Jedenfalls wird die adiabatische Wechselwirkung im „wesentlichen“ r -Bereich durch (44) beschrieben. In diesem Bereich ist die Reihenfolge der Potentialkurven (44) in erster Linie durch den Term $\sqrt{\varepsilon}\bar{V}(2n+1)$ und erst in zweiter Linie durch den K -abhängigen Term $\sim \varepsilon$ bestimmt. Der tiefsten Kurve $n=0$, $K=1$ folgt daher als nächst höhere die Kurve $n=0$, $K=3$; der Abstand der beiden Kurven ist $\frac{5}{2}\varepsilon$, also von r unabhängig [für $r \ll r_\varepsilon$; bei zunehmendem r steigt der Abstand nach (24) und (46) auf 3ε]. Weiter folgen, ebenfalls in (fast) konstantem Abstand, die Kurven $n=0$, $K=5, 7, \dots$. Wegen der Vertauschbarkeit von J und K gehören zu den gleichen Kurven auch Zustände mit $K=0$, $J=1, 3, 5, \dots$. Da $J+K$ in allen diesen Fällen ungerade ist, sind die betreffenden Schrödingerfunktionen gerade (S -, D -, \dots -Terme). Daher muss sich z. B. der stabile S -Zustand auf allen jenen Potentialkurven wiederholen. Diese S -Zustände sind „isobare Zustände“ des Deuterons, die mit dem Grundzustand eine „homologe Reihe“ bilden. Betrachten wir nur die untersten¹⁾ dieser Deuteron-Isobaren:

$$J=0, K=3 (^1S) \quad \text{und} \quad J=3, K=0 (^7S). \quad (56)$$

Der zum Spin $J=3$ gehörige Septett- S -Zustand ist ein Ladungssinglett und kommt nur mit der Ladung $N+1=1$ vor (Wasserstoff); der 1S -Term dagegen ist ein Ladungsseptett, d. h. er kann Ladungszahlen zwischen -2 und $+4$ besitzen. Die Anregungsenergie dieser isobaren Zustände ist durch den Abstand der Potentialkurven $K=3$ und $K=1$ gegeben, beträgt also $\frac{5}{2}\varepsilon$ [bzw. ein wenig mehr, da der Kurven-Abstand, wie bemerkt, für $r \rightarrow \infty$ etwas zunimmt]; $\frac{5}{2}\varepsilon$ ist gleich $5/3$ der Anregungsenergie der untersten Proton-Isobaren ($\frac{3}{2}\varepsilon$). Da der Deuteron-Grundzustand in Wirklichkeit nur eine recht kleine Bindungsenergie besitzt und seine Stabilität möglicherweise nur der Tensorkraft verdankt, die hier ignoriert wird, können wir allerdings nicht sicher entscheiden, ob die betrachteten Deuteron-Isobaren wirklich als stabil anzusehen sind; ihre Stabilität wird aber sehr begünstigt durch den erwähnten stärkeren Anstieg ihrer Potentialkurven im Aussenbereich ($r \gg r_\varepsilon$). — Auf die Zustände mit $n \geq 1$ brauchen wir hier nicht einzugehen; die unterste dieser Potentialkurven ($n=1$, $J=K=0$) wurde nämlich schon in I, § 4 besprochen, und die höheren Terme dürften vorerst wenig Interesse haben.

¹⁾ Gemeint sind natürlich nur die tiefsten Zustände unter den hier betrachteten mit $J=0$ oder $K=0$; über die anderen Zustände kann erst in einem späteren Teil III berichtet werden.

In I, § 3 wurde gezeigt, dass man die adiabatische Näherung wie in der Molekültheorie als „nullte Näherung“ einer Störungsrechnung verwenden kann. Die Störungsmatrix bestimmt sich durch die in (I, 15) definierten Funktionen $A_{mn}(r)$ und $B_{mn}(r)$. Wir schreiben diese, in Anpassung an die hier verwendete Bezeichnungsweise:

$$A_{mn} = -\frac{2}{M_p} \sum_j a_{j(m)} \frac{\partial a_{j(n)}}{\partial r}, \quad B_{mn} = -\frac{1}{M_p} \sum_j a_{j(m)} \frac{\partial^2 a_{j(n)}}{\partial r^2}; \quad (57)$$

dabei bedeutet $a_{j(n)}$ den zum Eigenwert $W_{(n)}$ gehörigen Eigenvektor des Gleichungssystems (3), der jetzt natürlich r -abhängig ist ($V = V(r)$). Zur Ausrechnung für $r \ll r_\epsilon$ schreiben wir gemäss (5)

$$\sum_j a_{j(m)} \frac{\partial^s a_{j(n)}}{\partial r^s} = \sum_s \gamma_s b_{s(m)} \frac{\partial^s b_{s(n)}}{\partial r^s},$$

wo die s -Summe — wie in (48) — über *alle* positiven s -Werte erstreckt werden kann. Benutzt man die Formeln (49), (50) und (52), so erhält man — durch die gleichen Überlegungen, die zur Normierungsbedingung (53) führten, und mit der gleichen Genauigkeit —:

$$\sum_j a_{j(m)} \frac{\partial^s a_{j(n)}}{\partial r^s} = \int d\eta \, \psi_m \frac{\partial^s \psi_n}{\partial r^s}. \quad (58)$$

Setzt man dies in (57) ein, so kommt man [vgl. auch (53)] genau zu den Formeln (I, 41 und 42) zurück. Die Quantenzahl K bzw. J ist also aus dem Ergebnis herausgefallen. Allerdings bestimmt sie gemäss (32) die Parität der Oszillationsquantenzahlen m, n .

Da hinsichtlich der Grössenordnung der Matrixelemente A_{mn} , B_{mn} und der Abstände der adiabatischen Potentialkurven (für feste Werte von J, K) kein Unterschied gegenüber dem früher behandelten Fall $J = K = 0$ besteht, können die dortigen Folgerungen betreffend den Gültigkeitsbereich der adiabatischen Näherung und die Konvergenz der Störungsrechnung unverändert übernommen werden¹⁾. Wir dürfen also auch hier die Isobaren-Konstante ϵ nicht allzu klein annehmen (nicht unter etwa 20 MeV).

Solange aber die Terme A_{mn} , B_{mn} überhaupt als „kleine Störungen“ gelten können, wird man sie — immer unter der Voraussetzung $\epsilon \ll \bar{V}$ — im Bereich $r \ll r_\epsilon$ durch die Näherungsformeln (I, 42) darstellen können. Vergleichen wir nun Zustände der gleichen

¹⁾ Vgl. (I, 44) und die anschliessende Diskussion. Dort handelte es sich um Zustände des kontinuierlichen Energiespektrums (Streuungsvorgänge); doch macht dies für die Abschätzung der Störungen keinen Unterschied.

Parität von $J + K$ (m, n gerade bzw. ungerade), so sind die Funktionen $A_{mn}(r), B_{mn}(r)$ in dem für die Energieberechnung massgebenden r -Bereich von K bzw. J unabhängig, während die adiabatischen Potentialfunktionen $W_m(r)$ dort nur durch die additiven Konstanten $\varepsilon K(K+1)/4$ bzw. $\varepsilon J(J+1)/4$ von K, J abhängen. Die Gleichungen (I, 18) oder (I, 19 und 20) ergeben daher unmittelbar folgendes Näherungsgesetz für die Energie-Eigenwerte:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\varepsilon}{4} K(K+1) + E'_\alpha & \text{für } J = 0, \\ E &= \frac{\varepsilon}{4} J(J+1) + E'_\alpha & \text{für } K = 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

(E'_α von K bzw. J unabhängig). Was wir oben auf Grund der grössten adiabatischen Näherung schon feststellten, gilt also auch bei störungsmässiger Berücksichtigung der A -, B -Terme: dass es nämlich „homologe Reihen“ von isobaren Zuständen gibt, die sich in ihren Energien nur durch die Terme $\varepsilon K(K+1)/4$ bzw. $\varepsilon J(J+1)/4$ unterscheiden [gleiche Quantenzahl α , d. h. fast gleiche Schrödingerfunktion $f_{n\alpha}(r)$, und gleiche Parität von $J + K$.] Die Energiedifferenzen solcher homologer Zustände sind also durch (59) unmittelbar bestimmt, ohne dass die Störungsrechnung ausgeführt werden muss. Insbesondere ergibt sich so für die Anregungsenergie der Isobaren (56) wieder der Wert $\frac{5}{2}\varepsilon$.

B. Variationsverfahren.

Nach I, § 3 haben wir jetzt im Gleichungssystem (3) V durch den Mittelwert \bar{V} (I, 26) zu ersetzen. Ist dieser gross gegen ε , so werden die betreffenden Eigenwerte \bar{W} ($J = 0$) nach (44):

$$\bar{W}_{(n)} = -\bar{V} + \sqrt{\varepsilon \bar{V}} (2n+1) + \varepsilon \left[\frac{K(K+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{8} - \frac{17}{16} \right] + \dots \quad (60)$$

($n + K$ ungerade).

Da dieser Ausdruck sich von (I, 45) wieder lediglich durch die additive Konstante $\varepsilon K(K+1)/4$ unterscheidet, können die Formeln (I, 46ff.) ohne weiteres übernommen werden, wenn nur die Energien E (I, 47) um $\varepsilon K(K+1)/4$ vergrössert werden. Damit kommen wir abermals zur Aussage (59) zurück. Jetzt ist allerdings der Energieterm E' in (59) durch andere Bestimmungsgleichungen definiert [E' hat die Bedeutung von „ E “ in (I, 47)]; doch lehrt die in I durchgeführte Abschätzung, die mutatis mutandis auch hier gilt [vgl. (I, 48 bis 51) und die anschliessende Fussnote], dass die

Aussagen der beiden Näherungen über die Eigenwerte E' wenigstens qualitativ übereinstimmen.

Nach (54) ist wiederum $\bar{j}^2 \sim \sqrt{\bar{V}/\varepsilon} \gg 1$. Dagegen ist das relative Schwankungsquadrat von j gerade für den Grundzustand und die tiefliegenden isobaren Zustände ($n = 0$) nicht sehr klein, da die betreffenden Eigenvektoren a_j im wesentlichen einer Gauss-Verteilung entsprechen:

$$a_j \cong \text{const} \cdot e^{-\frac{1}{2\beta}(j+\frac{1}{2})^2} \quad (\text{für } n = 0).$$

Trotzdem besteht auch in diesem Falle kein Grund, die Ergebnisse der Variationsmethode („Hartree-Näherung“) anzuzweifeln; insbesondere ist nicht einzusehen, warum diese Methode bei kleinen ε -Werten weniger zuverlässig sein sollte als bei grösseren, wo sie durch die Adiabaten-Näherung bestätigt wird. Daher sollte gerade bei kleinen ε -Werten, wo die Adiabaten-Methode versagt, die Variationsmethode sehr wohl zur Ergänzung dienen können. So ist z. B. anzunehmen, dass die Energiedifferenzen homologer Zustände für $\varepsilon \ll \bar{V}$ allgemein der Näherungsformel (59) entsprechen.

Zürich, Physikal. Institut der Universität.

Wilsonkammer-Untersuchung der Emission leichter positiver Teilchen durch β^- -Strahler

von Hans-Gerhard Heine.

(11. V. 1944.)

I. Einleitung.

Auf Wilsonkammer-Aufnahmen mit einer in der Nebelkammer befindlichen $\text{Th}(\text{B}+\text{C}+\text{C}'')$ -Quelle fanden CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁾ unter etwa 100 von der Quelle ausgehenden Elektronenbahnen eine Spur, welche eine den Elektronenbahnen entgegengesetzte Krümmung aufweist. Solche „positiven“ Spuren sind in annähernd gleicher Häufigkeit später auch bei Verwendung anderer radioaktiver Substanzen gefunden worden; von SKOBELZYN und STEPANOWA²⁾ mit $\text{Ra}(\text{B}+\text{C})$ - und von SIZOO und Mitarbeitern³⁾⁴⁾ mit UX- und ${}_{15}\text{P}^{32}$ -Quellen. Vom Vorzeichen der Krümmung abgesehen, sind die positiven Spuren ihrem Aussehen nach (Tröpfchendichte) auf den Aufnahmen nicht von den „negativen“ Elektronenbahnen zu unterscheiden. Werden die positiven Spuren von Teilchen erzeugt, welche sich von der Quelle fortbewegen, so müssen diese Teilchen positiv geladen sein.

Die von nackten und von mit Absorbern bedeckten β^- -Quellen ausgehenden positiven Spuren sind von den genannten Autoren als Bahnen von *Positronen* betrachtet worden, welche durch Materialisation von kinetischer Energie der β -Strahlen entstanden sind. Paarerzeugung durch γ -Strahlen kann nicht die Ursache für die Entstehung — wenigstens des grössten Teils — dieser Positronen sein; P^{32} z. B. emittiert überhaupt keine Kern- γ -Strahlung. Die auf den Wilsonkammer-Aufnahmen beobachtete relative Häufigkeit der positiven Spuren führt bei dieser Interpretation zu Wirkungsquerschnitten für die (äussere) Paarerzeugung durch Elektronen und zu Paar-Konversionswahrscheinlichkeiten, die 10^4 – 10^6 mal grösser sind, als die auf Grund der Dirac'schen Theorie berechneten.

BRADT⁵⁾ zeigte, ausgehend von eigenen und von in der Literatur beschriebenen Versuchen, dass die auf Grund der Wilsonkammer-Ergebnisse aufgestellte Behauptung einer „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen sicherlich nicht den Tatsachen entspricht. Darüber hinaus wurde von BRADT gezeigt, dass UX

und P^{32} nicht *Positronen* auch nur in annähernd dem Masse, welches der relativen Häufigkeit der positiven Wilsonkammer-Spuren entspricht, aussenden. Werden nämlich diese β -Strahler von hinreichend dicken Absorbern umgeben, so müssten sie, wenn sie wirklich (10^{-3} – 10^{-2}) Positronen pro Zerfall aussenden, zu einer verhältnismässig intensiven Quelle von Annihilationsstrahlung werden. Eine derartige Annihilationsstrahlung ist aber zumindestens beim UX_2 und P^{32} — wie auch beim RaE — nicht vorhanden. Die Annahme, von der bisher die mit der Wilsonkammer arbeitenden, oben genannten Autoren ausgehen, nämlich dass die positiven Spuren Bahnen von Positronen seien, kann also nicht zutreffend sein.

Werden die mit der Wilsonkammer beobachteten positiven Spuren gleichwohl von positiven Teilchen erzeugt, so müssten diese sich natürlich experimentell auch auf andere Weise als nur mit der Wilsonkammer nachweisen lassen. Zu diesem Zweck sind Versuche verschiedenster Art ausgeführt worden. Die Positronen-Emission des $Th(C+C'')$ zum Beispiel wurde von ALICHANOW und Mitarbeitern⁶⁾ mit dem magnetischen β -Spektrographen untersucht. Die von ihnen bestimmte Positronen-Emissionsrate beträgt, in grössenordnungsmässiger Übereinstimmung mit den von BENEDETTI⁷⁾ und SHINOHARA⁸⁾ mit der Trochoidenmethode erhaltenen Resultaten, ca. $2 \cdot 10^{-4} e^+/e^-$; sie ist also von der auf Grund der Dirac'schen Theorie der inneren Paarkonversion der intensiven ThC'' - γ -Strahlung zu erwartenden Grössenordnung. Von BRADT⁹⁾ werden mit drei bezüglich einer ThC'' -Quelle symmetrisch angeordneten β -Zählrohren Dreifachkoinzidenzen (gleichzeitige Emission zweier geladener Teilchen vom radioaktiven Atom, zusammen mit dem Zerfallselektron) registriert. Die sich aus diesen Messungen ergebende Anzahl der pro Zerfall ausgesandten „Paare“ ist von der gleichen Grössenordnung wie die, mit der Wilsonkammer mit einer $Th(B+C+C'')$ -Quelle beobachtete, auf reines ThC'' bezogene, Emissionsrate positiver Spuren.

Die Wilsonkammer-Ergebnisse sind infolge der ausserordentlichen Schwierigkeiten, auf die man bei ihrer Interpretation stösst, angezweifelt worden. Es stellte sich somit die Aufgabe, die von SKOBELZYN und STEPANOWA, SIZOO und anderen erhaltenen Resultate sorgfältig nachzuprüfen. Dabei sollte auch entschieden werden, ob von den Wänden der Wilsonkammer reflektierte Elektronen, gestreute Elektronen usw. nicht doch für die positiven Spuren verantwortlich gemacht werden können. Auch lag es nahe zu untersuchen, ob und in welchem Masse auch von anderen β -Strahlern in der Wilsonkammer positive Spuren ausgehen. Unter diesen Gesichts-

punkten werden die natürlichen β -Strahler UX, Th(B+C+C''), Ac(B+C'') und RaE untersucht.

Es wird noch von Versuchen zum Nachweis der Emission positiver Teilchen durch UX und RaE mit dem magnetischen β -Spektrographen, welche zusammen mit Herrn H. BRADT ausgeführt wurden, berichtet.

II. Apparatur.

Für das vorliegende Problem ist es von grösster Wichtigkeit scharfe und kontrastreiche Aufnahmen von Elektronenbahnen zu erhalten. Mit der im folgenden beschriebenen Konstruktion von Wilsonkammer und Aufnahme-Vorrichtung wird dies in einfacher Weise erreicht.

Nebellammer. Der „idealen“ Wilsonkammer kommt ein in einem glatten Zylinder gleitender, luftdicht abschliessender Kolben sicher am nächsten. Es zeigt sich aber, dass der dafür notwendige konstruktive Aufwand ziemlich gross ist; die hier in Anlehnung an die Arbeit von BLACKETT¹⁰⁾ entwickelte Konstruktion ist wesentlich einfacher.

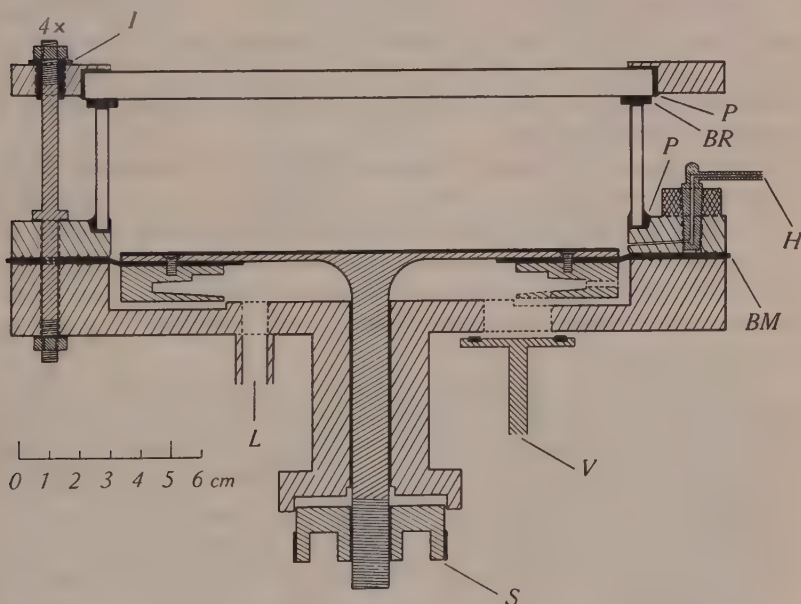


Fig. 1. Wilsonkammer.

<i>I</i> = Isolierte Durchführung	<i>H</i> = Hähne
<i>P</i> = Pizein	<i>L</i> = Pressluft-Zuführung
<i>BR</i> = Buna-Ring	<i>V</i> = Expansionsventil
<i>BM</i> = Buna-Membrane	<i>S</i> = Stellschraube

Die Wilsonkammer, die ganz aus Messing hergestellt ist, ist in Fig. 1 schematisch wiedergegeben. Der *Expansionsraum*, durch Kolben und Membrane luftdicht abgeschlossen, hat einen Durchmesser von 17 cm und eine Tiefe von 5 cm. Er wird mit Stickstoff bis 10 cm Hg Überdruck gefüllt und mit dem Dampf einer 50 prozentigen Äthylalkohol-Wasser-Mischung gesättigt. Zwischen einem dünnen Kupferdrahtkreuz auf der Innenseite der Glasdeckplatte und dem Kolben liegt beständig ein Säuberungsfeld von etwa 20 Volt/cm.

Der *untere* Kammerraum besitzt zwei Öffnungen; die eine wird durch das Expansionsventil für gewöhnlich verschlossen, die andere steht mit einer Pressluftleitung in Verbindung. Der Kolben kann sich nur bis zum Anschlag der Stellschraube, deren feines Gewinde das Expansionsverhältnis beliebig genau zu regulieren erlaubt, nach oben bewegen. Das Expansionsventil wird nach FUSSELL¹¹⁾ von einem Topfmagneten gesteuert. Zwischen zwei Hauptexpansionen erfolgt zur Säuberung der Kammer stets eine langsame Zwischenexpansion, indem die Pressluft durch die Öffnung *L* über ein regulierbares Ausströmventil langsam entweicht.

Die Kolbenplatte ist auf der Oberseite mit schwarzem Samt überzogen. Der auf ihrer Unterseite angeschraubte Ring dient zur luftdichten Verbindung der Membrane mit der Kolbenplatte (Buna hat sich dafür besser als Gummi bewährt) und als breite Aufschlagfläche bei der Expansion.

Um bei der Expansion Strömungen und Wirbelbildung in der Kammer zu vermeiden, werden Abweichungen von der Zylinderfläche (wie dies bei der Kammer von BLACKETT bei der Einführung der Membrane in die Kammerwand der Fall ist), nach Möglichkeit vermieden. Damit sich beim Aufschlagen des Kolbens keine Luft unter der Membrane stauen kann, wird der Kolbenring an mehreren Stellen durchbohrt.

Der Expansionsraum kann durch zwei *Hähne* mit dem Aussenraum verbunden werden. Durch den einen Hahn wird das Füllgas in die Kammer gebracht, während an den anderen ein Manometer angeschlossen ist, dies gestattet jeder Zeit ein bequemes Ablesen des Expansionsverhältnisses. Da von den Hähnen nur eine feine Bohrung in den Expansionsraum führt, entsteht auch hier kein „toter“ Raum, der bei der Expansion eine radiale Strömung hervorrufen könnte.

Wilsonkammer-Automatik. Mit dem Steuergerät*) (Schalt-schema in Fig. 2), das aus drei Kippkreisen aufgebaut ist, wird

*) Das Steuergerät wurde von P. C. GUGELOT als Diplomarbeit entworfen und gebaut.

auf rein elektrischem Wege in einfacher Weise die Wilsonkammer vollautomatisch gesteuert. Im Folgenden sollen die einzelnen Funktionen kurz beschrieben werden.

Fliessen in der Röhre I ein Strom, so wird die Zwischenexpansion (Kontakt 1) eingeschaltet und die negative Spannung vom Gitter der II. Röhre weggenommen (K. 2). Jetzt kann sich der Kondensator der II. Stufe entladen; sobald ein Anodenstrom in der II. Röhre fließt, wird das Gitter der I. Röhre wieder negativ (K. 3)

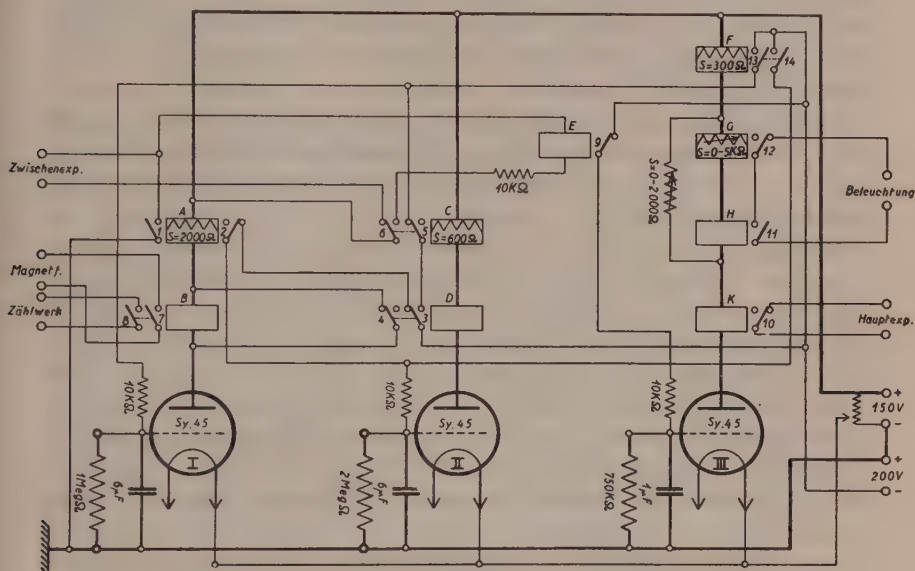


Fig. 2.

Steuergerät für die automatisch arbeitende Wilsonkammer.
(Sämtliche Relais in Ruhestellung gezeichnet.)

und dadurch die Zwischenexpansion wieder abgeschaltet. Relais *B* ist jetzt nicht mehr kurzgeschlossen (K. 4). Einen Moment später spricht Relais *C* an; die Zwischenexpansion kann durch K. 1 nicht mehr eingeschaltet werden (K. 6), dafür dann aber Relais *E*. K. 5 nimmt die negative Vorspannung von der I. Stufe wieder weg und der I. Kondensator kann sich wieder entladen. K. 7 schaltet das Magnetfeld ein, K. 8 ein Zählwerk; etwa drei Sekunden nachher spricht Relais *E* an (K. 1), K. 2 ist jetzt ohne Wirkung. K. 9 schaltet die negative Gitterspannung von der III. Stufe ab und der letzte Kondensator kann sich jetzt entladen. Das Hauptexpansionsventil öffnet sich (K. 10); kurz nachher wird die Beleuchtung eingeschaltet (K. 11) und durch K. 12 etwa $\frac{1}{10}$ Sekunde nachher wieder

abgeschaltet; schliesslich spricht noch Relais *F* an, wodurch die Gitter aller Röhren negativ werden (K. 13 und K. 14) und der Anfangszustand wieder hergestellt wird.

Alle Relais sind 1000 Ohm Telephonrelais; wo grössere Ströme als etwa 0,1 Amp. geschaltet werden müssen, werden noch ein oder mehrere Zwischenrelais eingeschaltet. Die Widerstände, über die sich die Kondensatoren entladen können, sind auswechselbar angebracht; ihre Grösse bestimmt die Zeitdauer, die zwischen den einzelnen Funktionen jeweils vergeht. Mit den variablen Widerständen, die die Relais *G* und *H* shunten, kann die Verzögerung des Einsatzes der Beleuchtung nach der Hauptexpansion und die Belichtungsdauer reguliert werden.

Magnetfeld und Beleuchtung. Zur magnetischen Ablenkung der Elektronen werden wie allgemein üblich zwei Helmholtzspulen benutzt. Da der Magnetstrom (10 Amp. entsprechen 330 Oersted) nur kurzzeitig vor der Expansion eingeschaltet wird, ist auch bei längerem Arbeiten eine Erwärmung der Spulen nicht feststellbar.

Als Lichtquelle grosser Intensität und Flächenhelligkeit hat sich eine offene Quecksilberdampflampe*) gut bewährt. Als Konzentrationslinse dient ein Gefäss, das aus einem Sektor eines dicken Glasrohres und einer Glasplatte zusammengekittet wurde. Durch dieses zirkuliert beständig Wasser, das, zur besseren Absorption der von der Heizspirale der Quecksilberdampflampe ausgehenden Wärmestrahlen, blau angefärbt ist. Durch eine Blende begrenzt, hat das Lichtbündel beim Passieren der Kammer eine Höhe von ca. 1,5 cm.

Aufnahme und Ausmessung der Bahnen. Zur stereoskopischen Aufnahme der Bahnsuren dienen zwei Photoapparate für Kleinbildfilm mit Ross-Objektiven 1 : 1,9 und $f = 9$ cm. Die eine Kamera ist senkrecht über der Mitte der Wilsonkammer angebracht, die andere befindet sich daneben; ihre optische Achse ist um 15° gegenüber der ersten Kamera geneigt. Als Film wird der empfindlichste zur Zeit erhältliche Film: Agfa Isopan Ultra 23⁰/10 Din benutzt.

Die Photoapparate sind so eingerichtet, dass sie auch zur Reproduktion der Aufnahmen verwendet werden können. Der Film wird dazu in die gleiche Lage wie bei der Aufnahme gebracht, von hinten beleuchtet und mit den Aufnahme-Objektiven projiziert. Die Krümmung der Bahnen wird durch einen Vergleich der projizierten Bahnspur mit auf Celluloid gezeichneten Kreisen bestimmt. Dabei werden nur Bahnen von mindestens 3 cm Länge mitgezählt.

*) Näheres siehe: Atlas typischer Nebelkammerbilder, Verl. J. Springer, Berlin 1940.

III. Versuchsanordnungen.

Vorerst seien die von anderen Autoren mit der Wilsonkammer erhaltenen Resultate hier kurz dargestellt. Die Emission positiv geladener Teilchen durch $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$, welches bisher am gründlichsten untersucht worden ist, wird in drei Arbeiten bestimmt. Dabei wird bei SKOBELZYN und STEPANOWA²⁾ die RaBr_2 -Quelle in einem Bleizylinder von 2,5 mm Wandstärke eingeschlossen, der eine Öffnung von 4 mm Durchmesser besitzt und am Rande der Wilsonkammer angebracht wird. DA SILVA¹²⁾ benutzt einen Bleizylinder von 3 mm Wandstärke, der mit zwei diametral gegenüberliegenden Öffnungen versehen ist und in der Mitte der Wilsonkammer befestigt wird. Bei SIZOO und BARENDREGT¹³⁾ ist die Quelle in einer Glaskapillare von 60μ Wandstärke eingeschmolzen, die sich ebenfalls in der Achse der Kammer befindet.

Auf den mit diesen Anordnungen gemachten Aufnahmen wird das Verhältnis der Anzahl N^- der von der Quelle (resp. der Öffnungen im Bleizylinder) ausgehenden Elektronenbahnen zur Zahl N^+ der Spuren, welche eine entgegengesetzte Krümmung aufweisen, bestimmt. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die von diesen Autoren erhaltenen, in guter Übereinstimmung miteinander stehenden Resultaten. Nach der Anzahl der auf den Wilsonkammer-Aufnahmen beobachteten positiven Spuren, ist die Emissionsrate positiver Teilchen etwa $10^{-2} e^+$ pro Zerfall $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$. Die auf Grund der Dirac'schen Theorie von JAEGER und HULME¹⁴⁾ berechnete Zahl der beim $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$ durch Paarkonversion seiner γ -Strahlung erzeugten Positronen beträgt nur $\sim 10^{-4} e^+/e^-$.

Tabelle 1.

$\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$ -Quelle. ($E_{\text{max}} = 3,15 \text{ MeV.}$)

Autoren	Zahl der Aufnahmen	Zahl der e^- -Spuren pro Aufn.	Zahl der positiven Spuren	$\frac{N^+}{N^-} \times 100$
SKOBELZYN und STEPANOWA*)	78	16,4	11	0,9
DA SILVA	49	28,1	19	1,38
SIZOO und BARENDREGT	756	39,9	315	1,03

*) Die Bleizylinderöffnung ist hier mit einer $0,09 \text{ gr/cm}^2$ Celluloidfolie bedeckt.

Die experimentelle Anordnung ist bei allen drei Arbeiten, wie oben beschrieben, etwas verschieden. Würden die positiven Spuren etwa von den an den Wänden der Wilsonkammer reflektierten Elektronen herrühren, so müsste ihre relative Anzahl stark von der geometrischen Lage der Quelle in der Nebelkammer abhängen. Bei den ersten beiden Anordnungen müssten auch die Anfangspunkte der positiven Spuren ungefähr gleichmässig über die ganze Zylinderoberfläche verteilt sein, während sie jedoch tatsächlich von den Öffnungen ausgehen.

Von DA SILVA und SIZOO und BARENDREGT wird auch das Energiespektrum der positiven Ra(B + C)-Spuren angegeben (Fig. 3), welches aus dem mit der Wilsonkammer gemessenen Im-

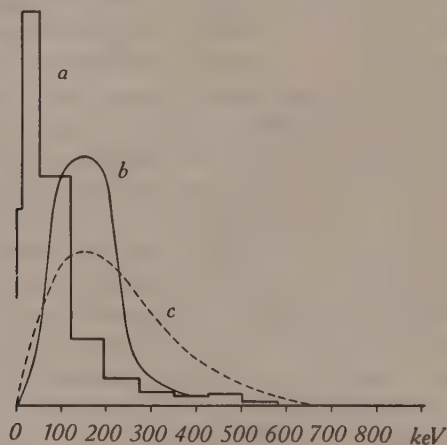


Fig. 3.

Energieverteilung der positiven Spuren einer Ra(B + C)-Quelle:

- a) nach SIZOO und BARENDREGT
- b) nach DA SILVA
- c) RaB-Elektronenspektrum.

pulsspektrum $\left(H \varrho = \frac{p \cdot c}{e}\right)$ für $m = m_0$ (Elektronenmasse) berechnet wird. Die Energie der grossen Mehrzahl der positiven Teilchen ist kleiner als etwa 300 keV; das Energiespektrum der positiven Spuren ist energieärmer, als das (als Vergleichsspektrum mit eingezeichnete) Elektronenspektrum des RaB. (Die Spektren jeder Figur sind jeweils alle flächengleich gezeichnet.)

In scheinbar krassem Gegensatz zu dieser Feststellung stehen die Ergebnisse weiterer von den gleichen Autoren ausgeführter Versuche, bei denen die Ra(B + C)-Quelle von Absorbern umgeben wird, resp. die in den Bleizylindern vorhandenen Öffnungen mit

entsprechenden Filtern bedeckt werden. Dabei wird in vielen Fällen die Dicke des Absorbers so gross gewählt, dass nach Ausweis des gemessenen Spektrums alle direkt von der Quelle emittierten *Positronen* absorbiert werden sollten. Die maximale Energie der positiven Spuren beträgt bei den Messungen von SIZOO und BARENDREGT 0,55 MeV; dieser Energie entspricht eine Positronen-Reichweite von 0,19 gr/cm² Pb. Durch eine Absorberdicke von 0,31 gr/cm² Pb können also keine primären Positronen mehr hindurchgelangen; trotzdem werden in der Wilsonkammer noch positive Spuren beobachtet. Ihre relative Anzahl ist dabei um ein Vielfaches grösser, als die zu erwartende Zahl der durch die γ -Strahlung des Radiums im Absorber erzeugten Positronen. In allen drei Arbeiten werden zahlreiche Versuche mit verschiedenen Absorbermaterialien und mehreren Absorberdicken ausgeführt, deren Resultate alle annähernd miteinander übereinstimmen*).

Von SIZOO und BARENDREGT³⁾ werden mit bedeckten und unbedeckten UX-Quellen ebenfalls positive Spuren beobachtet. UX besitzt eine nur sehr wenig intensive γ -Strahlung mit Energien < 2 mc²; dies macht die Verhältnisse beim UX übersichtlicher als beim Ra(B+C). Deshalb seien hier nur die mit UX-Quellen ausgeführten Absorptionsmessungen angeführt.

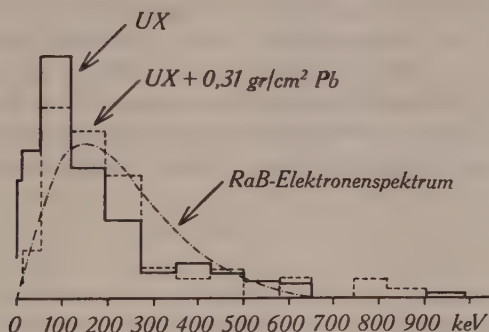


Fig. 4.

Energieverteilung der positiven Spuren einer UX-Quelle ohne und mit Absorber (nach SIZOO und BARENDREGT).

Die Energieverteilung der positiven UX-Spuren ist derjenigen der positiven Ra(B+C)-Spuren sehr ähnlich. In Fig. 4 sind die

*) Von SKOBELZYN und STEPANOWA wird die Energieverteilung von 127 positiven Spuren angegeben, bei denen aber nicht gesagt wird, in welcher Anordnung diese erhalten wurden, und wie gross ihre relative Häufigkeit ist. Das Energiespektrum dieser positiven Spuren ist ebenfalls mit dem RaB-Elektronenspektrum vergleichbar; überdies sind aber noch 11 Spuren mit einer Energie zwischen 600 und 1600 keV vorhanden.

von SIZOO und BARENDREGT erhaltenen Energiespektren der positiven Spuren der unbedeckten und der mit $0,31 \text{ gr/cm}^2 \text{ Pb}$ bedeckten UX-Quelle wiedergegeben, die einander auch sehr ähnlich sind. Die Absorberdicke ist auch hier grösser als die dem Energiespektrum der positiven UX-Spuren entsprechende Reichweite. Nach den von BRADT⁵⁾ ausführlich dargestellten Tatsachen können die hinter den Absorbern beobachteten positiven Spuren nicht von im Absorber erzeugten Positronen herrühren. Dies wird aber gerade von den zitierten, mit der Wilsonkammer arbeitenden Autoren angenommen. Nach SIZOO und BARENDREGT reduziert nämlich der $0,31 \text{ gr/cm}^2 \text{ Pb}$ Absorber die Anzahl der positiven UX-Spuren

Tabelle 2.
UX-Quelle. ($E_{\text{max}} = 2,32 \text{ MeV.}$)

Relative Intensität der Quelle	Absorber $\text{gr/cm}^2 \text{ Pb}$	Zahl der Aufnahmen	Zahl der e^- pro Aufnahmen	Zahl der positiven Spuren	$\frac{N^+}{N^-} \times 100$	Verhältnis von e^+/e^- red. auf Int. 1
1	0	417	24	62	0,6	$0,6 \cdot 10^{-2}$
3,6	0,31	428	(~ 15)	52	($\sim 0,8$)	$0,15 \cdot 10^{-2}$

nur auf den vierten Teil, statt die positiven Spuren überhaupt zum Verschwinden zu bringen (siehe Tab. 2). Dabei ist allerdings bemerkenswert, dass sich die relative Anzahl der positiven Spuren (d.h. das Verhältnis der Zahl der beobachteten positiven Spuren zur Zahl der auf den gleichen Aufnahmen vorhandenen negativen Spuren) von $0,6 \cdot 10^{-2}$ positiven Spuren pro Zerfall UX_2 bei der unbedeckten

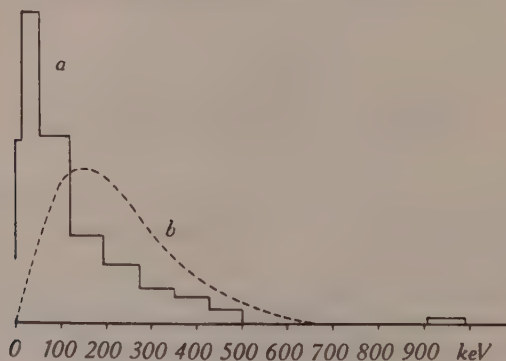


Fig. 5.

- a) Energieverteilung der positiven Spuren einer $^{15}\text{P}^{32}$ -Quelle (nach SIZOO, BARENDREGT und GRIFFIOEN).
b) RaB-Elektronenspektrum.

Quelle auf etwa $0,8 \cdot 10^{-2}$ positive Spuren pro beobachtete Elektronenspur auf den Aufnahmen mit dem Absorber erhöht. Auf diese Tatsache wird von SIZOO und BARENDREGT nicht hingewiesen. Die Zahl der negativen Spuren auf den Aufnahmen mit Absorber wird von ihnen nicht angegeben. Sie wurde durch eigene Wilsonkammer-Aufnahmen mit einer UX-Quelle mit und ohne einen $0,31 \text{ gr/cm}^2 \text{ Pb}$ Absorber bestimmt.

SIZOO, BARENDREGT und GRIFFIOEN⁴⁾ beobachteten auch mit Radiophosphor P^{32} eine Emission von $0,92 \cdot 10^{-2} e^+/e^-$. Das Energiespektrum der positiven P^{32} -Spuren ist den mit Ra(B+C) und UX gemessenen ähnlich (siehe Fig. 3–5). Schliesslich fanden, wie eingangs erwähnt, CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁾ mit Th(B+C+C'') auf 2000 Elektronenspuren 24 positive Spuren d. h. $1,2 \cdot 10^{-2} e^+/e^-$; die Energien dieser positiven Th(B+C+C'') -Spuren werden von ihnen nicht angegeben.

Dies sind die wichtigsten aus Wilsonkammer-Untersuchungen mit innerhalb der Kammer befindlicher Quelle gewonnenen Resultate.

IV. Positive Spuren mit UX-, Th(B + C + C'') - und Ac(B + C'') -Quellen.

Da bisher eine Deutung der positiven Spuren nicht gegeben werden kann, schien wichtiger als die zuletzt beschriebenen Absorptionsversuche fortzusetzen, zu prüfen, ob die positiven Spuren auch wirklich von positiven, aus den β^- -aktiven Präparaten kommenden, Teilchen erzeugt werden.

Das radioaktive Material wird in eine abgeschmolzene Glaskapillare von $20\text{--}40 \mu$ Wandstärke und $0,8 \text{ mm}$ lichter Weite gebracht, die an die Glasdeckplatte geklebt wird. Die Wandstärke der Kapillare ist grösser als die Reichweite der α -Teilchen, die ausser den Elektronen noch von den Präparaten emittiert werden. Die Quellen werden möglichst punktförmig ausgebildet, um die Wahrscheinlichkeit, dass reflektierte Elektronen als aus dem Präparat kommende positive Teilchen erscheinen können, so klein als möglich zu machen. Das von der Kapillare reflektierte Licht lässt die Quelle in der Reproduktion dicker als auf dem Film erscheinen (Fig. 9–10).

Die Intensität der Quelle wird so schwach gewählt, dass im Mittel 5–6 gut ausmessbare Elektronenspuren pro Aufnahme vorhanden sind*). Auf diese Weise ist es möglich jede Bahn einzeln

*) Die gesamte Spurenzahl auf den Aufnahmen der Fig. 9 ist grösser; nicht aber die Zahl der von der Quelle aus über eine Länge von mindestens 3 cm gut sichtbaren, glatt verlaufenden Spuren. Die mittlere Anzahl der auswertbaren Spuren der RaE -Aufnahmen der Fig. 10 beträgt etwa 12 (siehe Seite 288).

gut zu verfolgen, und die Wahrscheinlichkeit, dass infolge Streuungen und Bahnüberschneidungen falsche Schlüsse gezogen werden, ist geringer als bei der von den anderen Autoren verwendeten grösseren Spurenzahl von 20 und mehr Spuren pro Expansion.

1. *UX-Quelle*. Auf 577 Aufnahmen werden 2900 Elektronenbahnen ausgemessen. Dabei sind nur diejenigen Bahnen mitgezählt, die über mehr als 3 cm Länge scharf erscheinen und von der Quelle ab deutlich zu verfolgen sind. An die Elektronenspuren wird also nach Möglichkeit der gleiche kritische Maßstab angelegt, der für die Ausmessung der positiven Spuren angewandt wird. Die Energie der Elektronen wird in Intervallen von je 100 keV bestimmt. Das so erhaltene Energiespektrum stimmt mit dem von LECOIN¹⁵⁾, ebenfalls mit der Wilsonkammer gemessenen, im wesentlichen überein. Verglichen mit dem wahren Elektronenspektrum, wie man es mit dem magnetischen β -Spektrographen (BRADT, HEINE und SCHERRER¹⁶⁾) erhält, fällt das Spektrum bei höheren Energien zu früh ab. Über die auf den Aufnahmen vorhandenen reflektierten Elektronen wird im VI. Abschnitt im Zusammenhang mit den bei den anderen Präparaten gemachten Beobachtungen berichtet.

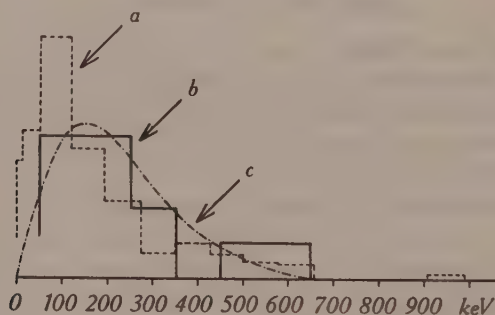


Fig. 6.

Energieverteilung der positiven Spuren einer UX-Quelle:

- a) 62 positive Spuren nach SIZOO und BARENDREGT
- b) 12 positive Spuren nach eigenen Aufnahmen
- c) RaB-Elektronenspektrum.

Auf den mit UX hergestellten Aufnahmen werden insgesamt 12 positive Spuren beobachtet. Ihre relative Anzahl von $\sim 0,4 \cdot 10^{-2} N^+/N^-$ beträgt $\frac{2}{3}$ des von SIZOO und BARENDREGT³⁾ angegebenen Wertes (siehe Tab. 3). Da es hier nur auf die Grössenordnung dieses Verhältnisses ankommt, wurden die Messungen mit UX nicht weiter fortgesetzt. Der genaue Wert von N^+/N^- kann mit der Wilsonkammer ohnehin nicht bestimmt werden: infolge der nicht immer

gleichen Qualität aller Bahnen, auf verschiedenen wie auch auf ein und derselben Aufnahme, kann bei einem Teil der negativen wie der positiven Spuren nicht einheitlich entschieden werden, ob diese mitzuzählen sind oder nicht; ausserdem wird die Absorption im Präparatmaterial und der Glaskapillare nicht berücksichtigt. Das Energiespektrum der positiven UX-Spuren ist zusammen mit dem von SIZOO und BARENDREGT erhaltenen in Fig. 6 aufgetragen. Beide Spektren sind mit dem RaB-Elektronenspektrum vergleichbar.

2. $\text{Th}(B+C+C'')$ -Quelle. Auf Grund des Resultats der von BRADT⁹⁾ mit reinem ThC'' ausgeführten β -Dreifachkoinzidenz-Messungen interessierte es zu wissen, ob die von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁾ angegebenen Ergebnisse bestätigt werden können. Dazu werden mit RaTh, in gleicher Weise wie mit UX, Wilsonkammer-Aufnahmen gemacht, bei denen 10 positive Spuren beobachtet wurden. Das gemessene Spektrum von 3040 Zerfallselektronen stimmt annähernd mit dem von FLAMMERSFELD¹⁷⁾ mit dem β -Spektrographen erhaltenen überein. Von den ThB-Elektronen ist unterhalb etwa 200 keV praktisch nichts zu merken. Die Übereinstimmung, der mit der Wilsonkammer erhaltenen Elektronenspektren mit den mit dem β -Spektrographen gemessenen, spricht für die Zuverlässigkeit der Wilsonkammer-Ergebnisse.

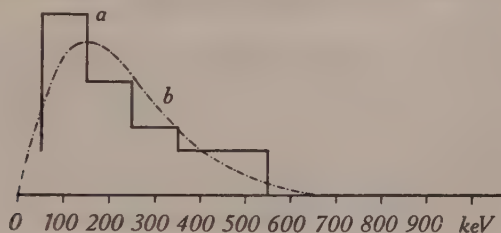


Fig. 7.

- a) Energieverteilung von 10 positiven Spuren einer $\text{Th}(B+C+C'')$ -Quelle
b) RaB-Elektronenspektrum.

Das Energiespektrum der 10 positiven $\text{Th}(B+C+C'')$ -Spuren ist in Fig. 7 aufgetragen. Ein Vergleich mit den Beobachtungen von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI ist nicht möglich, da die Energien der von diesen Autoren beobachteten 24 positiven Spuren nicht mitgeteilt werden. Das sich aus den vorliegenden 551 Aufnahmen ergebende Verhältnis von $0,3 \cdot 10^{-2} e^+/e^-$ ist viermal kleiner, als nach ihren Messungen; ein Unterschied, der nicht allein durch die statistische Schwankung erklärt werden kann (Tab. 3). In Fig. 9 oben sind die beiden Bilder einer Stereoaufnahme wieder-

gegeben, auf der die Spur eines Teilchens mit positiver Krümmung von 500 keV Energie zu sehen ist. Auf dem rechten, mit der schräg stehenden Kamera aufgenommenen, Bild ist die nach links herausragende Quelle deutlich sichtbar.

3. *Ac(B + C'')-Quelle*. Der aktive Actinium-Niederschlag ist bisher noch nicht speziell auf die Emission von positiven Teilchen hin untersucht worden. Da AcB eine Halbwertszeit von nur 36 min hat, muss das Präparat (AcB auf einen 0,5 mm dicken Cu-Draht niedergeschlagen) oft erneuert werden.

Auf 153 Aufnahmen werden 610 negative und 3 positive Spuren ausgemessen (Tab. 3). Das Elektronenspektrum stimmt innerhalb der statistischen Schwankung vollkommen mit dem von LECOIN¹⁵⁾ mit der Wilsonkammer gemessenen überein. Die drei positiven Spuren haben Krümmungen entsprechend Energien von 75, 100 und 150 keV. Diese liegen also in dem gleichen Bereich wie die Energien der positiven Spuren der anderen radioaktiven Substanzen. Da also keine neuen Resultate zu erwarten sind und das häufige Öffnen der Wilsonkammer bei der Erneuerung des Präparates das Arbeiten recht mühsam gestaltet, wird die Untersuchung mit Ac(B+C'') nicht weiter fortgesetzt.

V. Versuche mit RaE.

Das Spektrum der RaE-Zerfallselektronen ist eines der am besten bekannten Elektronenspektren. Seine obere Grenze liegt bei 1170 keV (FLAMMERSFELD¹⁸⁾); überdies besitzt RaE keine Kern- γ -Strahlung (STAHEL und GUILLISSEN¹⁹⁾). Da eine Paarherzeugung durch die schnellen RaE-Elektronen sicherlich nicht in Betracht kommt (nur etwa $\frac{1}{1000}$ aller RaE-Zerfallselektronen haben die für eine Paar-Konversion ausreichende Energie), war es hier von besonderem Interesse zu untersuchen, ob auch vom RaE positive Spuren ausgehen. LECOIN²⁰⁾, der speziell die obere Grenze des RaE-Spektrums mit der Wilsonkammer untersucht, erwähnt ohne nähere Angaben, dass von ihm unter 2000 Elektronenspuren *keine* Positronenspur beobachtet wurde.

Das RaE wird aus einer reinen RaD-Lösung (völlig frei von Radium), aus der das Polonium vorher entfernt wurde, auf Platin elektrolytisch niedergeschlagen. Mit einem Tropfen Salpetersäure abgelöst, wird das RaE auf ein etwa 3μ dickes Glimmerplättchen gebracht, das in der gleichen Anordnung wie bisher als Quelle dient. Auf 1460 Aufnahmen werden über 8000 Elektronenbahnen ausgemessen, deren Energieverteilung mit der von FLAMMERS-

FELD¹⁸⁾ mit dem magnetischen Spektrographen gemessenen gut übereinstimmt.

Auf diesen Aufnahmen befinden sich — wider Erwarten — 17 positive Spuren, bei denen man auf den Stereoaufnahmen eindeutig erkennen kann, dass sie wirklich von der Quelle ausgehen. In Fig. 9 unten sind die Aufnahmen von zwei solchen positiven Spuren, mit der in der Achse der Wilsonkammer befindlichen Kamera aufgenommen, wiedergegeben. Die positive Spur auf der rechten Aufnahme ist diejenige, die von allen die geringste, einer Energie von 400 keV entsprechende Krümmung besitzt. Von den 17 Spuren haben weitere zwei positive Spuren Krümmungen entsprechend Energien von ungefähr 300 keV und 350 keV; die Energiebestimmung ist hier infolge mehrerer Streuungen, die beide Bahnen aufweisen, nicht ganz sicher (Fig. 8). Die Energie der übrigen 14 positiven Spuren ist im Mittel ~ 100 keV, während die mittlere Energie der positiven UX- und Th(B+C+C'')-Spuren bei etwa 200 keV liegt.

Tabelle 3.

Quelle	Obere Grenze des β -Spek- trums in MeV	Zahl der Auf- nahmen	Zahl der e^- pro Aufnahme	Zahl der positiven Spuren	$\frac{N^+}{N^-} \times 100$
Ra(B+C)	3,15	756 ¹³⁾	39,9	315	1,0
¹⁵ P ³²	1,72	318 ⁴⁾	25	73	0,9
UX	2,32	417 ³⁾	24	62	0,6
		577	5,2	12	0,4
Th(B+C+C'')	2,20	135 ¹⁾	15	24	1,2
		551	5,5	10	0,3
Ac(B+C'')	1,47	153	4	3	(0,5)
RaE	1,17	1460	5,5	17	0,2
RaE	1,17	1100 [*])	(12)	56	(0,4)

*) Aufnahmen in (H₂+He) als Füllgas der Wilsonkammer.

Bei der Bestimmung der Energien der positiven RaE-Spuren wird von der gemessenen Krümmung die durch die Vielfachstreuung im Füllgas der Nebelkammer verursachte zusätzliche Krümmung abgezogen. Diese ist, nach WILLIAMS²¹⁾ berechnet, für die Bahnen von Elektronen mit Energien unterhalb von 100 keV mit der von dem verwendeten Magnetfeld von 264 Oersted hervorgerufenen Krümmung vergleichbar; oberhalb von 200 keV macht

diese Korrektur nur noch etwa 10% aus. Da die Mehrfachstreuung im Stickstoff die Energiebestimmung der langsamen Elektronen recht unsicher macht, wurde bei weiteren Aufnahmen die Wilsonkammer anstatt mit Stickstoff mit einem Gemisch von 30% Wasserstoff und 70% Helium gefüllt. In diesem Gemisch ist die Anzahl der Mehrfachstreuungen etwa zehnmal kleiner als im Stickstoff.

Am Ende von Tabelle 3 ist das Resultat der zweiten Serie von Aufnahmen mit RaE in dem (H_2+He)-Gemisch wiedergegeben; das Präparat ist dabei mehr als doppelt so intensiv wie bisher. Die Elektronenbahnen werden auch nicht mehr auf allen, sondern nur noch auf wenigen Bildern einzeln ausgemessen; die mittlere Anzahl der Elektronenspuren wird danach auf etwa 12 pro Aufnahme geschätzt. Auf 1100 Aufnahmen werden 56 positive RaE-Spuren beobachtet. Damit ergibt sich für die Emissionsrate positiver Teilchen ein doppelt so grosser Wert, wie bei der ersten Serie mit N_2 als Kammerfüllung. Bei der zweiten Serie ist die Statistik der positiven RaE-Spuren sehr viel besser; die Zahl der Zerfallselektronen ist wahrscheinlich aber infolge des geringen Ionisationsvermögens der schnellen Elektronen in dem (H_2+He)-Gemisch unterschätzt worden.

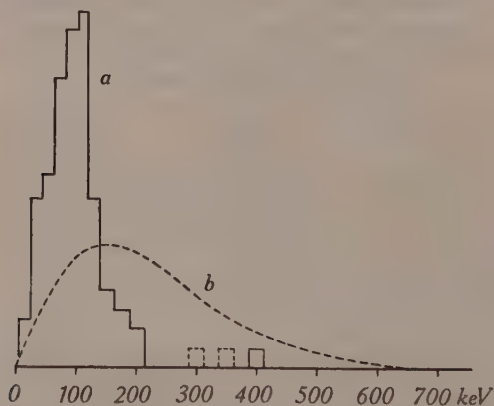


Fig. 8.

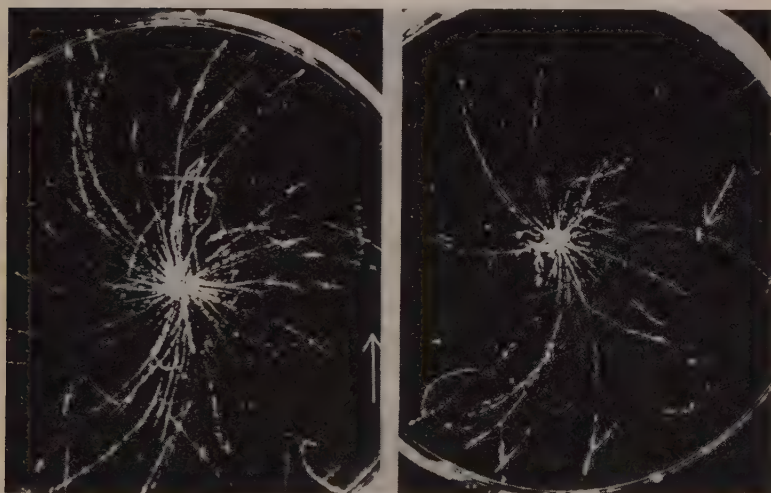
- a) Energieverteilung von 73 positiven Spuren einer RaE-Quelle
 b) RaB-Elektronenspektrum.

Das Energiespektrum der positiven RaE-Spuren ist bei beiden Aufnahme-Serien nach Berücksichtigung der Mehrfachstreuung (nach WILLIAMS²¹) innerhalb der statistischen Schwankung das gleiche. Bei der zweiten Serie haben die schnellsten positiven Teilchen eine Energie von 200 keV. In Fig. 8 ist das Energiespektrum aller in den beiden Serien beobachteten positiven RaE-Spuren auf-

Wilsonkammer-Aufnahmen mit Stickstoff als Füllgas.



Stereoaufnahme mit einer $\text{Th}(\text{B} + \text{C} + \text{C}'')$ -Quelle e^+ : 500 keV.



RaE-Quelle e^+ : 100 keV.

RaE-Quelle e^+ : 400 keV.

Fig. 9.

getragen. Dieses Spektrum erstreckt sich sicher mindestens bis 250 keV, wie dies allein schon aus seinem Abfall nach höheren Energien hin ersichtlich ist.

In Fig. 10 sind vier Bilder der mit (H_2+He) gemachten Aufnahmen wiedergegeben. (Der dicke Strich auf allen Bildern rührt von dem Streulicht eines 0,03 mm dicken Cu-Drahts her, der für das Säuberungsfeld notwendig ist.) Auf den drei ersten Bildern sind drei charakteristische Vertreter der positiven RaE-Spuren zu erkennen. Das positive Teilchen auf der vierten Aufnahme erleidet mehrere unelastische Streuungen. Seine Bahn hat eine Anfangskrümmung, der eine Energie von 175 keV entspricht; nach der ersten Streuung entspricht der Bahnkrümmung nur noch eine Energie von 60 keV.*) Beide Bahnstücke sind gut kreisförmig. Nach der dritten Streuung beträgt die Energie des Teilchens nur noch wenige keV; die Bahn zeigt jetzt keine einheitliche Krümmung mehr, die Krümmungsrichtung bleibt aber stets dieselbe. Aus dem Verlauf dieser Bahn ist also eindeutig die Bewegungsrichtung des Teilchens, welches die positive Spur erzeugt hat, zu erkennen. Es kann in diesem Fall kein Zweifel bestehen: das Teilchen muss aus der Quelle kommen und positiv geladen sein.

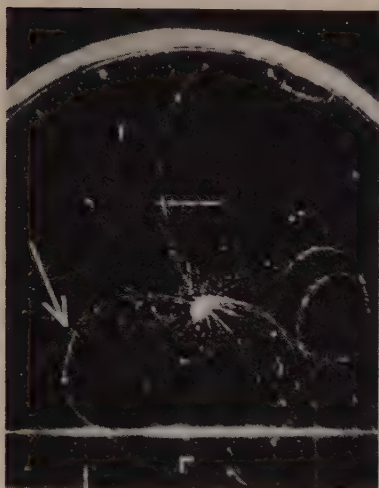
VI. Diskussion der mit der Wilsonkammer erhaltenen Resultate.

Die vorliegenden Aufnahmen bestätigen also im wesentlichen das von anderen Autoren beobachtete Auftreten positiver Spuren mit UX- und $Th(B+C+C'')$ -Quellen und zeigen darüber hinaus, dass auch mit $Ac(B+C'')$ - und sogar mit RaE-Quellen solche positive Spuren zu finden sind. An Hand der gemachten Aufnahmen wird auf zwei verschiedene Weisen abzuschätzen versucht, in welchem Masse die reflektierten Elektronen positive Spuren vortäuschen können.

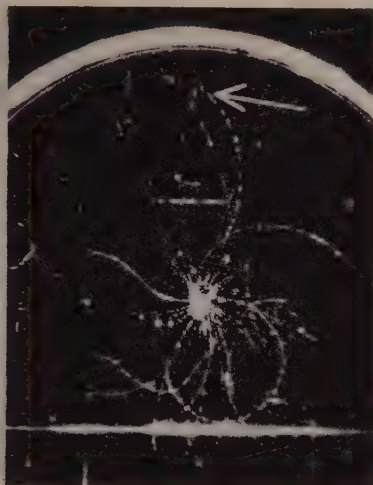
1. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spur eines von den Wänden der Wilsonkammer reflektierten Elektrons auf dem Film durch die Quelle zu gehen scheint, ist bei der Annahme einer isotropen Verteilung der reflektierten Elektronen von der Grösse des Verhältnisses von Präparatfleck-Durchmesser zum Durchmesser der Wilsonkammer und beträgt etwa $1/50$. Auf den mit der $Th(B+C+C'')$ -Quelle gemachten Aufnahmen werden alle diejenigen reflektierten Elektronen gezählt, die bei geeigneter Anfangsrichtung eine Chance hätten, durch die Quelle zu gehen. Da auf den 551 Aufnahmen zusammen 70 solche Elektronenbahnen zu finden sind, folgt daraus,

*) Dieses Bahnstück, das senkrecht zu dem gezeichneten Pfeil verläuft ist nur auf dem Originalfilm gut sichtbar. Auf der Reproduktion ist das in einer Schleife auslaufende Bahnende noch deutlich zu erkennen.

Wilsonkammer-Aufnahmen mit ($\text{H}_2 + \text{He}$) als Füllgas: RaE-Quelle.



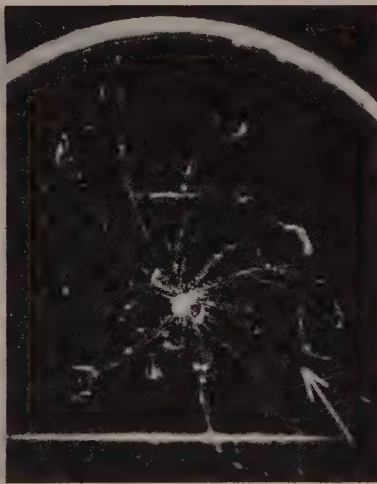
e^+ : 60 keV.



e^+ : 125 keV.



e^+ : 150 keV.



e^+ : 175 keV.

Fig. 10.

dass auf allen Aufnahmen wahrscheinlich nur die Spur *eines* reflektierten Elektrons so nahe an der Quelle vorbei gehen wird, dass sie nicht mehr von der Spur eines aus der Quelle kommenden positiven Teilchens zu unterscheiden ist. Nach dieser Abschätzung können also höchstens 10–20% aller positiven Spuren als durch reflektierte Elektronen vorgetäuscht erklärt werden.

2. Bei der zweiten Serie der mit RaE gemachten Aufnahmen, auf denen die grösste Spurenzahl pro Expansion vorhanden ist, werden bei der Auswertung der Aufnahmen auf dem Projektionschirm kleine Kreisflächen von der Grösse des Präparatflecks markiert. Solche Kreise werden an verschiedenen Stellen des Bildes und in verschiedenen Abständen vom Präparat festgelegt. Es werden nun alle durch diese fiktiven Quellen gehenden reflektierten Elektronen gezählt. Ihre Zahl ist für jede Kreisfläche ungefähr die gleiche; im Mittel 18 auf den 1100 Aufnahmen. Etwa die Hälfte dieser Bahnen wäre auch dann wahrscheinlich noch als von reflektierten Elektronen herrührend erkannt worden, wenn die fiktive Quelle das Präparat selber gewesen wäre. Da die Zahl der von der Quelle kommenden positiven Spuren 56 beträgt, kommt man so zu dem gleichen Ergebnis wie bei der ersten Abschätzung: von allen positiven Spuren sind maximal etwa 20% auf reflektierte Elektronen zurückzuführen. Eine andere Möglichkeit, die positiven Wilsonkammer-Spuren als Bahnen negativer Elektronen zu deuten, ist nicht zu sehen*).

Wie schon in der Einleitung (siehe auch als zusammenfassende Darstellung des Problems der Emission leichter positiver Teilchen durch β -Strahler den Bericht von BRADT, HEINE und SCHERRER²²⁾) erwähnt, können die *positiven Spuren nicht als Bahnen von Positronen* betrachtet werden. Dies ist auch aus der Tatsache ersichtlich, dass sich das Spektrum der positiven RaE-Spuren bis zu Energiewerten von mindestens 250 keV erstreckt. Da RaE keine Kern- γ -Strahlung emittiert, ist die ganze zur Verfügung stehende Energie gleich der maximalen Energie der RaE-Zerfallselektronen, nämlich 1,17 MeV. Für die kinetische Energie eines Elektron-Positron-Paares verbleiben so nur noch maximal $1,17 - 1,02 \text{ MeV} = 150 \text{ keV}$,

*) Bei dem verwendeten Magnetfeld von 330 Oersted (resp. 264 Oersted beim RaE) haben Elektronen mit Energien bis zu 150 keV resp. 100 keV die Möglichkeit zur Quelle zurückzukehren, wenn ihre Bahn ziemlich kreisförmig verläuft. Solche Bahnen sind vor allem bei den mit RaE im ($\text{H}_2 + \text{He}$) gemachten Aufnahmen auch beobachtet worden. Es ist selbstverständlich, dass solche Bahnen *nicht* als positive Spuren angesehen werden. Verläuft aber nur der Anfang und das Ende einer solchen Bahn im beleuchteten Teil der Wilsonkammer, so erscheint der zur Quelle zurückkehrende Teil der Bahn als Spur eines „reflektierten Elektrons“.

d. h. mindestens 100 keV weniger als die beobachtete Grenzenergie der positiven RaE-Spuren.

Die Tröpfchenzahl längs der positiven Spuren einzeln auszu zählen, erwies sich als undurchführbar.

Die Aufstellung einer Impuls-Reichweite Beziehung sollte bei den positiven RaE-Spuren, deren Spektrum besonders energiearm ist, am ehesten möglich sein. Bei den Aufnahmen mit N_2 als Füllgas ist aber bei kleinen Energien der Krümmungsradius infolge der vielen Streuungen nicht sicher zu bestimmen. Zwar kann bei der (H_2+He) -Füllung die Krümmung der Bahnen gut bestimmt werden, dafür ist aber die Reichweite der positiven Teilchen etwa fünfmal grösser, so dass zu selten eine positive Spur bis zu ihrem Ende verfolgt werden kann. Die Aufnahmen reichen also nicht aus, um etwas über Reichweite und Ionisationsvermögen der Teilchen aussagen zu können.

VII. Messungen mit dem magnetischen β -Spektrographen.

Die Emission von einigen positiven Teilchen pro 1000 negative Zerfallselektronen sollte mit dem magnetischen β -Spektrographen gut nachweisbar sein. Mit dem früher beschriebenen Spektrographen (BRADT, HEINE UND SCHERRER¹⁶) ist es möglich, gleichzeitig positive wie negative Teilchen mit je zwei in Koinzidenz geschalteten Zählrohrpaaren nachzuweisen.

Um jeweils einen *breiten* Spektralbereich zu erfassen, wird zunächst folgende Abänderung getroffen. An die Stelle des die Koinzidenz-Zählrohre enthaltenden Kästchens wird *ein* grösseres Zählrohr von 5 cm Länge und 3 cm Durchmesser eingesetzt, welches ein der Blendenebene paralleles Fenster von $14 \times 23 \text{ mm}^2$ besitzt. Dieses wird mit einer, zwischen zwei in gleicher Weise ganz mit Löchern versehenen ebenen Messingplättchen eingespannten 8μ -Aluminium-Folie abgeschlossen. Die Blende vor dem Zählrohrfenster wird entfernt und der Spalt vor dem Präparat auf 8 mm erweitert.

In Fig. 11 ist die mit einer UX-Quelle mit dem eben beschriebenen Zählrohr registrierte Zahl der negativen Zerfallselektronen in Funktion der magnetischen Feldstärke wiedergegeben. Das Maximum dieses „Spektrums“ entspricht einer Stosszahl von 220 000/min. Da eine so grosse Anzahl Stösse nicht direkt gemessen werden konnte, wurde dieses Spektrum mit Hilfe einer 47mal schwächeren UX-Quelle bestimmt.

Die nach dem Umpolen des Magnetfeldes gemessene Teilchenzahl ist in Fig. 11 in einem 1000mal grösseren MaBstab aufgetragen; dabei ist der von der Höhen- und γ -Strahlung bewirkte Nulleffekt (bestimmt bei hohen magnetischen Feldstärken) schon abgezogen.

Diese Zählrohrentladungen werden offenbar — zumindestens teilweise — von den bei kleinen magnetischen Feldstärken noch mitgezählten gestreuten Elektronen bewirkt. Aber selbst wenn sie von positiven Teilchen herrührten, so entspräche ihrer relativen Häufigkeit nur eine Emissionsrate von höchstens etwa $3 \cdot 10^{-4} e^+/\text{Zerfall}^*$.

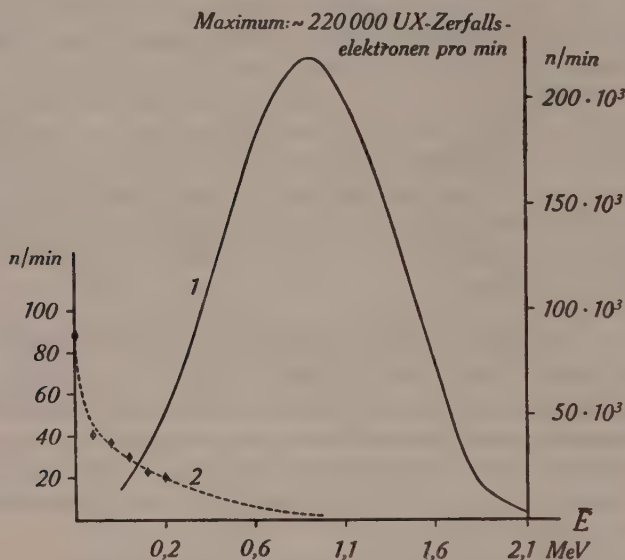


Fig. 11.

- 1) pro Minute mit Zählrohr von grosser Eintrittsöffnung im magnetischen β -Spektrographen registrierte Zahl der UX_2 -Zerfallselektronen.
- 2) Anzahl der Stösse nach Umpolen des Magnetfeldes. (Maßstabunterschied von 10^3 zwischen 1) und 2).)

Eine schärfere Abschätzung der Emissionsrate positiver Teilchen ergibt sich aus einer zweiten mit einer intensiveren UX-Quelle ausgeführten Messung, bei der — wie bei der Ausmessung der Linien im UX_2 -Spektrum (BRADT, HEINE und SCHERRER¹⁶) — Koinzidenz-Zählrohre verwendet werden. Vor das die beiden Zählrohre enthaltende Kästchen kommt jetzt eine Blende mit einem 3 mm breiten Spalt und vor das Präparat ein Mittelspalt von 5 mm. Das im Spektrographen fixierte UX-Präparat (1 kg Uran äquivalent) wird in gleicher Weise wie früher hergestellt. Die Zahl der Zählrohr-Koinzidenzen beträgt im Maximum des UX_2 -Spektrums 15000 Koinz./min, im Energiebereich von 100–300 keV im Mittel

*) Dabei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Nachweiswahrscheinlichkeit dieser positiven Teilchen im magnetischen β -Spektrographen nicht kleiner ist, als diejenige für Elektronen.

etwa 2000 Koinz./min. Nach den Wilsonkammer-Ergebnissen sollten also in diesem Energiebereich zirka 50 positive Teilchen pro Minute registriert werden; das ist ein Vielfaches des Koinzidenz-Nulleffektes von 4 Koinz./min.

Die Messung wird so ausgeführt, dass abwechselnd 10 Minuten lang der „Strahlengang“ für die positiven Teilchen freigegeben und dann wieder von dem schwenkbaren Schirm versperrt nur der Nulleffekt gemessen wird. Im Energiebereich von 100–300 keV wird dies für verschiedene magnetische Feldstärken wiederholt. Ein systematischer Unterschied zwischen der Stosszahl bei offenem und verschlossenem Weg war nicht feststellbar. Daraus ergibt sich, bei Verwendung des mit der Wilsonkammer für die positiven UX-Spuren erhaltenen Energiespektrums (Fig. 4) und unter Berücksichtigung des mit wachsendem ($H\varrho$) abnehmenden Auflösungsvermögens des β -Spektrographen, für die Emissionsrate positiver Teilchen durch UX_2 die Abschätzung:

$$\underline{e^+ < 1 \cdot 10^{-4} \text{ pro Zerfall } UX_2}$$

Mit einer ungefähr gleich intensiven *RaE-Quelle* wird dieselbe Messung wiederholt. Auch hier ist von einer Emission positiv geladener Teilchen nichts zu bemerken. Da das mit der Wilsonkammer erhaltene Energiespektrum der positiven RaE-Spuren (Fig. 8) extrem weich ist, ist die auf Grund dieses negativen Ergebnisses zu berechnende obere Grenze der Emissionsrate ($\sim 3 \cdot 10^{-4} e^+/\text{Zerfall}$) mit sehr grosser Unsicherheit behaftet. Das Ergebnis ist jedenfalls mit einer Emission von mehr als $10^{-3} e^+$ pro Zerfall RaE nicht verträglich.

ALICHANOW und Mitarbeiter⁶⁾ fanden mit dem magnetischen β -Spektrographen auch mit *RaC* und *Th(C+C')* keine Emission positiver Teilchen von der nach den Wilsonkammer-Ergebnissen zu erwartenden Grössenordnung. Die von ihnen gemessene Positronen-Emissionsrate von $(2-4) \cdot 10^{-4} e^+$ pro Zerfall ist von der Grössenordnung der für die γ -Strahlung dieser Quellen zu erwartenden Paarkonversionswahrscheinlichkeit.

Die Ergebnisse der mit dem magnetischen β -Spektrographen ausgeführten Messungen, die für die β -Strahler eine grössere Emissionsrate positiver geladener Teilchen als einige $10^{-4} e^+$ pro Zerfall ausschliessen, lassen also eine mit allen Beobachtungen verträgliche Interpretation der Wilsonkammer-Spuren positiver Krümmung vorläufig nicht erkennen. Um zu einer Deutung der von BRADT⁹⁾ beobachteten *ThC'*-Dreifach-Koinzidenzen zu gelangen, sollen bei weiteren Versuchen die die Zählrohr-Koinzidenzen auslösenden Teilchen in der Wilsonkammer sichtbar gemacht werden.

VIII. Zusammenfassung.

Die Emission positiv geladener Teilchen durch β^- -Strahler wird mittels Wilsonkammer-Aufnahmen kritisch untersucht. (Um übersichtliche Bilder zu erhalten, werden schwache und sehr wenig ausgedehnte Quellen verwendet; mit Stereoaufnahmen wird entschieden, welche Bahnen von der Quelle ausgehen und welche nicht.) Spuren positiver Krümmung, die von den Quellen ausgehen, werden mit UX-, Th(B+C+C'')-, Ac(B+C'')- und RaE-Quellen beobachtet. Mit UX-Quellen ist ihre relative Häufigkeit $\sim 0,4 \cdot 10^{-2} e^+/e^-$; das ist etwa $\frac{2}{3}$ des von Sizoo und Barendregt gefundenen Wertes. Mit Th(B+C+C'') werden $\sim 0,3 \cdot 10^{-2} e^+/e^-$ beobachtet; das ist nur etwa $\frac{1}{4}$ des von Chadwick, Blackett und Occhialini angegebenen Verhältnisses. Bei beiden Substanzen ist die (H ϱ)-Verteilung der positiven Spuren mit derjenigen der RaB-Zerfallselektronen vergleichbar.

Mit RaE, das eingehender untersucht wird, werden auf 2560 Aufnahmen 73 positive Spuren beobachtet; dies entspricht einer Emissionsrate von ungefähr $0,3 \cdot 10^{-2} e^+/e^-$. Die wahrscheinliche Anzahl der durch reflektierte resp. gestreute Elektronen vorge-tauschten positiven Spuren wird abgeschätzt: sie beträgt höchstens 20% der beobachteten Zahl der positiven Spuren.

Die obere Grenze des aus dem gemessenen (H ϱ)-Spektrum der positiven RaE-Spuren berechneten Energiespektrums liegt oberhalb von 250 keV. Diese Beobachtung ist unvereinbar mit der Annahme, dass es sich bei den die positiven Spuren erzeugenden Teilchen um durch Paarerzeugung entstandene Positronen handelt.

Mit dem magnetischen β -Spektrographen konnte eine Emission positiv geladener Teilchen durch UX₂ und RaE nicht nachgewiesen werden. Nach diesen Messungen ist die Emissionswahrscheinlichkeit positiv geladener Teilchen beim UX₂ sicher kleiner als $10^{-4} e^+$ pro Zerfall.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Scherrer bin ich für seine wertvolle Unterstützung und sein stets förderndes Interesse an dieser Arbeit zu grösstem Dank verpflichtet. Dem Jubiläumsfonds der E.T.H. danke ich für die Überlassung von Mitteln, welche die notwendigen Anschaffungen ermöglichten.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literaturverzeichnis.

- 1) CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI, Proc. Roy. Soc. **144**, 235, 1934.
 - 2) SKOBELZYN und STEPANOWA, Journ. de Phys. **6**, 1, 1935.
 - 3) BARENDREGT und SIZOO, Physica **7**, 490, 1940.
 - 4) BARENDREGT, GRIFFION und SIZOO, Physica **7**, 860, 1940.
 - 5) BRADT, Helv. Phys. Acta **17**, 59, 1944.
 - 6) ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW, Journ. de phys. **7**, 163, 1936.
 - 7) BENEDETTI, Journ. de phys. **7**, 205, 1936.
 - 8) SHINOHARA, Scient. Papers of the Inst. of phys. and chem. Res. Tokyo **31**, 174, 1937.
 - 9) BRADT, Helv. Phys. Acta erscheint demnächst.
 - 10) BLACKETT, Proc. Roy. Soc. **146**, 281, 1934.
 - 11) FUSSELL, Rev. sci. Instr. **10**, 321, 1939.
 - 12) DA SILVA, Ann. de phys. **11/12**, 504, 1939.
 - 13) SIZOO und BARENDREGT, Physica **6**, 1085, 1939.
 - 14) JAEGER und HULME, Proc. Roy. Soc. **148**, 708, 1935.
 - 15) LECOIN, Journ. de phys. **9**, 81, 1938.
 - 16) BRADT, HEINE und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 455, 1943.
 - 17) FLAMMERSFELD, Ztschr. f. Phys. **114**, 227, 1939.
 - 18) FLAMMERSFELD, Ztschr. f. Phys. **112**, 727, 1939.
 - 19) STAHEL und GULLISSEN, Journ. de phys. **1**, 12, 1940.
 - 20) LECOIN, Comptes Rendus **197**, 405, 1933.
 - 21) WILLIAMS, Phys. Rev. **58**, 292, 1940.
 - 22) BRADT, HEINE und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 491, 1943.
-

Der inverse Piezoeffekt des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4

von A. von Arx und W. Bantle.

(14. VI. 1944.)

Zusammenfassung. Der inverse Piezoeffekt an KH_2PO_4 wird im Temperaturbereich $100^\circ\text{—}300^\circ\text{K}$ untersucht. Oberhalb des seignette-elektrischen Curiepunktes ($\Theta = 122,90^\circ\text{K}$) erweist sich der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und der durch dieses hervorgerufenen Deformation als nahezu linear. Der lineare Piezomodul d_{36} steigt von $7 \cdot 10^{-8}$ cgs bei Zimmertemperatur ungefähr hyperbolisch an bis auf $5 \cdot 10^{-4}$ cgs für Curietemperatur und stimmt mit den aus dem direkten Piezoeffekt erhaltenen Werten überein. Im Curiegebiet ($T < \Theta$) treten zwischen elektrischem Feld und Deformation Hysteresiserscheinungen auf, die sich vollständig auf das anomale dielektrische Verhalten des Kristalls zurückführen lassen. Es wird gezeigt, dass Deformation und elektrische Polarisierung im *ganzen* untersuchten Temperaturbereich in nahezu temperaturunabhängiger Weise linear gekoppelt sind. Der Kopplungsparameter geht ohne jede Unstetigkeit über die Curietemperatur hinweg.

Der thermische lineare Ausdehnungskoeffizient α_I hat den Wert $2,2 \cdot 10^{-5}$ für Temperaturen $T > \Theta$. Im Curiegebiet verläuft die thermische Deformation anomal.

I. Direkter und inverser Piezoeffekt.

Ein piezoelektrischer Kristall ist ein System, dessen Zustand durch die 5 Variablen absolute Temperatur T , elektrische Feldstärke E , elektrische Polarisierung P , äussere mechanische Spannung X und elastische Deformation x charakterisiert ist. Da diese 5 Grössen die beiden Gleichungen (2) und (3) befriedigen, reduziert sich die Zahl der unabhängigen Zustandsvariablen auf 3. Wir wählen als unabhängige Variablen (T, E, X), da diese Grössen bei den Experimenten im Gegensatz zu P und x leicht und unabhängig voneinander variiert werden können. Aus der diesem Variablensystem adäquaten thermodynamischen Potentialfunktion

$$G = U - TS + \sum_1^6 X_h x_h = G(T, E, X) \quad (1)$$

berechnen sich Polarisierung und Deformation durch partielle Differentiation:

$$P_k = - \frac{\partial G}{\partial E_k} \quad k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$x_h = \frac{\partial G}{\partial X_h} \quad h = 1 \dots 6 \quad (3)$$

Wir setzen für G eine Potenzreihe an, die nur Glieder bis zur zweiten Ordnung in E_i und X_i enthalten soll. Daraus

$$P_k = F_k(T) + \sum_1^3 \kappa_{ik}(T) E_i - \sum_1^6 d_{ki}(T) X_i \quad k = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$x_h = A_h(T) + \sum_1^3 d_{ih}(T) E_i - \sum_1^6 s_{ih}(T) X_i \quad h = 1 \dots 6 \quad (5)$$

wobei $s_{ih} = s_{hi}$ und $\kappa_{ih} = \kappa_{hi}$. Die Mannigfaltigkeit der in (4) und (5) auftretenden Koeffizienten (21 isotherme Elastizitätsmoduln s_{ih} , 6 Konstanten der dielektrischen Suszeptibilität κ_{ih} , 18 piezoelektrische Moduln d_{ih} , 6 Funktionen A_h der thermischen Ausdehnung und 3 Funktionen F_k der Pyroelektrizität), wird bei den meisten Kristallklassen aus Symmetriegründen stark reduziert.

Um nun die piezoelektrischen Moduln d_{ih} experimentell zu bestimmen, kommen im wesentlichen folgende beiden Methoden in Frage:

1. *Direkter Piezoeffekt*: Man setze die elektrische Feldstärke $E_1 = E_2 = E_3 = 0$, übe auf den Kristall eine mechanische Spannung X_h aus und messe die dadurch erzeugte Polarisation P_i . Nach (4) berechnet sich daraus der piezoelektrische Modul d_{ih} zu

$$d_{ih} = -\frac{X_h}{P_i} \quad (6)$$

2. *Inverser Piezoeffekt*: Man setze $X_1 = \dots = X_6 = 0$, lege an den Kristall ein elektrisches Feld E_i und messe die dadurch hervorgerufene Deformation x_h . Aus (5) folgt

$$d_{ih} = \frac{x_h}{E_i} \quad (7)$$

II. Problemstellung und Messmethode.

Der seignette-elektrische Kristall KH_2PO_4 gehört der tetragonal hemiedrischen Kristallklasse D_{2d} an, hat also nach VOIGT¹⁾ folgendes Schema der piezoelektrischen Moduln

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{array} \quad (8)$$

Über den direkten Piezoeffekt an KH_2PO_4 liegen Messungen von SPITZER²⁾, LÜDY³⁾ und BANTLE und CAFLISCH⁴⁾ vor. Da der Modul d_{14} keinen anomalen Temperaturgang zeigt und relativ klein

ist ($3 \cdot 10^{-8}$ cgs), befassen wir uns im folgenden nur mit dem Modul d_{36} . BANTLE und CAFLISCH, die in ihrer Apparatur den Kristall Druck-, nicht aber Zug-Belastungen aussetzen konnten, fanden von Zimmertemperatur bis zum Curiepunkt $\Theta = 123^\circ \text{K}$ Linearität zwischen mechanischer Spannung X_6 und elektrischer Polarisierung P_3 . In diesem Temperaturbereich ist also der durch (6) definierte piezoelektrische Modul d_{36} eine druckunabhängige Temperaturfunktion, die vom Wert $6 \cdot 10^{-7}$ cgs bei Zimmertemperatur bis auf $6 \cdot 10^{-4}$ cgs für die Curietemperatur steigt. Im Curiegebiet ist der Zusammenhang zwischen X_6 und P_3 nicht mehr linear, sondern zeigt Sättigungscharakter. Ausserdem sind die Kurven $P_3(X_6)$ nicht reproduzierbar, falls zwischen den Messungen der Kristall über die Curietemperatur erwärmt worden war. Die Autoren erklären diese Erscheinungen durch die Annahme, dass die Funktion $P_3(X_6)$ die Gestalt einer Hysteresisschleife habe und dass die Remanenz des Kristalls nicht reproduzierbar sei. Um den experimentellen Beweis dieser Annahme zu erbringen, d. h. um die ganze Hysteresiskurve zu durchlaufen, müsste der Kristall sowohl auf Druck als auch auf Zug belastet werden können. Da die praktische Durchführung dieses Versuches grosse Schwierigkeiten bietet, haben wir die Methode des direkten Piezoeffektes fallen gelassen und uns der Untersuchung des inversen Piezoeffektes zugewandt, bei dem die Messung der Hysteresisschleifen $x_6(E_3)$ keine experimentellen Tücken hat.

Der von uns untersuchte inverse Piezoeffekt an KH_2PO_4 wird beschrieben durch die Angabe der durch ein elektrisches Feld E_3 hervorgerufenen *Scherung* x_6 . Die direkte Bestimmung der Scherung, die messtechnisch schwierig ist, kann durch geeignete Orientierung des Kristallpräparates auf die Messung einer Normaldilatation zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck schneiden wir das quaderförmige Probestück so aus dem Kristall heraus, dass seine Achsen (x_1', x_2', x_3') bezüglich der kristallographischen Hauptachsen (x_1, x_2, x_3) die Indizes $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, und $(0, 0, 1)$ haben. Aus den Verzerrungen $x_1 = \dots = x_5$, $x_6 \neq 0$ im System (x_1, x_2, x_3) folgt in dem um 45° um die x_3 -Achse gedrehten System (x_1', x_2', x_3')

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2' = -\frac{1}{2} x_6 \\ x_3' &= \dots = x_6' = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Die Normaldilatation in der x_1' -Richtung in Funktion des elektrischen Feldes $E_3' = E_3$ ist nach (7) und (9) gegeben durch

$$x_1' = -\frac{1}{2} d_{36} E_3. \quad (10)$$

III. Apparatur.

a) Die optische Versuchsanordnung.

Die Längenänderung des Kristalls wird nach der von FIZEAU ausgebildeten Interferenzmethode gemessen in einem für unsere Zwecke umgebauten *Abbe'schen Dilatometer*, dessen Prinzip aus Fig. 1 ersichtlich ist. Die Lichtquelle Hg, eine gekühlte Hg-Bogen-

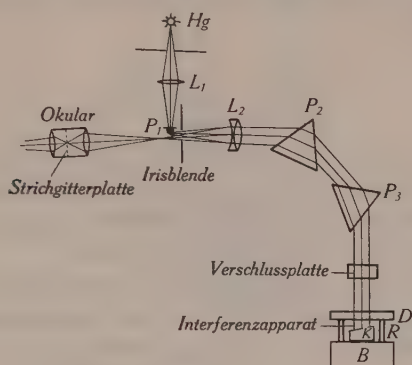


Fig. 1.

Schema der optischen Versuchsanordnung.

lampe, wird durch eine Linse L_1 auf das kleine Ablenkprisma P_1 abgebildet. Die von P_1 austretenden Strahlen verlassen die Linse L_2 als paralleles Strahlenbündel, das durch die beiden Prismen P_2 und P_3 um ungefähr 90° abgelenkt in den Interferenzapparat gelangt. Die an der Ober- und Unterseite der Quarzdeckplatte D und der Kristalloberfläche K reflektierten Strahlen gehen nun in umgekehrter Richtung durch die Prismen P_3 und P_2 , die Linse L_2 und gelangen schliesslich in das Mikroskopokular O , das so eingestellt ist, dass die untere Fläche der Quarzplatte D scharf abgebildet wird. Da nur die Strahlen, die von der Unterseite von D und vom Kristall reflektiert werden, zur Interferenz gebracht werden sollen, ist die Quarzplatte D ganz wenig keilförmig geschnitten, so dass die von der Oberseite reflektierten Strahlen ausserhalb des Gesichtsfeldes fallen. Da die von der Hg-Lampe emittierten Strahlen beim Durchgang durch die Prismen verschieden stark abgelenkt werden, sind die den einzelnen Spektrallinien zugeordneten Interferenzstreifenbilder aufgespalten. Die vorliegenden Untersuchungen wurden ohne Ausnahme mit der grünen Hg-Linie ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$) durchgeführt. Der Keilwinkel zwischen Quarzdeckplatte und re-

flektierender Kristalloberfläche wurde so gewählt, dass das Bild der Kristalloberfläche, durch das Mikroskopokular ungefähr zehnfach vergrößert, von ungefähr 4 Interferenzstreifen durchzogen war. Aus der Verschiebung der Interferenzstreifen berechnet sich die Längenänderung des Kristalls. Wir bezeichnen mit N die Zahl der an einem festen Punkt im Gesichtsfeld vorbeiwandernden Streifen. Sei l_R die Länge des auf der Quarzbodenplatte B aufsitzenen Quarzrings R , der seinerseits die Quarzdeckplatte D trägt, l_K die Länge des Kristalls. Die Längenänderung des Kristalls ist gegeben durch

$$\Delta l_K = \Delta l_R + N \frac{\lambda}{2}. \quad (11)$$

Der Term Δl_R (thermische Ausdehnung des Quarzringes) lässt sich berechnen aus der mikrometrisch bestimmten Länge l_R und dem Ausdehnungskoeffizienten von Bergkristall in der c -Richtung, der von SCHEEL⁵⁾ sehr genau bestimmt wurde.

Die Anzahl N der im Gesichtsfeld vorbeilaufenden Interferenzstreifen konnte mit Hilfe der im Okular eingebauten Strichgitterplatte auf ungefähr $\pm 1/20$ genau gemessen werden, was einer Genauigkeit in Δl_K von $\pm 1,4 \cdot 10^{-6}$ cm entspricht.

b) Die Kristalle.

Wir benutzten für unsere Untersuchungen 2 Kristallpräparate, die aus einem von LÜDY⁶⁾ gezüchteten, ausserhalb des Keimes klaren und fehlerfreien Kristall herausgeschnitten und mit Hilfe einer Kristallschleifmaschine nach WÜFLING⁷⁾ genau orientiert wurden. Den Schliff der Fläche, an der die Lichtstrahlen reflektiert werden und die optisch plan sein muss, besorgte die optische Werkstätte Kern in Aarau. Der Kristall steht auf ungefähr 0,1 mm hohen Füßchen, die aus der Grundfläche herausgeschliffen wurden, wohldefiniert auf der Quarzbodenplatte. Als Elektroden verwendeten wir im Hochvakuum aufgedampfte Goldschichten, deren Dicke von der Grössenordnung $5 \cdot 10^{-6}$ cm ist. Die Dimensionen der beiden quaderförmigen Kristalle wurden mikrometrisch bestimmt zu

Kristall I: $a = 6,445$ mm $b = 9,350$ mm $c = 4,140$ mm

Kristall II: $a = 9,763$ mm $b = 10,305$ mm $c = 8,290$ mm

mit einem Fehler von $\pm 0,005$ mm.

c) *Das Messgefäß.*

Da die meisten Messungen bei Temperaturen von ungefähr -150°C durchgeführt werden mussten, sind bei der Konstruktion des Messgefäßes (Fig. 2), das die Interferenzapparatur enthält, die

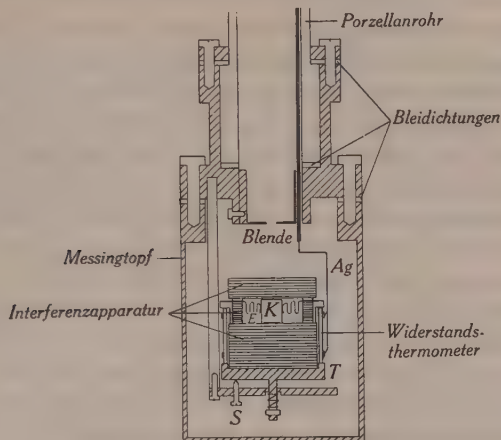


Fig. 2.

Schnitt durch Messgefäß und Interferenzapparatur.

beiden folgenden, sich gegenseitig konkurrenzierenden Punkte massgebend:

1. Geringe Wärmeleitfähigkeit derjenigen Teile, in denen grosse Temperaturgradienten auftreten.

2. Solider Aufbau, um die Interferenzanordnung vor starken Erschütterungen, die ihren Grund in der Umwälzung des Flüssigkeitsbades im Thermostaten haben, zu schützen.

Um beiden Forderungen gerecht zu werden, benutzten wir als Verbindungsstück zwischen dem im Kühlbad liegenden Messingtopf *M*, der zur Aufnahme des Kristalls dient, und den auf Zimmertemperatur befindlichen Teilen des Dilatometers ein 17 cm langes Porzellanrohr vom Durchmesser 3 cm und der Wandstärke 3 mm. Die Interferenzapparatur steht auf einem Tischchen *T*, das durch Verstellen der 3 Schrauben *S* leicht geneigt und justiert werden kann.

Zur Übertragung der elektrischen Spannung auf die Kristallelektroden dienen Silberblechstreifen *E*, die „ziehharmonikaartig“ gebogen sind, um die auf den Kristall übertragenen Drucke auf ein Minimum zu reduzieren.

d) *Temperaturmessung und Thermostat.*

Die Temperatur des Kristalls wurde mit Hilfe eines Widerstandsthermometers W aus Pt-Draht gemessen. Auf einem Glasring, der genau auf die Quarzbodenplatte B passt, wurde mit Flusssäure ein Gewinde geätzt, in das der 0,1 mm dicke Pt-Draht gelegt wird. Die Enden des Drahtes sind an zwei um den Glasring gelegte Silberbändchen gelötet. Als Zuführungsdrähte, die mit den Silberbändchen verlötet sind, dienten 4 Ag-Drähte, die in feinen Glasröhrchen durch das Porzellanrohr geführt sind. Der ohmsche Widerstand R_t des Pt-Drahtes ist für den bei unseren Messungen in Betracht fallenden Temperaturbereich eine annähernd lineare Funktion der Temperatur, deren Koeffizienten vom Eidg. Amt für Mass und Gewicht bestimmt wurden. R_t sinkt vom Werte $14,5 \Omega$ für Zimmertemperatur auf ungefähr 5Ω für -150°C . R_t wird gemessen durch Vergleich mit einem in Serie geschalteten Normalwiderstand R_N von 10Ω , indem die bei einer Stromstärke von 2 mA an R_t und R_N liegenden Spannungen in einem Kompensationsapparat (Innenwiderstand 1000Ω) bestimmt werden. Da R_t auf $0,001 \Omega$ genau ermittelt werden konnte, liegen die Fehler in der Temperaturmessung in der Grössenordnung $1/50^\circ \text{C}$.

Die Verwendung eines sehr genau arbeitenden Thermostaten ist unumgänglich, weil die Änderung der Zustandsvariablen am Curiepunkt fast sprunghaft erfolgt. Der von uns konstruierte Flüssigkeitsthermostat ist dem von SCOTT und BRICKWEDDE⁸⁾ und BANTLE und CAFLISCH⁴⁾ beschriebenen Modell nachgebildet. Um im ganzen Temperaturbereich 100° — 250°K mit derselben Badflüssigkeit arbeiten zu können, wählten wir ein Gemisch von 1,5 Liter Pentan mit 0,5 Liter Butan, dessen Schmelzpunkt bei ungefähr 95°K liegt. Zur Abkühlung des Thermostaten und des Messtopfes von Zimmertemperatur auf den Curiepunkt $\Theta = 123^\circ \text{K}$ werden 1 kg Trockeneis und zirka 6 Liter flüssige Luft gebraucht. Wird auf dieser Temperatur stabilisiert, beträgt der Verbrauch an flüssiger Luft ungefähr 0,2 Liter pro Stunde. Die Temperatur des Bades wird dadurch konstant gehalten, dass die in die flüssige Luft abfliessende Wärmemenge kompensiert wird durch elektrische Heizung. Der Strom durch die Heizwicklung wird durch die Thermospannung eines fünffachen Kupfer-Konstantan-Thermoelementes, dessen Lötstellen in die Badflüssigkeit und in Eis-Wasser-Gemisch getaucht sind, mit Hilfe einer Toulonschaltung^{6) 9)} vollautomatisch gesteuert. Diese Anordnung erlaubte, die Temperatur des Kristalles während beliebig langer Zeit auf $\pm 1/100^\circ \text{C}$ konstant zu halten. Um

die Interferenzanordnung nach erfolgter Justierung ohne Erschütterung in die Badflüssigkeit eintauchen zu können, wurde der ganze Thermostat inkl. Hochvakuumanlage auf eine Hebevorrichtung aufmontiert.

IV. Thermische Ausdehnung.

Die Messungen von ZWICKER¹⁰⁾ zeigen, dass die im Curiegebiet beobachtete spontane Polarisierung bei einem Kristall, dessen Metallelektroden kurzgeschlossen sind, nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Vorgeschichte abhängig ist. Es ist zu erwarten, und unsere Messungen an Kristall I bestätigen das, dass auch die thermische Ausdehnung im Curiegebiet für einen *mit kurzgeschlossenen Elektroden versehenen Kristall* unreproduzierbar ist, da neben der eigentlichen thermischen Ausdehnung ($\overline{P}_s = 0$) ein durch die spontane Polarisierung P_s bedingter inverser Piezoeffekt auftritt. Im Gegensatz dazu zeigen die im folgenden zu besprechenden zahlreichen Messungen der thermischen Dilatation am *nackten* (d. h. isoliert, ohne Elektroden aufgestellten) *Kristall II* keine Streuung. Dieses Verhalten beruht, wie im Abschnitt VII gezeigt werden wird, darauf, dass die mittlere spontane Polarisierung für einen Kristall ohne Elektroden verschwindet.

Die thermische Ausdehnung wurde bei laufender Temperatur im Thermostaten gemessen, mit dessen Hilfe die Temperaturänderung pro Zeiteinheit dT/dt auf beliebig kleine Werte eingestellt werden konnte. Bei den Messungen in der Umgebung des Curiepunktes war $dT/dt < 1^\circ/\text{h}$. Da die Temperatur des Kristalls derjenigen des Widerstandsthermometers etwas nachhinkt, müssen die gemessenen Temperaturwerte korrigiert werden. Die empirisch bestimmte Korrektur, die ausser von dT/dt auch von der spezifischen Wärme des Kristalls abhängt, ist am Curiepunkt von der Grössenordnung $1/10^\circ$ für einen zeitlichen Temperaturgradienten dT/dt von $1^\circ/\text{h}$.

Fig. 3 zeigt den Verlauf der thermischen Dilatation x_1' in Funktion der Temperatur T im Bereich 100° — 250° K. Ausserhalb des Curiegebietes, für $T > 123^\circ$ K verläuft die Kurve $x_1'(T)$ angenähert linear. Der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient für die x_1' -Richtung bestimmt sich zu

$$\alpha_1' = 2,2 \cdot 10^{-5}.$$

Wegen der für $T > \Theta$ tetragonalen Kristallsymmetrie ist α_1' der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient in der x_1 - und x_2 -Richtung (Ausdehnungsellipsoid = Rotationsellipsoid). Bei Annäherung

an den Curiepunkt biegt die Kurve $x_1'(T)$ um: der Ausdehnungskoeffizient nimmt mit abnehmender Temperatur ab bis zum Werte $1,45 \cdot 10^{-5}$. Bei Abkühlung unter den Curiepunkt wird der Kristall wieder länger. Die Längenänderung verläuft sehr steil, aber vollkommen stetig. Dagegen hat der Ausdehnungskoeffizient, definiert als erste Ableitung der Funktion $x_1'(T)$, am Curiepunkt eine Unstetigkeitsstelle und springt auf einen negativen Wert von der Größenordnung 10^{-2} . Diese Untersuchungen sind deshalb zu einer

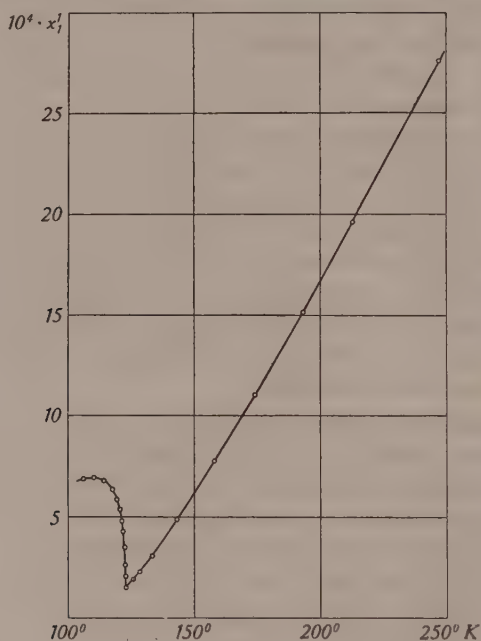


Fig. 3.

Thermische Ausdehnung in Funktion der abs. Temperatur.

Präzisionsbestimmung der Curietemperatur besser geeignet als der inverse Piezoeffekt, bei dem der Übergang vom reversiblen Effekt zu den Hysteresiserscheinungen sich über ein Temperaturintervall von ungefähr $1/10^\circ$ hinzieht. Die Messungen ergeben

$$\Theta = 122,90 \pm 0,05^\circ \text{ K.}$$

Da *Deformation* und elektrische *Polarisation* beim inversen Piezoeffekt in nahezu temperaturunabhängiger Weise *gekoppelt* sind (VII. Abschnitt), versuchen wir, das anomale Verhalten der thermischen Ausdehnung im Curiegebiet als einen durch die spontane Polarisation (resp. durch das mit dieser verknüpfte innere Feld¹¹⁾)

bedingten inversen Piezoeffekt zu deuten. Der in P lineare Piezoeffekt erzeugt keine Längenänderung, da die mittlere Polarisierung für einen unblebten Kristall, wie wir ihn hier verwendet haben, 0 ist (VII. Abschnitt). Nehmen wir an, dass die Anomalie als *quadratischer Piezoeffekt* zu erklären sei, so müsste die thermische Ausdehnung $x_1'(T)$ in der Form

$$x_1'(T) = f(T) + \alpha P_s^2(T)$$

geschrieben werden können, in der $f(T)$ bei geeigneter Wahl der Konstanten α eine lineare Temperaturfunktion ist, deren Neigung durch die Neigung von $x_1'(T)$ oberhalb des Curiepunktes ($P_s = 0$) festgelegt ist. $f(T)$ ist in Fig. 4 mit $\alpha = 3,84 \cdot 10^{-12}$ cgs gezeichnet

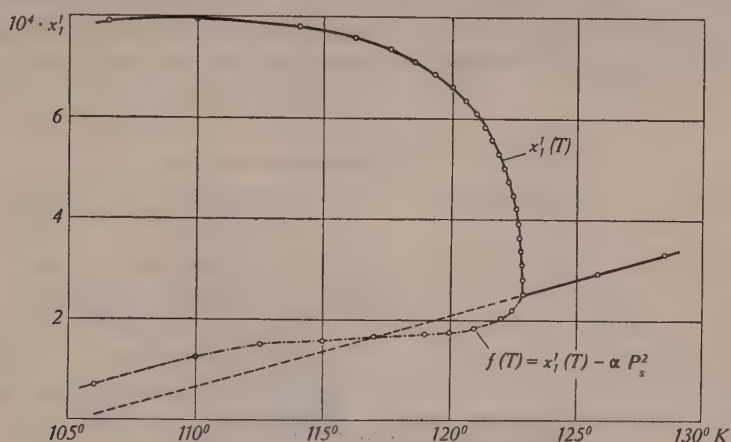


Fig. 4.

Thermische Ausdehnung in Funktion der abs. Temperatur im Curiegebiet.

(strichpunktierte Kurve). Die dieser Kurve zugrunde liegenden $P_s(T)$ -Werte sind unseren statischen dielektrischen Messungen¹¹⁾ entnommen. Die Abweichungen der Funktion $f(T)$ von der Geraden, die nicht auf Messfehler zurückgeführt werden können, deuten darauf hin, dass die Interpretation der Anomalie der thermischen Ausdehnung einzig als Folge der Kopplung zwischen Polarisation und Deformation unzulässig ist. Diese Ansicht wird gestützt durch die Messungen des quadratischen Piezoeffektes für $T > \Theta$. Die Untersuchungen des reversiblen Piezoeffektes (V. Abschnitt) zeigen, dass der Proportionalitätsfaktor $b = g_{31}/\kappa_3^2$ (vgl. Gleichung (12)) zwischen Deformation $x_1'(T)$ und dem Quadrat der Polarisation P von der Größenordnung $2 \cdot 10^{-13}$ cgs ist. Nehmen wir an, dass b sich bei Überschreiten der Curietemperatur nicht wesentlich ändert

(beim Proportionalitätsfaktor zwischen $x_1'(T)$ und P ist diese Annahme erfüllt), so kann nur ungefähr $1/20$ der gesamten Anomalie als quadratischer Piezoeffekt interpretiert werden. Unsere Messungen legen also den Schluss nahe, das anomale Verhalten der thermischen Ausdehnung im Curiegebiet im wesentlichen auf eine „gewöhnliche“ Kristallumwandlung 2. Art zurückzuführen.

V. Der reversible inverse Piezoeffekt.

Die durch ein elektrisches Feld E_3 bedingte Deformation x_1' in der x_1' -Richtung (Gerade $(1, 1, 0)$) ist nach (10) in erster Näherung

$$x_1' = -\frac{1}{2} d_{36} E_3.$$

Um die Temperaturabhängigkeit von d_{36} zu bestimmen, wurde für verschiedene Temperaturen die Deformation in Funktion des angelegten elektrischen Feldes bestimmt.

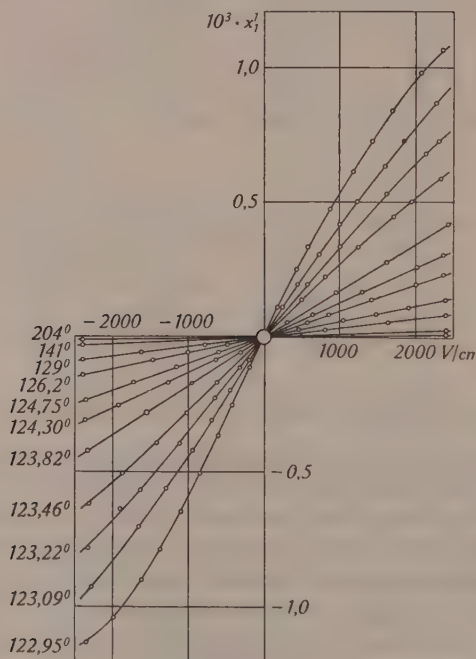


Fig. 5.

Deformation in Funktion des elektr. Feldes. Parameter: abs. Temperatur.

Vor jeder Messung wurde die Temperatur des Kristalls mit Hilfe des Thermostaten während mindestens $1/2$ Stunde auf $\pm 1/100^\circ$ C stabilisiert. Diese Genauigkeit ist notwendig, da infolge der

grossen Temperaturabhängigkeit des Piezomoduls d_{36} in der Nähe von Θ ein Fehler in der Temperatur von $1/100^\circ \text{C}$ einen Fehler von ungefähr 1% in der Deformation bedingt. Zur Messung der am Kristall liegenden Spannung, die kontinuierlich von -2000 V auf $+2000 \text{ V}$ variiert werden konnte, dienten statische Voltmeter (125 V, 200 V, 500 V, 1000 V, 2000 V).

In Fig. 5 sind einige der aufgenommenen Kurven $x_1'(T, E)$ für verschiedene Temperaturen T gezeichnet. Für Zimmertemperatur ist der Modul d_{36} so klein, dass $x_1'(E)$ praktisch mit der Abszissenachse zusammenfällt. Bis ungefähr $T = 124^\circ \text{K}$ verlaufen die Kurven innerhalb der Messgenauigkeit linear; der Effekt wird also durch die Gleichung (10), in der d_{36} eine feldstärkeunabhängige Temperaturfunktion ist, vollständig beschrieben. Für Temperaturen $\Theta < T < \Theta + 1^\circ$ müssen auch die Glieder höherer Ordnung in E mitgenommen werden, die durch Erweiterung des Potenzreihenansatzes für das thermodynamische Potential G (Gleichung (1)) erhalten werden:

$$x_1' = -\frac{1}{2} d_{36} E + g_{31} E^2 + \frac{1}{2} f_{36} E^3 \quad (12)$$

g_{31} wird nach OSTERBERG¹²⁾ als piezodielektrischer Modul bezeichnet.

Da der absolute Messfehler der Deformation $\Delta x_1'$ eine Apparaturkonstante ist, hängt der relative Fehler $\delta = \Delta x_1' / x_1'$ sehr erheblich von T und E ab: für $E = 2500 \text{ Volt/cm}$ sinkt δ von ungefähr 20% bei Zimmertemperatur auf einen Wert $< 1/100$ am Curiepunkt. Der inverse Piezoeffekt ist deshalb sehr gut geeignet zur Messung des Moduls d_{36} für $T < 150^\circ \text{K}$. Hingegen ist im Temperaturbereich $T > 150^\circ \text{K}$ den über den direkten Piezoeffekt⁴⁾ erhaltenen Grössen der Vorzug zu geben.

Temperaturverlauf des piezoelektrischen Moduls d_{36} .

Der lineare piezoelektrische Modul d_{36} , der sich aus der Neigung der Kurven $x_1'(E)$ im Punkte $E = 0$ berechnet, ist in Fig. 6 in logarithmischen Maßstab als Funktion der Temperatur aufgetragen. d_{36} steigt vom Werte $70 \cdot 10^{-8} \text{ cgs}$ bei Zimmertemperatur ungefähr hyperbolisch an bis auf $45000 \cdot 10^{-8} \text{ cgs}$ am Curiepunkt. Die von BANTLE und CAFLISCH⁴⁾ durch den direkten Piezoeffekt ermittelten Werte, die als volle Kreise gezeichnet sind, stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit den über den inversen Effekt bestimmten Moduln überein.

Die Koeffizienten, die die Effekte 2. und 3. Ordnung beschreiben, sind knapp oberhalb des Curiepunktes für $T = 122,95^\circ \text{K}$ von der Grösse $g_{31} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ cgs}$ und $f_{36} = 14 \cdot 10^{-7} \text{ cgs}$.

Einfluss des elektrokalorischen Effektes.

Bei den Messreihen für Temperaturen in der Nähe des Curiepunktes mussten die Kurven $x_1'(E)$ sehr langsam durchlaufen werden, um reproduzierbare Resultate zu erhalten. Wird nämlich die Feldstärke rasch geändert und dann plötzlich festgehalten, wandern die Interferenzstreifen noch weiter und kommen erst ungefähr nach 1 Minute vollständig zum Stehen. Wir erklären dieses Phänomen durch den elektrokalorischen Effekt. Aus der thermodynamischen Beziehung

$$\dot{S} = - \frac{\partial G}{\partial T}$$

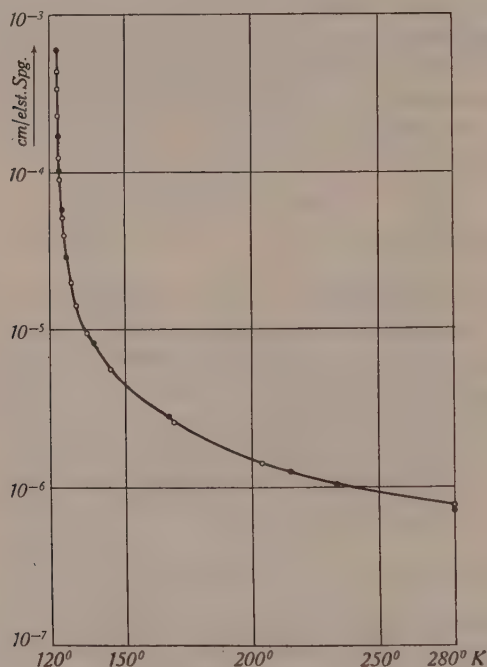


Fig. 6.

Temperaturgang des Piezomoduls d_{36}

berechnet sich die Temperaturänderung Δ , die das Anlegen eines elektrischen Feldes E_3 bei adiabatischer Führung hervorruft, zu

$$\Delta = - \frac{T_0}{2 \cdot c_P} \cdot \frac{\partial \kappa_3}{\partial T} \cdot E_3^2 \text{ für } X_i = 0 \quad (i = 1 \dots 6)$$

Sämtliche Grössen der rechten Seite dieser Gleichung sind be-

kannt: die spezifische Wärme c_p für $E = X = 0$ wird den Messungen von BANTLE⁹⁾ entnommen. Die Ableitung der dielektrischen Suszeptibilität $\frac{\partial \kappa_3}{\partial T}$ berechnet sich aus dem Temperaturgang der von BUSCH¹³⁾ gemessenen Dielektrizitätskonstanten. Für eine Ausgangstemperatur $T_0 = \Theta + 0,2^\circ$ ist

$$a = - \frac{T_0}{2 \cdot c_p} \cdot \frac{\partial \kappa_3}{\partial T} = + 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ cgs}$$

Plötzliches Einschalten eines Feldes von 2000 Volt/cm bewirkt also eine Temperaturerhöhung von $0,2^\circ$. Da nun der piezoelektrische Modul d_{36} mit zunehmender Temperatur abnimmt, wird die Deformation zunächst hinter dem der Ausgangstemperatur T_0 entsprechenden Wert zurückbleiben und erreicht ihren Endwert erst, nachdem das Wärmegleichgewicht zwischen Kristall und Umgebung wieder hergestellt ist. Der elektrokalorische Effekt bedingt für den linearen inversen Piezoeffekt ein Zusatzglied, das E^3 proportional ist und dessen Koeffizient im folgenden berechnet sei. Die in die Grundgleichung

$$x_1' = - \frac{1}{2} d_{36}(T_0 + \Delta) \cdot E = - \frac{1}{2} \left[d_{36}(T_0) + \frac{\partial d_{36}(T_0)}{\partial T} \cdot \Delta \right] \cdot E$$

eingehende Temperaturänderung Δ ist gegeben durch $\Delta = a \cdot E^2$. Da der Modul d_{36} in der Nähe des Curiepunktes dem Curie-Weiss'schen Gesetz

$$\frac{1}{d_{36}} = b(T - \Theta) \quad \text{mit } b = 7930 \text{ cgs}$$

gehört, berechnet sich die Ableitung zu

$$\frac{\partial d_{36}}{\partial T} = - b d_{36}^2$$

Also

$$x_1' = - \frac{1}{2} (d_{36} - a \cdot b \cdot d_{36}^2 E^2) E$$

Für $T = \Theta + 0,2^\circ$ hat die Konstante $(a \cdot b \cdot d_{36}^2)$ den Wert $10 \cdot 10^{-7}$ cgs, ist also von derselben Größenordnung wie der Koeffizient des kubischen Gliedes f_{36} beim isotherm geleiteten inversen Piezoeffekt. Die experimentell gefundenen Relaxationserscheinungen in x_1' bei rascher Änderung der Feldstärke entsprechen größenordnungs-mässig dem aus dem elektrokalorischen Effekt berechneten Wert.

VI. Piezoelektrische Hysterese.

Übersicht über die Messungen.

Für Temperaturen unterhalb des seignette-elektrischen Curiepunktes treten zwischen elektrischem Feld und *Deformation Hysteresiserscheinungen* auf, die den bei den dielektrischen Messungen beobachteten Phänomenen¹³⁾ vollständig entsprechen. Wir werden zeigen, dass die piezoelektrische Hysterese bedingt ist durch den Sättigungscharakter der elektrischen Polarisierung.

Die Messungen wurden an Kristall I und II durchgeführt unter Verwendung des Thermostaten, da auch dieser Effekt am Curiepunkt stark temperaturabhängig ist. Die Kurven werden durchlaufen, indem die am Kristall liegende Spannung von + 2000 Volt kontinuierlich auf - 2000 Volt und wieder zurück auf + 2000 Volt variiert wird. Da zwischen elektrischem Feld und Deformation Relaxationserscheinungen auftreten, die mindestens zum Teil durch den elektrokalorischen Effekt bedingt sind, sind die aufgenommenen Kurven frequenzabhängig. Um wohl definierte und leicht reproduzierbare Versuchsverhältnisse zu haben, wurden die Kurven so langsam durchlaufen, dass das Relaxationsphänomen keinen messbaren Einfluss mehr hatte. Die Aufnahme einer einzigen Hysteresiskurve dauerte 15–20 Minuten, entsprechend einer Frequenz von zirka 10^{-3} Hertz. Die Hysteresisschleifen schliessen sich annähernd (maximaler Fehler 1%), ein Beweis dafür, dass die Temperaturstabilisierung sehr genau arbeitet.

Die aufgenommenen Hysteresiskurven lassen sich in zwei Klassen einteilen:

1. Klasse: Hysteresiskurven mit makroskopischen Barkhausensprüngen;
2. Klasse: Hysteresiskurven ohne makroskopische Barkhausensprünge.

Chronologisch verteilen sich die Messungen, die alle unter denselben Versuchsbedingungen durchgeführt wurden, folgendermassen auf die beiden Klassen. Kristall I durchlief zunächst zirka 30 Kurven (1), darauf 40 Kurven (2), schliesslich noch einmal eine Kurve (1), um dann zu zerplatzen. An Kristall II wurden nur Kurven der Klasse (1) beobachtet.

Die hier auftretenden Barkhausensprünge sind nur äusserlich ähnlich denjenigen, welche beim Ferromagnetismus auftreten. Die Elementarbezirke sind hier von makroskopisch sichtbarer Grösse. Mit dem bereichsweisen Auftreten oder Umklappen der spontanen Polarisierung kann ein direkt beobachtbares Zerreißen des Kristalls verbunden sein. Die dabei auftretenden Risse heilen beim Ver-

schwinden der Polarisierung (z. B. beim Erwärmen über die Curie-temperatur) wieder vollständig aus, ohne dass Spuren von denselben zurückbleiben würden. Ob ein Kristall Barkhausensprünge zeigt oder nicht, hängt wesentlich mit seinen mechanischen Festigkeits-eigenschaften und seiner Vorgeschichte zusammen. Eine ausführliche Mitteilung über diese Verhältnisse erfolgt demnächst.

Hysteresiskurven mit Barkhausensprüngen.

Die in Fig. 7 gezeichneten Kurven gehören alle einer an Kristall II durchgeführten Messreihe an. Der allgemeine Charakter in der

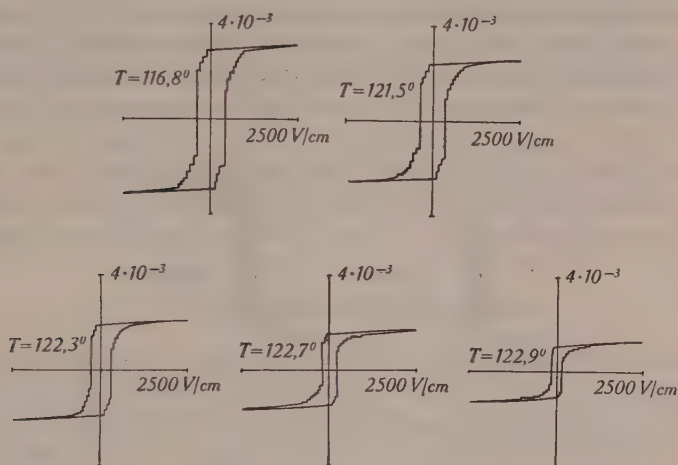


Fig. 7.

Hysteresiskurven $x_1'(E)$ mit Barkhausensprüngen. Parameter: abs. Temperatur.

Verteilung der Barkhausensprünge ist für die verschiedenen Temperaturen gleich. Wird aber der Kristall über den Curiepunkt erwärmt und wieder abgekühlt, so geht jede Ähnlichkeit verloren. Während die Kurven der Fig. 7 einen einzigen *grossen* Barkhausensprung aufweisen, treten gelegentlich zwei, manchmal auch drei untereinander ungefähr gleich grosse Sprünge auf. Wird das Spannungsgerät ohne Widerstand direkt an den Kristall angeschlossen, so wandern die Interferenzstreifen während des Sprunges viel zu rasch, um noch gezählt werden zu können. Wird ein Widerstand von einigen $M\Omega$ in Serie geschaltet, fällt die Spannung am Kristall im Moment des Sprunges zusammen und erreicht allmählich wieder den durch das Spannungsgerät gegebenen Wert. Bei dieser „Zeitlupenaufnahme“, durch die die Zeitdauer eines Bark-

hausensprunges auf ungefähr 30 Sekunden gedehnt wird, wird die Geschwindigkeit der im Gesichtsfeld vorbeiwandernden Interferenzstreifen so klein, dass sie bequem gezählt werden können.

Die Interpretation der Barkhausensprünge als Umklappprozesse von makroskopischen Bezirken¹⁰⁾ wird gestützt durch die Beobachtung von charakteristischen Verwerfungen der Kristalloberfläche beim Durchlaufen der Hysteresiskurve. Als Beispiel wählen wir eine Messreihe, bei der die Hysteresisschleife 3 grosse Sprünge aufweist. Die obere Fläche F des Kristalls, die bei einheitlicher Polarisation ($E = 2500$ Volt/cm) eine Ebene E bildet, zerfällt nach dem Umklappen des linken Bezirkes ($E = -300$ Volt/cm) in zwei durch eine Gerade g parallel der x_3 -Achse getrennte Ebenen: die Ebene links, ungefähr $\frac{1}{3}$ der gesamten Fläche, liegt zu E parallel, die Ebene rechts ist um die Gerade g um einen Winkel von ungefähr $3'$ gedreht. Nach dem zweiten Barkhausensprung ($E = -450$

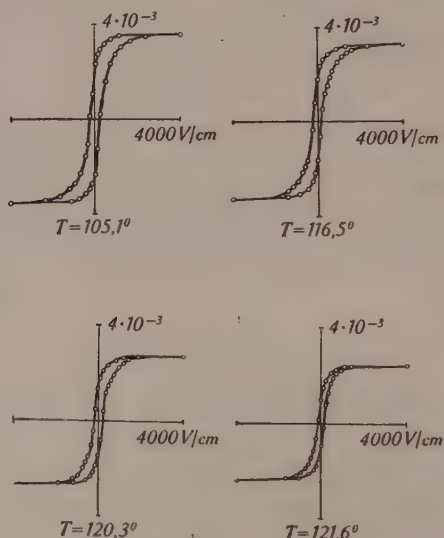


Fig. 8.

Hysteresiskurven $x_1'(E)$ ohne Barkhausensprünge. Parameter: abs. Temperatur.

Volt/cm), bei dem der Bezirk rechts umklappt, ist die Fläche F in 3 Ebenen unterteilt: die Ebenen links und rechts sind parallel zu E , die mittlere Ebene ist wiederum geneigt um einen Winkel von ungefähr $2'$. Der letzte grosse Umklappprozess ($E = -550$ Volt), durch den der Kristall wieder einheitlich polarisiert wird, bewirkt, dass F zu einer zu E parallelen Ebene wird.

Hysteresiskurven ohne Barkhausensprünge.

Die Aufnahmen der glatten Hysteresisschleifen, von denen einige in Fig. 8 reproduziert sind, konnten leider nicht auf Temperaturen in der Nähe von Θ ausgedehnt werden, da Kristall I während den Messungen zerstört wurde und an Kristall II nur noch Kurven vom Typus (1) gefunden wurden. Gelegentlich treten auch bei diesen Hysteresisschleifen einige (2—5) kleine Barkhausensprünge auf, die aber höchstens 0,5% der Gesamthöhe ausmachen.

Die Kristallfläche F , die bei Sättigung ungefähr eben ist, nimmt beim Durchlaufen der Kurven eine stetig wechselnde Gestalt an, die mit einer Hügellandschaft von 1—2 langsam wandernden und sich verändernden Hügeln verglichen werden könnte. Diese Verwerfungen sind genau wie bei den Kurven (1) nur dann reproduzierbar, wenn der Kristall zwischen den Messungen nie über Curietemperatur erwärmt wird.

Ein Vergleich der beiden Klassen zeigt, dass die Hysteresiskurven mit Barkhausensprüngen breiter sind und ausgeprägteren Sättigungscharakter haben als die entsprechenden Kurven ohne Sprünge. Der Sättigungswert von x_1' ist bei beiden Klassen gleich.

VII. Deformation und Polarisation.

Die Funktion $x_1'(E, T)$ wird durch die Angabe der Hysteresisschleifen $x_1'(E)$ für $T = \text{const.}$ nur bis auf eine additive Temperaturfunktion $g(T)$ festgelegt. Die Messungen der Kurven $x_1'(T)$ für $E = \text{const.}$ werden uns die Möglichkeit geben, diese Grösse $g(T)$ zu bestimmen.

Wir legen an den Kristall ein festes elektrisches Feld E_3 und messen die Deformation bei laufender Temperatur nach der im 4. Abschnitt besprochenen Methode. In Fig. 9 ist $x_1'(T)$ aufgetragen für die Feldstärken $E = +1000$ Volt/cm und $E = -1000$ Volt/cm, ferner die thermische Ausdehnung des nackten Kristalls. Diese Messungen zeigen, dass die Länge des nackten Kristalls *exakt* das Mittel bildet aus den Längen der zur Sättigung in der $+x_3$ und $-x_3$ -Richtung polarisierten Kristalle:

$$x_1'(T) = \frac{1}{2} [x_1'(T, +1000 \text{ V/cm}) + x_1'(T, -1000 \text{ V/cm})]. \quad (13)$$

Unter der Annahme, dass der Kristall aus einzelnen gesättigten spontan polarisierten Elementarbezirken aufgebaut ist, folgt daraus, dass die mittlere Polarisation des nackten Kristalls

$$\bar{P} = \frac{1}{V} \int P_s dV = 0. \quad (14)$$

Die Funktion $g(T)$, die den Nullpunkt der Hysteresiskurve festlegt ist also mit der thermischen Deformation $x_1'(T)$ des nackten Kristalls identisch.

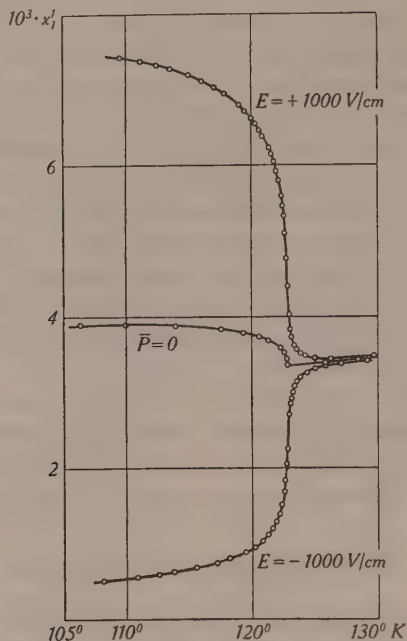


Fig. 9.

Deformation in Funktion der Temperatur: Parameter: elektr. Feld.

Aus diesen Messungen folgt weiter, dass Deformation und Polarisation im Curiegebiet in temperaturunabhängiger Weise linear gekoppelt sind. Die Funktion

$$x_s(T) = \frac{1}{2} [x_1'(T, +1000 \text{ V/cm}) - x_1'(T, -1000 \text{ V/cm})], \quad (15)$$

die mit der aus den Hysteresiskurven (Fig. 7) erhaltenen Sättigungsdeformation bis auf ungefähr 2% übereinstimmt, ist in Fig. 10 mit der spontanen Polarisation P_s ¹¹⁾ verglichen (gestrichelte Kurve). Da die beiden Kurven denselben Temperaturverlauf haben, sind x_s und P_s durch die Beziehung

$$x_s = a \cdot P_s \quad (16)$$

verknüpft, in der a eine Konstante ist.

Die Deformation $u_1'(T, P_s) = x_1'(T, \pm 1000 \text{ V/cm})$ eines einzelnen Elementarbezirkes ist also nach (13), (15) und (16) gegeben durch

$$u_1'(T, P_s) = x_1'(T) + a P_s. \quad (17)$$

Der Gültigkeitsbereich der Gleichung (17), die die Kopplung zwischen Polarisation und Deformation eines Bezirkes beschreibt, lässt sich auf das Temperaturgebiet $T > \Theta$ ausdehnen. Zum Beweise schreiben wir die Grundgleichung (10) des reversiblen inversen Piezoeffektes in der Form

$$x_1'(T, E) = x_1'(T) + a' \cdot P_3$$

$$a' = -\frac{1}{2} \frac{d_{36}}{\kappa_3} = a'(T). \quad (18)$$

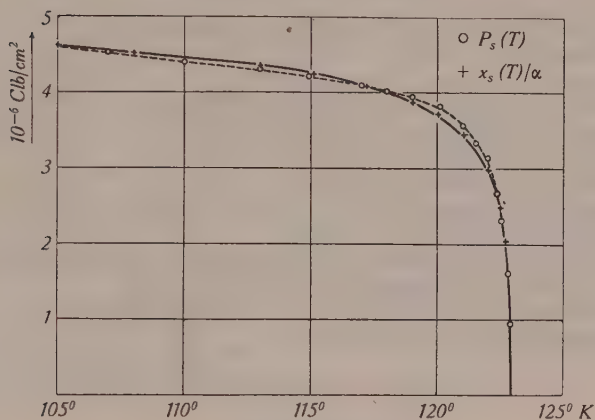


Fig. 10.

Sättigungsdeformation und spontane Polarisation in Funktion der abs. Temperatur.

Der aus $\kappa_3(T)^{13}$ und $d_{36}(T)$ (Abschnitt 5) berechnete Koeffizient a' ist eine annähernd lineare Funktion der Temperatur, die vom Werte $1,6 \cdot 10^{-7}$ cgs für $T = 280^\circ$ auf $2,35 \cdot 10^{-7}$ cgs für $T = 150^\circ$ steigt. a' ist also im Verhältnis zu $d_{36}(T)$ und $\kappa_3(T)$, die von Zimmertemperatur bis zum Curiepunkt ungefähr um einen Faktor 1000 variieren, nur in geringem Masse temperaturabhängig. Der für das Curiegebiet definierte Koeffizient a hat im untersuchten Temperaturgebiet ($100^\circ < T < 123^\circ$) den Wert $2,55 \pm 0,03 \cdot 10^{-7}$ cgs, stimmt also mit dem auf diese Temperaturen extrapolierten Koeffizienten a' des reversiblen Piezoeffektes überein. Damit ist gezeigt, dass Polarisation (resp. das innere Feld) und Deformation im ganzen untersuchten Temperaturbereich 100° bis 300° K in nahezu temperaturunabhängiger Weise linear gekoppelt sind. Die anomalen *piezoelektrischen* Eigenschaften des Kristalls lassen sich also vollständig auf das anomale *dielektrische* Verhalten zurück-

führen. Der Koeffizient a ist nun eine der gesuchten seltenen Grössen, welche ohne jede Unstetigkeit über die Curietemperatur hinweggehen.

Wir danken Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für zahlreiche wertvolle Ratschläge, durch die die Ausführung dieser Arbeit wesentlich gefördert wurde. Dem Aluminiumfonds Neuhausen sind wir für Überlassung von Mitteln zu grossem Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis.

- 1) VOIGT, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, 1928.
- 2) SPITZER, Diss. Göttingen, 1938.
- 3) LÜDY, Zs. f. Phys. **113**, 302, 1939.
- 4) BANTLE und CAFLISCH, H.P.A. XVI, 325, 1943.
- 5) LANDOLT-BÖRNSTEIN, Tabellen, Hw. II, 1229.
- 6) LÜDY, H.P.A. XV, 527, 1942.
- 7) EWALD, die optische Werkstatt.
- 8) SCOTT und BRICKWEDDE, Bur. Stand. J. Res. **6**, 401.
- 9) BANTLE, H.P.A. XV, 373, 1942.
- 10) ZWICKER und SCHERRER, H.P.A. Erscheint im nächsten Heft.
- 11) VON ARX und BANTLE, H.P.A. XVI, 211, 1943.
- 12) OSTERBERG und COOKSON, Phys. Rev. **51**, 1096, 1937.
- 13) BUSCH, H.P.A. XI, 269, 1938.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Mesure de l'effet photoélectrique des liquides à l'aide du compteur à étincelles

par Pierre Jeanguenin.

(24. VI. 1944)

Résumé. La première partie du présent travail contient une description du compteur à étincelles de Greinacher, transformé de façon à permettre la mesure de l'effet photoélectrique des liquides. Après une étude approfondie des caractéristiques de fonctionnement de l'appareil, les conditions les plus favorables en vue de la dite mesure furent déterminées.

La deuxième partie du travail se rapporte à l'étude de l'effet photoélectrique lui-même. Des mesures furent effectuées afin de trouver quelques substances (sels, bases, acides) présentant à l'état de solution aqueuse un effet photoélectrique notable. Les substances les plus actives furent le ferrocyanure et le ferricyanure de potassium, ainsi que les carbonates et les iodures de Li, Na et K. L'influence de la concentration de quelques solutions sur l'activité photoélectrique fut étudiée, et une variation linéaire trouvée. La variation de l'effet d'une solution de $\text{Fe}(\text{CN})_6\text{K}_4$ avec la longueur d'onde de la lumière ultra-violettes fut également l'objet de recherches. Pour terminer, les expériences portèrent sur une anomalie présentée par certains carbonates, consistant en une diminution de l'activité au cours du temps, et qui semble provenir de traces de silicates passant progressivement à l'état colloïdal après dissolution.

§ 1. Introduction.

L'action de rayons ionisants sur la formation d'étincelles fut maintes fois étudiée. Dans certains cas, une suppression du retardement des étincelles fut observée (WARBURG¹⁾), et dans d'autres un véritable abaissement du potentiel explosif (HERWEG²⁾³⁾). GREINACHER⁴⁾ a montré que dans certaines conditions une seule particule ionisante suffit pour déclencher une étincelle. Ceci lui permit de fonder une méthode pour compter les particules élémentaires et les photoélectrons⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾. Un compteur à étincelles avec électrodes métalliques et un autre avec une anode métallique et une cathode liquide furent construits. Ce dernier, le «compteur hydraulique», servit notamment aux expériences relatives à l'effet photoélectrique de l'eau⁵⁾. La longueur d'onde la plus grande de la lumière incidente, pour laquelle l'effet photoélectrique a lieu, avait été trouvée par BOLENSKY¹⁰⁾ d'environ 202,5 m μ , et par GÖRLICH¹¹⁾ de 203 à 204 m μ . Au contraire, GREINACHER montra que l'effet ne disparaît pas totalement lorsqu'on intercale un filtre de quartz entre la source lumineuse et le compteur, alors que le filtre

absorbe tout rayonnement dont la longueur d'onde est voisine de $204\text{ m}\mu$. Il en résulte que l'eau présente encore un effet visible en-dessus de $204\text{ m}\mu$, que seule la grande sensibilité du compteur à étincelles peut révéler.

L'emploi d'un jet d'eau (ou plus généralement de liquide) présente le grand avantage que la surface est toujours fraîche. Des mesures faites avec des colorants avaient en effet montré que l'activité des solutions augmentait avec l'âge de la surface, ceci à cause de la formation d'une peau solide (SCHÜTT¹²), ROHDE¹³), PLOGMEYER¹⁴)). De nombreuses solutions, qui présentaient un effet photoélectrique visible, furent trouvées inactives lorsque leur surface était fraîche. La solution de ferrocyanure de potassium fut pendant longtemps la seule connue, présentant un effet mesurable à l'état frais (en dehors de l'extrême ultra-violet). Mais, même dans ce cas, une méthode utilisant une surface fraîche est à préférer. En effet, comme l'a trouvé ZIMMERMANN¹⁵), un phénomène de fatigue photoélectrique, analogue à celui observé pour les surfaces solides, se produit.

L'effet photoélectrique des liquides a peu été étudié jusqu'à présent. GÖRLICH¹¹) en voit la cause dans le fait que les mesures devraient être effectuées avec des rayons ultra-violetes dont la longueur d'onde est inférieure à $200\text{ m}\mu$, ce qui soulèverait certaines difficultés. Il ne serait en effet plus possible d'utiliser un monochromateur avec prisme en quartz. De plus, il faudrait créer un vide poussé, pour éviter l'absorption des rayons ultra-violetes par l'air. Cependant, même en l'absence d'air, il resterait de la vapeur d'eau qui, elle aussi, absorbe les rayons ultra-violetes.

OBOLENSKY¹⁰) et Counson et Molle¹⁶) ont étudié les solutions aqueuses de différents sels inorganiques et ont trouvé que les chlorures diminuent l'effet photoélectrique de l'eau, tandis que les sulfates, les carbonates et les nitrates l'augmentent. Mais ils n'indiquent pas s'il s'agit simplement d'une variation de l'activité, ou bien d'un déplacement du seuil photoélectrique. GÖRLICH¹¹) s'est occupé de cette question et est arrivé à la conclusion que le seuil est le même pour les solutions de $\text{Fe}(\text{CN})_6\text{K}_4$, Na_2SO_4 et NaCl que pour l'eau pure.

Le but du présent travail était d'appliquer le compteur hydraulique de GREINACHER à la mesure de l'effet photoélectrique des liquides, de rechercher ses conditions de fonctionnement les plus favorables, et de mesurer l'effet photoélectrique de quelques solutions pour différentes longueurs d'onde et concentrations. L'étude dut naturellement se restreindre aux liquides ayant une conductibilité électrique suffisante.

§ 2. Dispositif expérimental.

a) *Circulation du liquide.* La forme primitive du compteur hydraulique emploie un jet d'eau horizontal, provenant de la conduite d'eau et s'écoulant sous l'action d'une pression de $\frac{1}{2}$ atmosphère. Afin de pouvoir mesurer l'effet photoélectrique de différents liquides, il était nécessaire de rendre le dispositif utilisable pour une quantité restreinte de liquide. De plus, il fallait rendre la pression et la grosseur du jet aussi constantes et reproductibles que possible. Ceci fut obtenu par l'utilisation d'un filet de liquide s'écoulant librement, sous l'action constante de la pesanteur, hors d'un tube placé verticalement. Un système automatique de circulation permettait une mesure continue. Le dispositif adopté finale-

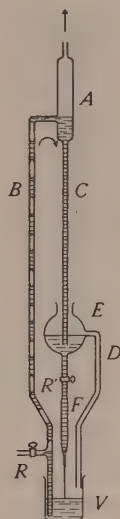


Fig. 1.

ment est représenté par la figure 1. L'appareil est construit entièrement en verre, pour éviter le plus possible une transformation chimique des solutions à étudier, et aussi pour permettre un nettoyage suffisant lors du changement de solution. Le cylindre supérieur A est relié à une trompe à eau. Le liquide du récipient V est aspiré et monte par le tube C; l'introduction de l'air nécessaire à cela peut être réglée par le robinet R (principe de la pompe automatique Sprengel). Le liquide s'écoule alors par le tuyau B dans le récipient E, et est maintenu à un niveau constant par le tube D. De la sorte, la pression du liquide est stabilisée. Le débit du jet est réglable par le robinet R'.

La quantité de liquide nécessaire au fonctionnement de l'appareil était de 250 cm^3 . Toutes les solutions étudiées avaient une température d'environ 15°C .

b) *Jet de liquide et disposition des électrodes.* Pour que le fonctionnement soit stable, il était nécessaire d'obtenir un filet de liquide aussi tranquille que possible. De nombreux essais ont été effectués avec des tubes plus ou moins rétrécis, et avec des vitesses d'écoulement différentes. Une tentative de guider le jet à l'aide d'une fine baguette de verre (d'environ $\frac{3}{4} \text{ mm.}$ de diamètre) n'apporta pas d'amélioration, et de plus la difficulté de placer cette baguette exactement au milieu du liquide était grande. Finalement, un tube peu rétréci à son extrémité, ainsi qu'une faible vitesse

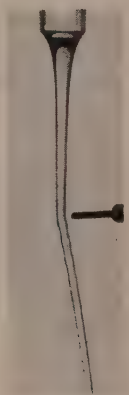


Fig. 2.

d'écoulement, ont été trouvés préférables. D'autre part, comme le robinet rend l'écoulement turbulent, le tube a été choisi gros et long, afin que le liquide y séjourne longtemps, et que, par conséquent, la turbulence diminue.

Le débit du liquide a été choisi de $1,5 \text{ cm}^3/\text{sec}$. A une distance de 3 cm. au-dessous de l'ouverture du tube, le diamètre du jet était alors de 0,169 cm., d'où, à cet endroit, une vitesse moyenne d'écoulement de 67 cm./sec.

Le temps mis par le liquide pour aller de l'ouverture du tube jusqu'à 3 cm. au-dessous a été évalué à environ 0,17 sec. Pour ce calcul approximatif, le jet (fig. 2) a été divisé en 3 cylindres successifs de 1 cm. de longueur. En réalité, l'écoulement n'était pas uniforme; il était un peu plus faible vers la circonférence qu'au centre. L'âge de la surface du jet, à 3 cm. au-dessous du tube, était donc un peu plus élevé que 0,17 sec.

Le liquide formait l'une des deux électrodes entre lesquelles jaillissaient les étincelles; l'autre était constituée par un fil de platine de 1 mm. de diamètre (fig. 2), dont l'extrémité avait été arrondie en forme d'hémisphère. Cette dernière électrode fut polie avant chaque mesure à l'aide d'un papier d'émeri très fin.

c) *Circuit de haute tension.* La tension de quelques milliers de volts, nécessaire au fonctionnement de l'appareil, était fournie par un redresseur à lampe (voir fig. 3). Comme elle devait être très constante, un stabilisateur *S* (Fix-Volter) était placé avant le redresseur. Un filtrage soigné supprimait toute composante alter-

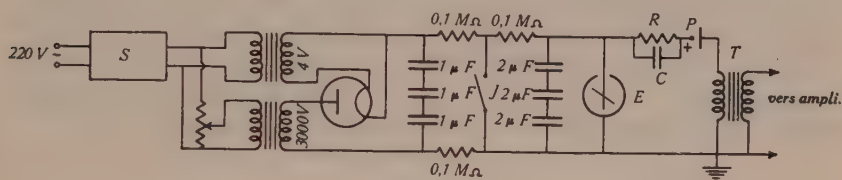


Fig. 3.

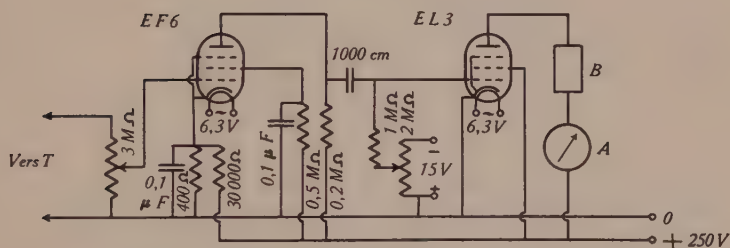


Fig. 4.

native. La tension redressée était mesurée à l'aide d'un électromètre à haute tension de Wulf *E* (E. LEYBOLD, Cologne). Celui-ci n'était mis en circuit que lors de la lecture, pour éviter une déformation du fil, provoquée par l'action prolongée de la tension, et remplacé par un électromètre de Braun en vue de contrôles intermédiaires. Un interrupteur *J* permettait de décharger les condensateurs. *C* était un condensateur à air, constitué par deux plaques circulaires de distance réglable à l'aide d'une vis micrométrique. Toutes les mesures furent faites pour une capacité de 14 pF. *R* était une résistance de $10^8 \Omega$ de fabrication Siemens.

Le pôle positif de la haute tension était appliqué, à travers l'ensemble *CR*, à l'électrode de platine, tandis que le jet était relié à la terre par l'intermédiaire du primaire d'un transformateur *T* (rapport 1:3) servant de liaison avec l'amplificateur.

d) *Dispositif d'enregistrement.* Les impulsions produites par les étincelles étaient amplifiées par 2 lampes (fig. 4), puis comptées à l'aide d'un compteur de communications téléphoniques *B* (fabrication Hasler, Berne). Un courant de 30 mA était nécessaire pour attirer l'armature de l'électroaimant du compteur, qui était relâchée lorsque le courant baissait à environ 12 mA. Le courant anodique de la lampe finale EL3 de l'amplificateur devait donc varier entre ces deux limites. Le courant de repos fut réglé à 12 mA, à l'aide d'un potentiomètre agissant sur la polarisation de la grille de commande de la EL3, et contrôlé par l'ampèremètre *A*. Un potentiomètre, placé en parallèle sur le secondaire du transformateur *T*, permettait de régler l'amplitude des impulsions appliquées à la première grille de la lampe d'entrée EF6 de l'amplificateur, de telle façon que, lors de chaque étincelle, l'intensité monte jusqu'à 30 mA dans le circuit anodique de la EL3. La tension anodique utilisée par l'amplificateur provenait d'un redresseur.

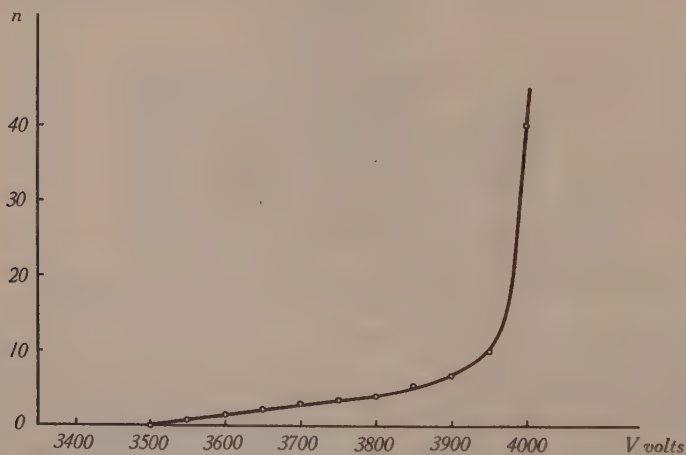


Fig. 5.

Nombre de décharges naturelles en fonction de la tension.

§ 3. Influence de la haute tension et de la position de l'anode sur les conditions de fonctionnement.

Il existe un intervalle ΔV entre un potentiel minimum V_{\min} et maximum V , dans lequel les particules ionisantes provoquent des étincelles. Dans cet intervalle, il se produit de temps en temps des étincelles non provoquées (décharges naturelles) dont le nombre croît avec la tension (fig. 5) d'abord lentement, puis tout à coup

plus rapidement. L'endroit où la courbure est la plus forte peut être choisi pour V .

Il est avantageux de régler l'appareil de façon à ce que ΔV soit le plus grand possible. Dans ce but, de nombreux essais ont été faits, pour différentes distances H (voir tableau 1) entre l'anode et l'ouverture du tube. Les mesures ont montré que pour H petit (2 cm. ou moins), ΔV est également petit (< 50 V), et que des décharges naturelles apparaissent brusquement et en grandes quantités quand la tension croît. De plus, une étincelle en entraîne un grand nombre à sa suite. Au contraire, pour H grand (4 cm. ou plus) le nombre d'étincelles naturelles augmente progressivement avec la tension, et V n'est pas bien défini. Les décharges naturelles proviennent dans ce cas de petits mouvements inévitables du jet, qui augmentent avec H , rendant ainsi par moment la distance entre les électrodes plus petite.

Le tableau 1, établi pour $V = 4000$ volts, montre que ΔV atteint son maximum pour 3 ou 3,5 cm.

Tableau 1.

H (cm.)	ΔV (volts)
2	0
2,5	130
3	450
3,5	450
4	350

La hauteur $H = 3$ cm. a été choisie comme étant la plus favorable, le nombre de décharges naturelles étant inférieur à celui obtenu pour $H = 3,5$ cm., et toutes les mesures du présent travail ont été faites pour cette valeur.

La tension appliquée à l'anode joue également un rôle important. Pour $V = 2000$ volts, ΔV est très petit ou nul. Lorsque V augmente (ceci est obtenu en accroissant la distance entre le liquide et l'anode à l'aide d'une vis micrométrique), ΔV augmente aussi. Cependant, vers 4000 ou 4500 volts, une décharge spontanée et continue, reconnaissable à une lueur bleue, apparaît à l'extrémité de l'anode, et le fonctionnement devient mauvais.

STUBER¹⁷⁾ a également constaté que ΔV croît avec la distance entre les électrodes (ou, ce qui revient au même, avec V) jusqu'à une certaine limite, pour diminuer ensuite sous l'effet de décharges (effluves).

Pratiquement, il faudra choisir la distance entre les électrodes telle que le potentiel maximum ne soit pas supérieur à 4000 V . Comme V est mal défini, et que, par contre, la tension V_{\min} pour laquelle l'effet de comptage apparaît est bien marquée, le réglage fut fait de la façon suivante: Une tension de 3500 V fut appliquée, et la distance entre les électrodes diminuée jusqu'au point où les particules ionisantes provoquaient des étincelles. ΔV étant de 450 volts, V était alors de 3950 volts.

Pour les mesures, la tension de fonctionnement V_0 fut choisie entre 3500 et 3950 volts. Comme la figure 6 le montre, la sensibilité

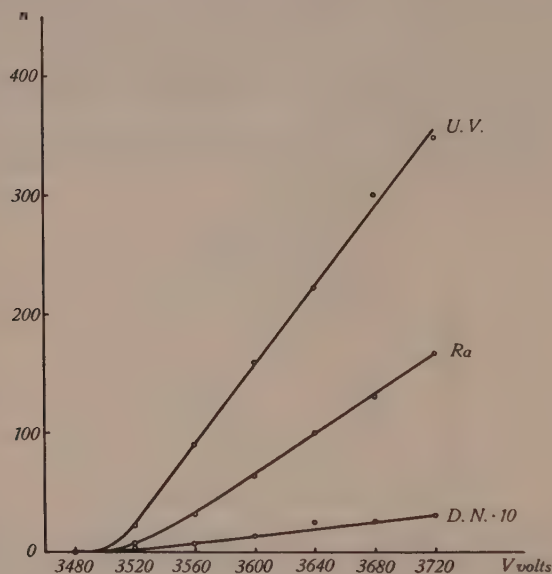


Fig. 6.

$$n = j(V)$$

U.V.: avec lumière ultra-violette Ra: avec Radium D.N.: décharges naturelles

de l'appareil, c'est-à-dire le nombre d'étincelles n pour un certain rayonnement, augmente avec V_0 , mais le nombre d'étincelles naturelles augmente également.

Pour toutes les mesures, V_0 a été choisi égal à 3600 volts, donc de 100 volts supérieur à V_{\min} .

Dans ces conditions, la distance entre l'anode et le liquide était, en l'absence de tension, de 0,098 cm., et pour $V_0 = 3600 V$, de 0,071 cm.

La fig. 2 montre la déviation du jet sous l'effet de l'attraction électrostatique.

§ 4. Déplacement du jet.

Il est remarquable que le phénomène de comptage puisse avoir lieu avec une électrode liquide, alors que ce n'est pas le cas pour une électrode solide (métallique) humide. Il faut supposer que le déplacement du filet de liquide, dû à l'attraction électrostatique, en est la cause. Pour démontrer cette hypothèse, l'expérience suivante a été réalisée: un écran en laiton de 3 cm. de diamètre, percé en son centre d'un trou circulaire, a été placé entre l'anode et le jet, cet écran ayant pour but d'éviter une forte attraction, tout en permettant aux étincelles de jaillir entre l'anode et le liquide. L'ouverture était suffisamment grande pour que les étincelles n'atteignent pas l'écran (fig. 7).

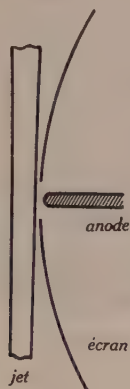


Fig. 7.

Les résultats furent les suivants:

- pour $V_e = 2500\text{ V}$: pas de comptage, suite d'étincelles
- » » = 3000 V : comptage faible
- » » = 3500 V : comptage très faible
- » » = 4000 V : pas de comptage, suite d'étincelles.

Comme on le voit, une élévation de la tension n'apporta pas d'amélioration de l'effet de comptage, comme ce fut le cas précédemment (§ 3). Plus la tension était élevée, plus l'anode devait être éloignée du jet, et plus l'action de l'écran était efficace. Pour de fortes tensions, le jet n'était presque plus dévié, alors qu'une déformation distincte se produisait pour $V < 3000$ volts. Mais, dans ce dernier cas également, le fonctionnement était mauvais, la tension étant trop faible, comme on l'a vu au paragraphe précédent. La disparition de l'effet de comptage pour des tensions plus élevées

n'avait donc lieu que dans le cas de l'action de l'écran, c'est-à-dire de la non déviation du jet. Ceci confirme l'hypothèse selon laquelle le déplacement du jet, dû à la chute de tension provoquée par une étincelle, est nécessaire au fonctionnement.

§ 5. Pouvoir de résolution.

Pour que les mesures faites avec l'appareil décrit ci-dessus aient une valeur pratique, il est nécessaire de savoir :

- 1° si toutes les étincelles sont enregistrées par le compteur;
- 2° quel est le temps le plus court qui sépare deux étincelles (pouvoir de résolution).

Pour vérifier l'égalité du nombre d'étincelles et du nombre enregistré par le compteur, un oscillographe cathodique fut utilisé. A cet effet, un électrocardiographe, construit d'après les plans du Prof. LIECHTI*), s'est révélé très pratique. Il était muni de deux tubes à rayons cathodiques, l'un à fluorescence verte, et l'autre à fluorescence bleue, et permettait donc simultanément l'observation directe et l'enregistrement photographique. Les impulsions produites par les étincelles furent appliquées à l'une des deux paires de plaques défectrices de chacun des tubes. Pour séparer les étincelles les unes des autres, une oscillation de relaxation fut appliquée à la seconde paire de plaques du tube destiné à l'observation directe. Pour l'enregistrement, cette séparation fut obtenue par l'avancement du papier sensible devant le tube à fluorescence bleue.

Les impulsions appliquées à l'oscillographe furent tout d'abord prises à l'entrée de l'amplificateur du compteur. Mais une réaction de cet amplificateur sur l'oscillographe était à craindre. Or, on sait (GREINACHER⁴), STUBER¹⁷) que pour chaque étincelle, il se produit une chute de tension entre les électrodes. L'oscillographe fut alors relié capacitivement à l'anode, au point *P* (fig. 3), à l'aide d'un condensateur formé par un fil de 2 cm. de longueur placé parallèlement au conducteur reliant l'anode à la résistance *R*. Pour éviter les perturbations, les fils de liaison furent enfermés dans un blindage relié à la terre.

Les étincelles furent ainsi enregistrées sur de longues bandes de papier photographique spéciales pour cardiographe (fabrication Siemens) (voir les 4 lignes supérieures de la fig. 8). L'oscillation régulière que l'on voit est une marque de temps à 50 p. p. s. Remarquons que les différentes amplitudes des elongations proviennent

*) Je tiens à remercier ici Monsieur le Professeur Dr. Liechti d'avoir eu l'amabilité de mettre cet appareil à ma disposition.

de la superposition des impulsions dues aux étincelles à l'oscillation de 50 p. p. s. Les impulsions elles-mêmes auraient toutes environ la même amplitude.

Pour un deuxième contrôle, le déplacement du jet, qui se produit lors de chaque étincelle, et qui est dû à la chute de potentiel, fut enregistré photographiquement. Le dispositif était le même que celui employé par GREINACHER⁴). La 5^{me} ligne de la fig. 8 repré-

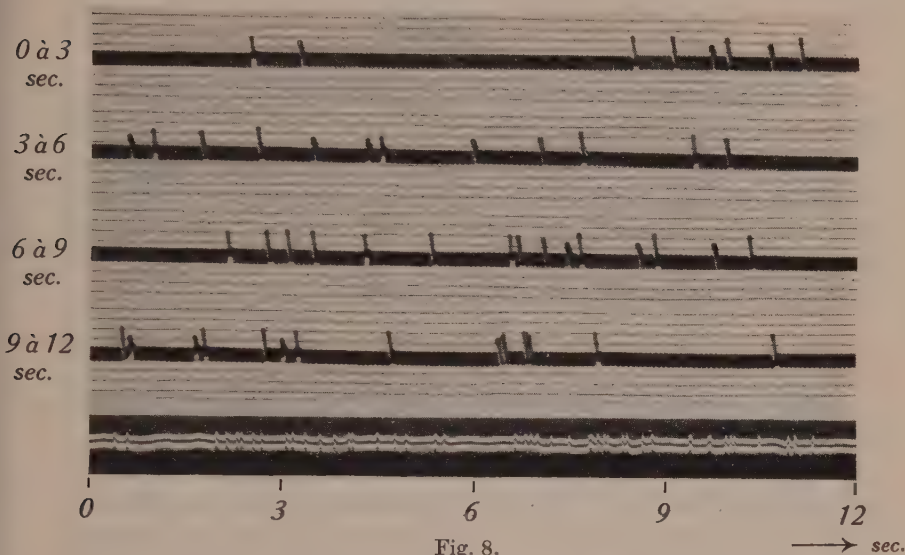


Fig. 8.

sente l'enregistrement obtenu pendant le même intervalle de temps que pour les lignes 1 à 4. On peut constater qu'il y a concordance entre les deux résultats. Toutefois, pour des intervalles de temps trop petits, les déplacements du jet ne sont plus séparés (voir par exemple entre la 9^{me} et la 12^{me} seconde). L'oscillographe cathodique possède donc un pouvoir de résolution plus grand.

Comme le nombre d'étincelles enregistrées par ces deux méthodes et celui indiqué par le compteur étaient égaux, il est possible d'affirmer que toutes les étincelles étaient comptées.

La partie ayant la plus grande constante de temps n'est donc pas le compteur lui-même, mais l'ensemble formé par C , R et le jet d'eau.

Pour évaluer le temps le plus court entre deux étincelles, on pourrait mesurer la distance séparant les deux étincelles les plus rapprochées, sur un enregistrement où la fréquence est très grande. Mais cette méthode manque de précision.

D'après MAYER-LEIBNITZ¹⁸), un compteur peut obéir à l'une des deux statistiques suivantes :

α) après une étincelle, le compteur est bloqué pendant un temps τ , et les particules ionisantes qui arrivent pendant ce temps n'agissent pas, d'où un nombre d'étincelles trop faible. La formule de correction statistique est, dans ce cas :

$$N_{\tau} = \frac{N_0}{1 + N_0 \tau} \quad (1)$$

où N_{τ} est le nombre enregistré et N_0 le nombre vrai, par unité de temps dans laquelle τ est mesuré.

β) le compteur est aussi bloqué pour un temps τ après une étincelle, mais si, pendant cet intervalle, une particule arrive, il faut compter un nouvel intervalle τ à partir de l'incidence de cette particule, avant que le compteur soit de nouveau apte à enregistrer. Dans ce cas, la formule de correction est :

$$N_{\tau} = N_0 e^{-N_0 \tau} \quad (2)$$

Pour de faibles valeurs du produit $N_0 \tau$, la formule (2) est équivalente à (1).

Les deux cas extrêmes ci-dessus ne sont jamais réalisés. En pratique, on a toujours à faire à un cas intermédiaire; mais l'erreur commise en prenant l'une des deux formules ci-dessus, par exemple la première, n'est pas grande, puisque pour de faibles valeurs de N , les deux formules donnent à peu près la même correction.

Pour déterminer τ , on peut utiliser un rayonnement très intense; il est alors permis d'admettre que les étincelles se succéderont à un rythme régulier, et que leur nombre sera le plus grand possible. Dans ce cas, on a pour τ :

$$\tau = \frac{1}{N_{\infty}} \quad (3)$$

Par cette méthode, et avec une forte préparation de Ra , τ a été trouvé égal à 0,03 seconde.

Une autre méthode, préconisée par Volz¹⁹) est la suivante: on mesure les nombres d'étincelles provoquées :

- a) par une 1^{re} préparation de Ra
- b) par une 2^e préparation de Ra
- c) par les deux préparations réunies.

Soient n_1 , n_2 et n_{12} les nombres mesurés respectivement avec les préparations I, II et I+II, et N_1 , N_2 les nombres corrigés. On a alors :

$$n_1 = \frac{N_1}{1+N_1\tau}, \quad n_2 = \frac{N_2}{1+N_2\tau}, \quad n_{12} = \frac{N_1+N_2}{1+(N_1+N_2)\tau} \quad (4)$$

De ces 3 équations, on peut tirer τ :

$$\tau = \frac{1}{n_{12}} - \sqrt{\frac{1}{n_{12}^2} - \frac{n_1+n_2-n_{12}}{n_1 n_2 n_{12}}} \quad (5)$$

Les mesures effectuées par cette méthode ont donné des valeurs s'échelonnant entre 0,022 et 0,035 sec. (voir fig. 9). Comme

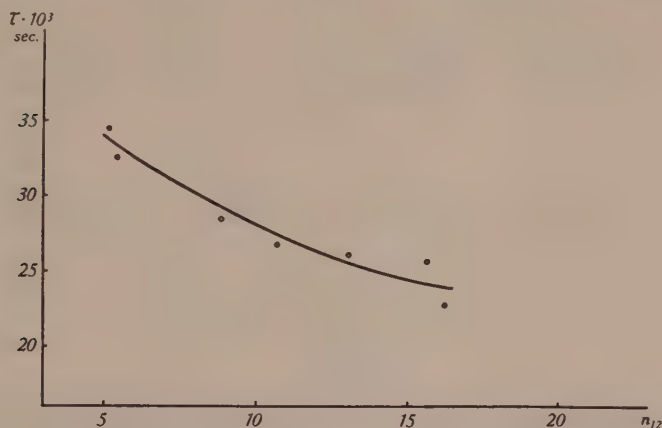


Fig. 9.
 $\tau = f(n_{12})$.

on le remarque, τ diminue lorsque n_{12} augmente. Il faut attribuer cela aux mouvements du jet, qui deviennent de plus en plus faibles, lorsque la fréquence des étincelles augmente. Le temps nécessaire au jet pour revenir dans sa position normale diminue alors, d'où une augmentation du pouvoir de résolution.

Constante de temps et C. Le produit CR est beaucoup plus petit que la valeur trouvée pour τ . Pourtant, n dépend de C , pour un rayonnement donné. On peut expliquer ce phénomène comme suit : la chute de tension, lors d'une étincelle, varie avec la capacité C . Il en est alors de même du déplacement du jet, d'où une variation de la constante de temps. Des variations du déplacement ont effectivement pu être observées. La fig. 10 montre la variation de n en fonction de C , pour un rayonnement constant.

§ 6. Mesures avec de la lumière ultra-violette.

a) *Sources lumineuses.* Jusqu'ici, le rayonnement d'une préparation de radium a servi aux essais relatifs au fonctionnement de l'appareil. Les mesures suivantes, qui s'occupent plus particulièrement de l'effet photoélectrique, ont été faites avec des sources de rayons ultra-violets (lampes à vapeur de mercure, étincelles entre électrodes métalliques).

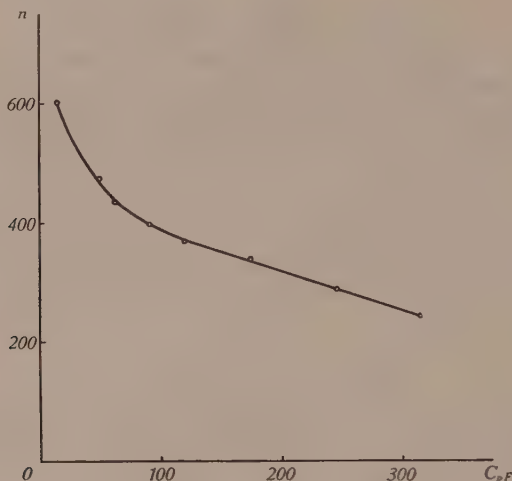


Fig. 10.

$$n = f(C).$$

I. *Lampe à vapeur de Hg, à courant continu, de Heraeus (HANAU).* Cette lampe a servi à la plupart des mesures. Elle était alimentée par une batterie de 60 V. Une résistance limitait le courant à 2,5 A; un ampèremètre permettait de contrôler cette intensité.

II. *Lampe à vapeur de Hg, à courant alternatif.* L'ampoule, en quartz, provenait de la fabrique de lampes de Goldau. L'allumage automatique était assuré par un remplissage gazeux à faible pression. Une tension de 390 V, fournie par un transformateur à noyau magnétique ouvert (LANDIS et GYR, Zoug) servait à l'alimentation de la lampe. L'intensité du courant était d'environ 2 A.

III. *Étincelles entre électrodes métalliques.* Dans le but d'obtenir des étincelles intenses, un transformateur de 220/3000 V avec une bouteille de Leyde en parallèle sur le secondaire fut utilisé (fig. 11). Une deuxième bouteille de Leyde placée en série dans le circuit servait à limiter le courant. Un essai a aussi été effectué avec des résistances formées par des verres remplis d'eau distillée, mais celle-ci s'échauffait et s'évaporait, empêchant un fonctionnement

régulier. Comme électrodes, des baguettes métalliques (de fer ou d'aluminium) de 3 mm. de diamètre et distantes de 1 mm. furent utilisées.

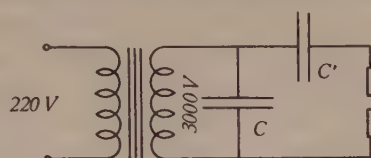


Fig. 11.

La constance de l'intensité lumineuse fut contrôlée à l'aide d'un élément photoélectrique au sélénium et d'un galvanomètre. Un filtre à l'oxyde de nickel ne laissant passer que les rayons ultra-violets fut placé entre la source lumineuse et la cellule, afin d'arrêter les rayons visibles, dont l'intensité peut varier d'une façon différente de celle des rayons ultra-violet.

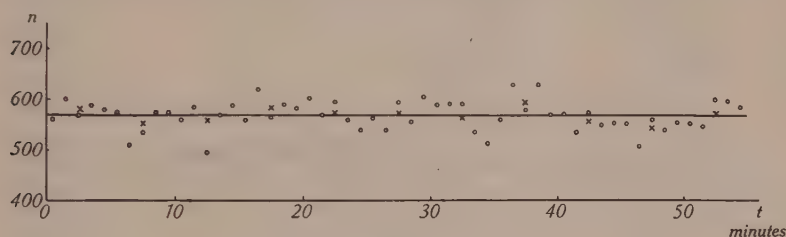


Fig. 12.

$$n = f(t) \quad \text{KI, arc de Hg.}$$

o = moyenne pendant 1 minute x = moyenne pendant 5 minutes.

La constance de fonctionnement de l'ensemble source lumineuse — compteur fut également contrôlée; la fig. 12, pour laquelle la lampe à vapeur de mercure N° I a été utilisée, montre clairement que le fonctionnement de l'appareil est stable, et que les écarts sont de nature statistique.

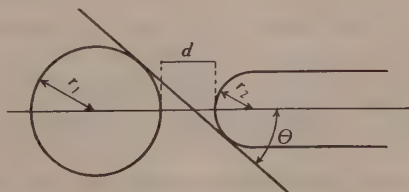


Fig. 13.

$$r_1 = 0,085 \text{ mm.} \quad r_2 = 0,05 \text{ mm.} \quad d = 0,07 \text{ mm.} \quad \Theta = 42^\circ.$$

b) Recherche de l'angle d'incidence le plus favorable. L'angle Θ que forme le faisceau lumineux avec l'axe de l'anode (fig. 13) a

une grande importance pour la sensibilité de l'appareil. Pour un angle trop grand, la partie du jet se trouvant vis-à-vis de l'anode est trop peu éclairée et pour un angle trop petit, l'anode projette son ombre sur le jet. La courbe donnant n en fonction de θ (fig. 14) montre que l'angle optimum est de 42° , ce qui correspond aux conditions représentées par la fig. 13.

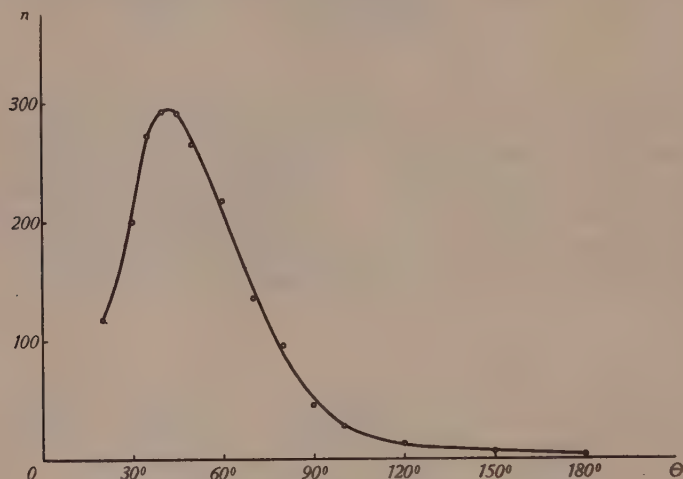


Fig. 14.

$$n = f(\theta).$$

Pour toutes les mesures suivantes, un angle de 45° , peu différent et plus facile à réaliser, fut choisi.

§ 7. Mesures comparatives de l'effet photoélectrique pour différentes solutions.

Les solutions aqueuses de plusieurs composés chimiques (sels, acides, bases) ont été étudiées. Comme le but de ces mesures était simplement de chercher quelles solutions présentent une activité notable, 1 gramme seulement de chaque substance a été dissous dans 250 cm^3 d'eau distillée, ce qui correspond à une concentration de 0,4%; cependant, les acides ont été dilués à raison de 3 cm^3 d'acide concentré pour 250 cm^3 d'eau. Les mesures, effectuées à l'aide de la lumière d'une lampe à vapeur de Hg, donc de longueurs d'onde supérieures à $200 \text{ m}\mu$ environ, ont donné les valeurs indiquées par le tableau 2. L'activité de la plupart des solutions est égale ou n'est que peu supérieure à celle de l'eau. Pour connaître l'activité avec plus de précision, il serait nécessaire d'augmenter la concen-

tration des solutions. Pour chaque solution, les mesures ont été effectuées pendant au moins 3 minutes. Les valeurs moyennes pour 1 minute indiquées dans le tableau peuvent avoir une erreur atteignant ± 2 unités, pour 20 étincelles environ, causée par des écarts statistiques et par de légères différences dans le réglage de la distance entre les électrodes. Les nombres qui ne diffèrent pas de plus de 2 unités de celui trouvé pour l'eau pure (et déterminé avec plus de précision) (18) ne permettent donc pas de conclure si la substance dissoute produit une variation de l'effet photoélectrique. De

Tableau 2.

Substance	1 <i>n</i>	2 <i>n</i> -18	3 nombre par Mol	Substance	1 <i>n</i>	2 <i>n</i> -18	3 nombre par Mol
KClO ₃	18	0	—	CuSO ₄ ·5H ₂ O . .	16	-2	—
HCl	18	0	—	Na ₂ HPO ₄ ·12H ₂ O	21	3	700
NaCl	17	-1	—	Li ₂ CO ₃ *)	25	7	500
KCl	18	0	—	Na ₂ CO ₃ *)	28	10	1100
BaCl ₂	19	1	—	K ₂ CO ₃ *)	33	15	2100
FeCl ₃ ·6H ₂ O . .	18	0	—	NaHCO ₃	22	4	300
CuCl ₂	16	-2	—	KHCO ₃	21	3	300
KBr	20	2	—	(NH ₄) ₂ CO ₃ . . .	20	2	—
NH ₄ Br	22	4	400	Fe(CN) ₆ K ₄	>500	>500	>180000
LiI	30	12	1600	Fe(CN) ₆ K ₃	100	82	27000
NaI	31	13	1900	H ₂ O	18	—	—
KI	32	14	2300	NaOH	18	0	—
CdI ₂	31	13	3100	KOH	17	-1	—
NaNO ₂	18	0	—	K ₂ Cr ₂ O ₇	17	-1	—
HNO ₃	18	0	—	ac. oxalique . . .	18	0	—
KNO ₃	20	2	—	ac. acétique . . .	18	0	—
NH ₄ NO ₃	21	3	200	ac. citrique . . .	18	0	—
H ₂ SO ₄	18	0	—	ac. tartrique . . .	19	1	—
Na ₂ SO ₄	18	0	—	ac. formique . . .	17	-1	—
FeSO ₄ ·7 H ₂ O . .	22	4	1100	sel. de Seignette	21	3	624
Fe(NH ₄) ₂ (SO ₄) ₂ · 6H ₂ O	26	8	3100	oxalate de Na . .	23	5	670

*) Les valeurs indiquées pour les carbonates ne peuvent pas être comparées entre elles, à cause du comportement particulier de ces sels (voir § 10).

même, il n'est pas possible de dire si les faibles valeurs négatives obtenues pour quelques-unes des différences *n*-18 correspondent vraiment à une diminution de l'activité de l'eau. Dans le but de pouvoir comparer les activités du même nombre de molécules pour chaque substance, les valeurs *n*-18 ont été multipliées par le poids

*

moléculaire de la substance correspondante, pour autant que ces différences dépassent 2. Comme le tableau le montre, le ferrocyanure et le ferricyanure de potassium ont un effet photoélectrique considérable. Les autres substances, à part les iodures et les carbonates, ne sont que peu ou même pas actives. Il y a lieu toutefois de remarquer l'activité relativement grande du Fe SO_4 et du $\text{Fe (NH}_4)_2 (\text{SO}_4)_2$, alors que celle d'autres sulfates (Na_2SO_4 , CuSO_4) est nulle. Parmi les substances organiques étudiées, quelques-unes seulement se sont révélées actives, mais dans une faible mesure.

Si l'on compare les iodures et les carbonates de K, Na et Li, on voit que le nombre d'étincelles est plus grand pour les sels de K que pour ceux de Na, et plus grand pour ceux de Na que pour ceux de Li. De même, les iodures sont plus actifs que les bromures, qui sont à leur tour plus actifs que les chlorures.

L'eau distillée n'étant pas suffisamment conductrice, il fut impossible de l'étudier. Dans le but de mesurer tout de même son activité, une goutte d'acide sulfurique concentré lui fut ajoutée. L'acide sulfurique fut trouvé inactif, ainsi qu'en témoigne le tableau 2. Il est donc permis d'admettre que la goutte d'acide ajoutée, tout en augmentant la conductibilité de l'eau, n'a pas modifié son effet photoélectrique. La valeur $n = 18$ obtenue de cette manière peut donc être attribuée à l'eau pure. Comme cette valeur est la même que celle obtenue pour l'eau du robinet, on peut admettre que de petites quantités de sels dissous, tels que $\text{Ca (HCO}_3)_2$ n'ont pas d'action visible.

§ 8. Ferrocyanure de potassium.

Les mesures avec le $\text{Fe (CN)}_6\text{K}_4$ ont été effectuées dans deux directions :

a) *Influence de la longueur d'onde de la lumière.* Comme l'effet photoélectrique du ferrocyanure de K est particulièrement élevé, il fut possible de l'étudier en fonction de la longueur d'onde. La décomposition spectrale de la lumière fut effectuée à l'aide d'un monochromateur au quartz, avec prisme à déviation constante de 90° (C. LEISS, Berlin). Malheureusement, le rapport d'ouverture n'était que de 1:5 environ, de sorte qu'il fut nécessaire, pour obtenir une intensité lumineuse suffisante, de choisir l'écartement des fentes d'entrée et de sortie du monochromateur relativement grand (1 mm.). Les rayons lumineux sortants furent concentrés sur le jet d'eau à l'aide d'une lentille de quartz de 10 cm. de distance focale. La distance entre la fente de sortie du monochromateur et

le jet était de 50 cm. La lampe à vapeur de Hg N° 1 fut tout d'abord utilisée comme source lumineuse.

Les courbes obtenues (pour différentes concentrations) à l'aide de la méthode décrite ci-dessus sont représentées par la fig. 15. Pour la concentration 0,4%, le nombre d'étincelles dépassait la limite de fonctionnement normal du compteur (ligne pointillée). L'effet photoélectrique est déjà visible, quoique faible, vers 250 m μ . Ceci provient de la grande sensibilité de la méthode utilisée. GÖRLICH¹¹⁾, au contraire, avait trouvé que l'effet ne débute que vers 203 ou 204 m μ . Lorsque λ diminue, l'effet augmente. Toutefois, à

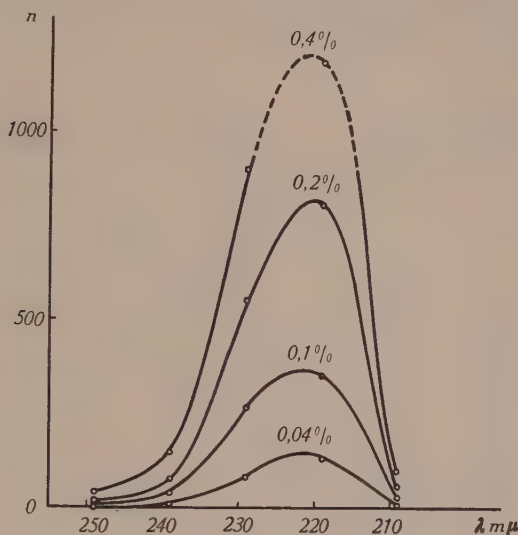


Fig. 15.

$\text{Fe}(\text{CN})_6 \text{K}_4$. $n = f(\lambda)$, arc de Hg.

partir de 220 m μ environ, n diminue. Ce phénomène ne provient pas d'une baisse de l'activité, mais de l'absorption des rayons lumineux par le quartz, qui devient rapidement opaque pour des longueurs d'onde inférieures à 220 m μ . Il aurait été intéressant de connaître l'intensité lumineuse sortant du monochromateur; mais comme elle était très faible, sa mesure en fonction de la longueur d'onde n'a pas été effectuée, en raison des difficultés soulevées par ce problème.

Des étincelles entre électrodes de Fe, comme source lumineuse, conduisirent à des courbes de même allure que celles de la fig. 15. Par contre, les mesures effectuées avec des étincelles entre élec-

trodes de Al ont conduit à des courbes beaucoup plus accidentées, à cause du faible nombre de lignes du spectre de Al. La fig. 16 montre, en même temps qu'une de ces courbes $n = f(\lambda)$, les lignes du spectre de Al, prises dans l'« Atlas typischer Spektren » (par EDER et VALENTA, Vienne). On peut voir une certaine concordance entre l'allure irrégulière de la courbe et le spectre discontinu. Le maximum vers 220 m μ , et correspondant aux lignes 221 et 220,5 m μ du spectre, est remarquable. Le nombre d'étincelles plus faible que celui obtenu avec la lampe à vapeur de mercure provient d'une intensité lumineuse moindre. Le rapport de l'intensité lumineuse de la lampe à vapeur de Hg N° 1 à celle des étincelles entre électrodes de Al était d'environ 200 à 1.

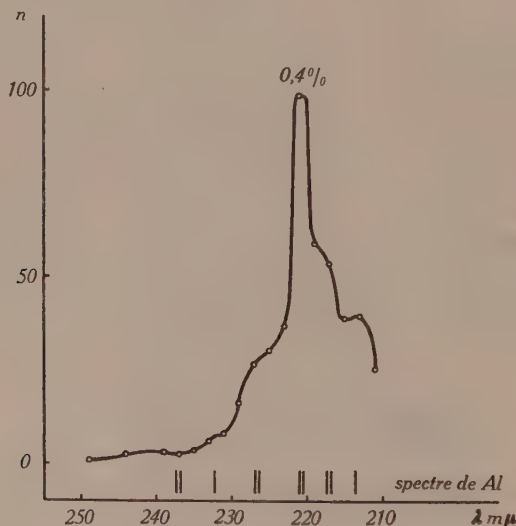


Fig. 16.
Fe (CN)₆ K₄. $n = f(\lambda)$, étincelles de Al.

b) *Effet photoélectrique et concentration.* Les mesures furent effectuées sans monochromateur et sans lentille. La lumière de la lampe à vapeur de mercure (N° II) fut envoyée directement sur le jet. Comme l'activité de la solution était très grande, il fut nécessaire de diminuer l'intensité lumineuse. A cet effet, un écran avec orifice circulaire de 0,7 mm. de diamètre fut placé devant la lampe, à une distance de 9 cm.; la distance entre la lampe et le jet était de 95 cm. La fig. 17 montre l'influence de la concentration sur le nombre d'étincelles par minute. Pour chaque concentration, le nombre indiqué est la moyenne des résultats obtenus pendant

10 minutes. Les valeurs mesurées conduisent à une ligne légèrement courbée. Si l'on corrige ces valeurs, en considérant le pouvoir de résolution, qui a été trouvé de 0,03 sec., et en utilisant la formule 2, on obtient alors pratiquement une droite. Celle-ci ne passe pas par l'origine, mais coupe l'axe des ordonnées en un point A, dont la distance à l'origine représente le nombre d'étincelles que l'on aurait obtenu pour l'eau pure, dans les mêmes conditions.

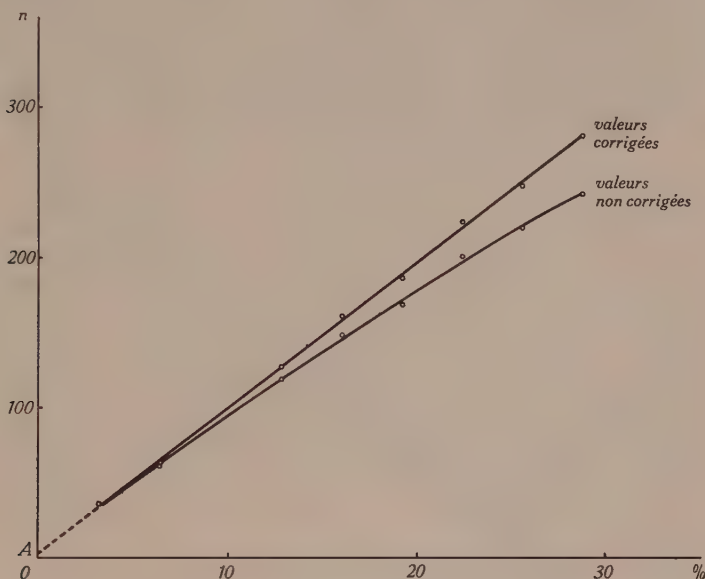


Fig. 17.



Le résultat acquis concorde jusqu'à un certain point avec celui de POOLE²⁰⁾, ZIMMERMANN¹⁵⁾ et BLANC²¹⁾, qui ont également trouvé une augmentation linéaire de l'activité d'une solution aqueuse de $\text{Fe(CN)}_6\text{K}_4$ avec la concentration. Toutefois, POOLE et ZIMMERMANN ont trouvé que pour des concentrations dépassant 17% environ, l'effet augmente plus fort que proportionnellement. Pour expliquer ceci, ZIMMERMANN attribue l'effet photoélectrique aux molécules non dissociées, dont le nombre augmente plus que proportionnellement avec la concentration. Les mesures, effectuées avec des surfaces liquides fraîches, ayant abouti à une proportionnalité, jusqu'à la concentration la plus forte étudiée (environ 30%), il faut admettre cette hypothèse comme non fondée.

§ 9. KI et solution d'iode dans KI.

a) *Iodure de potassium*. Comme l'activité du KI est beaucoup plus faible que celle du ferrocyanure de K, il ne fut pas possible d'étudier l'effet de la longueur d'onde. De plus, l'écran avec ouverture circulaire dut être enlevé, pour augmenter l'intensité lumineuse. Les mesures, pour différentes concentrations, conduisirent aux résultats représentés par la fig. 18. Après correction des valeurs obtenues, nécessité par le pouvoir de résolution restreint, on obtient de nouveau un accroissement pratiquement linéaire. Ici également, la droite coupe l'axe des ordonnées en-dessus de l'origine, à une distance correspondant au nombre d'étincelles que l'on aurait obtenu pour l'eau pure dans les mêmes conditions.

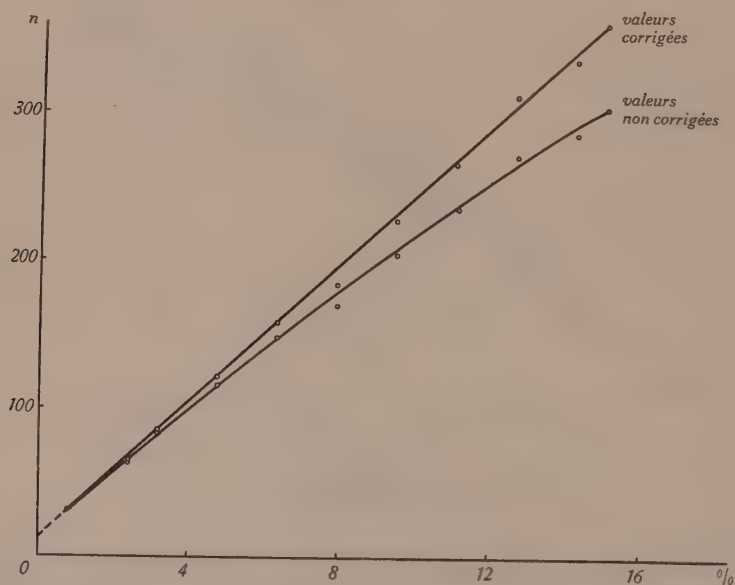


Fig. 18.
KI

D'après FRANCK et SCHEIBE²²⁾ et BUTKOW^{23) 24)}, l'effet photoélectrique du KI provient de l'ion d'iode. Ces auteurs se sont occupés, il est vrai, de l'effet photoélectrique interne. BUTKOW a montré que, pour les halogénés, l'effet a lieu suivant l'équation :

$$X^- + h\nu = X + e^-$$

où x^- représente les ions Cl^- , Br^- ou I^- , et a même démontré la formation d'iode libre sous l'action des rayons ultra-violet ; il n'est

toutefois pas arrivé à déceler la présence de Br et de Cl. L'absorption, qui débute déjà vers 270 m μ pour I et seulement vers 230 m μ pour Br et vers 210 m μ pour Cl, est cause de cette différence.

b) *Solution d'iode dans KI.* L'iode étant très peu soluble dans l'eau, une telle solution n'apporta pas d'effet photoélectrique notable. Des essais ont alors été faits avec une solution alcoolique d'iode ajoutée à de l'eau distillée. Mais les résultats obtenus ne furent pas constants, une partie de l'iode s'évaporant. De plus, toute mesure fut impossible pendant les deux premières minutes suivant la dissolution, à cause d'une suite d'étincelles spontanées. A titre d'indication, le nombre d'étincelles fut, entre la 6^{me} et la 7^{me} minute, d'environ 210, pour une concentration de 0,1 g d'I dans 20 cm³ d'alcool, le tout dans 250 cm³ d'eau.

Afin de pouvoir mesurer l'activité de l'iode d'une façon plus précise, la solubilité de I dans KI fut alors mise à profit, et 1 g. d'iode fut dissous dans une solution de 10 g. de KI dans 250 cm³ d'eau. Le nombre d'étincelles revenant aux 10 g. de KI (68) ayant été soustrait de celui obtenu pour la solution d'iode (148), il restait 80 étincelles pour l'iode. L'activité augmente donc beaucoup plus rapidement que l'augmentation de la teneur en iode (l'adjonction de 1 g. d'iode à 10 g. de KI correspond à une augmentation de 13% seulement de la quantité d'iode). Les mesures effectuées ne permettent cependant pas d'établir si l'augmentation de l'activité provient de l'iode libre ou de la combinaison entre l'iode et le KI.

§ 10. Carbonates de K, Na et Li.

a) *Influence de la concentration.* Les mesures mentionnées ci-après furent effectuées pour la plupart avec la lampe à vapeur de Hg N° II. Malgré l'activité beaucoup plus faible des carbonates que du ferrocyanure de potassium, une augmentation linéaire du nombre d'étincelles avec la concentration put être observée. La fig. 19 représente les résultats obtenus avec le carbonate de Na anhydre. Avec K₂CO₃, les mesures ne purent pas être effectuées jusqu'à des concentrations aussi fortes; à partir d'une certaine concentration, le compteur cessa de fonctionner normalement à cause de la production d'étincelles spontanées. C'est ainsi que 32 g. de K₂CO₃ dans 250 cm³ d'eau ne purent plus être étudiés, tandis que pour une concentration de moitié moindre, le compteur fonctionna encore normalement. Une telle anomalie ne fut observée pour aucune autre substance. Par contre, les carbonates présentèrent le phénomène inattendu décrit ci-après.

b) *Comportement particulier des carbonates.* L'activité d'une solution fraîchement préparée de K_2CO_3 diminuait progressivement, à partir d'une valeur initiale élevée, pour tendre vers une valeur finale constante. C'est ainsi que, pour une concentration de 16 g. de K_2CO_3 anhydre dans 250 cm³ d'eau, le nombre d'étincelles par minute passa de 180 à 115 (voir fig. 20, courbe supérieure, partie située à gauche de la flèche). La diminution était d'autant plus rapide que la concentration était plus grande. Ces faits laissaient supposer une variation progressive de la constitution de la solution. Pour contrôler ceci, la conductibilité électrique d'une solution

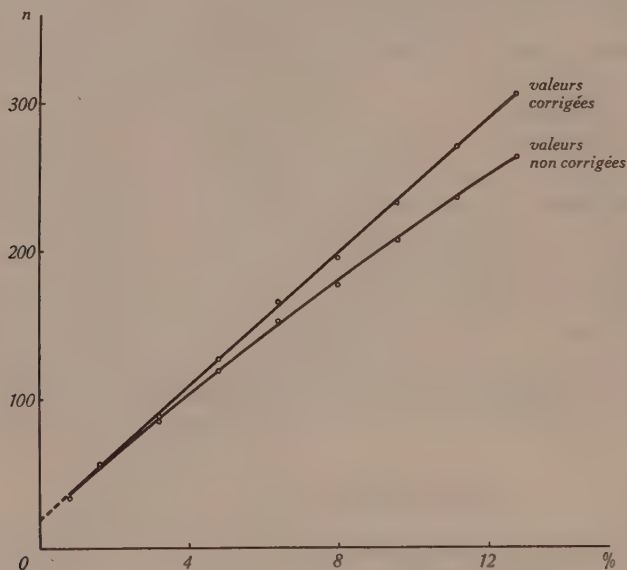


Fig. 19.

 Na_2CO_3

fraîchement préparée a été mesurée pendant près d'une heure. Cependant, aucune variation n'a pu être observée. L'effet de la température sur la variation a également été étudié. L'activité d'une solution nouvellement préparée, puis portée à ébullition, était déjà tombée à sa valeur la plus faible après refroidissement. D'autre part, il a été tenté de rétablir l'activité initiale par un traitement approprié. Le refroidissement jusqu'à congélation, suivi d'un réchauffement jusqu'à la température de l'air ambiant, n'apporta aucun changement. Par contre, l'évaporation de la solution et la dessiccation du sel conduisirent au but cherché. Après nouvelle dissolution du K_2CO_3 , le nombre d'étincelles reprit approximativement

la même valeur qu'après la première dissolution, et diminua de nouveau.

La transformation du carbonate en bicarbonate sous l'action du CO_2 de l'air fut tout d'abord supposée être la cause de la diminution. L'introduction de gaz carbonique dans la solution aurait alors dû produire le même effet. Elle eut effectivement pour conséquence une variation de l'activité. Cependant, au lieu de la diminution attendue, une augmentation fut observée. L'hypothèse selon laquelle la diminution de l'activité provenait de la formation d'un bicarbonate dut donc être écartée.

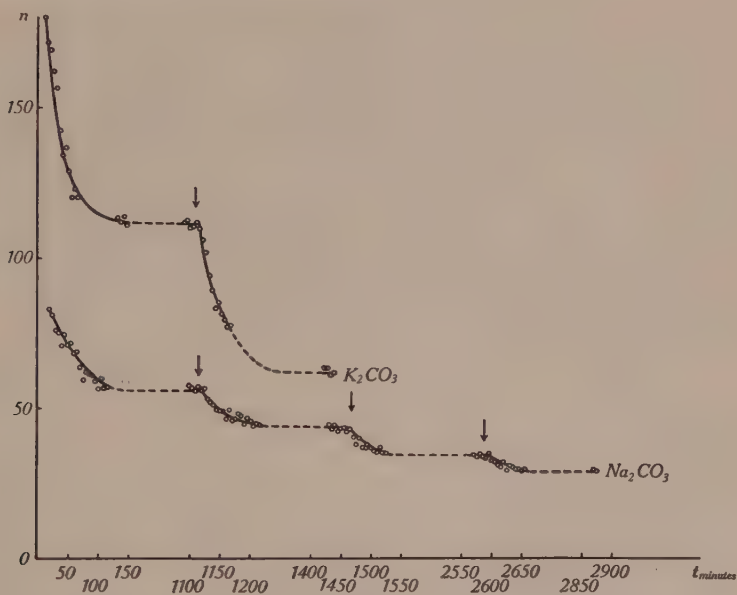


Fig. 20.

$$n = f(t).$$

Une autre possibilité d'explication est que certains carbonates contiennent des silicates comme impuretés. C'est ainsi qu'un carbonate de Na « pro analysi » (préparé par MERCK) peut en contenir jusqu'à 0,0025 %. Les silicates ont la propriété de passer progressivement à l'état colloïdal après dissolution. Si une pareille transformation s'est produite, elle doit disparaître lors de l'évaporation. Ceci permet de fonder une hypothèse au sujet de la diminution de l'activité photoélectrique des carbonates, et de sa régénération. Pour soutenir cette hypothèse, l'expérience suivante a été réalisée : Une solution de K_2CO_3 a été préparée, et son activité mesurée.

Lorsque celle-ci eut atteint sa valeur finale, une goutte de verre soluble fut introduite dans l'appareil. Comme le montre la fig. 20 (courbe supérieure, partie située à droite de la flèche), n diminua d'une façon tout à fait analogue à celle mentionnée plus haut. Un résultat semblable fut obtenu avec une solution de Na_2CO_3 (fig. 20, courbe inférieure), pour laquelle plusieurs gouttes de verre soluble furent introduites successivement. L'activité subit alors pour chaque goutte une diminution, qui devint de plus en plus faible, au fur et à mesure que le nombre de gouttes augmentait. Les flèches verticales que l'on voit sur la fig. 20 indiquent le moment où l'adjonction de verre soluble eut lieu.

L'explication des phénomènes relatés ci-dessus est d'autant plus compliquée que l'activité de certaines préparations de carbonates resta constante. La courbe de la fig. 19 se rapporte précisément à un tel carbonate. Sur 5 échantillons différents de K_2CO_3 , un seul eut une activité constante. Le sel en question était à l'état cristallin et légèrement humide. Deux échantillons différents de Na_2CO_3 furent étudiés. Les deux étaient anhydres. L'activité de l'un (conservé dans une bouteille fermée par un bouchon de liège) fut constante, et celle de l'autre (MERCK, pro analysi, dans une bouteille munie d'un bouchon à vis) diminua. Le seul échantillon de Li qui fut étudié présenta aussi la diminution en question.

L'explication de la diminution de l'activité photoélectrique, fondée sur l'action d'un silicate, semble être la plus probable. On peut chercher à se représenter cet effet comme suit: le colloïde de Na_2SiO_3 est chargé négativement; il repousse alors les photoélectrons venant depuis l'intérieur du liquide. Seuls les électrons venant de régions situées dans le voisinage immédiat de la surface peuvent sortir du jet. D'autre part, il se peut que le colloïde se répartisse sur le pourtour du jet, et non pas régulièrement sur toute sa section, ceci malgré le temps minime mis par le liquide pour s'écouler depuis la sortie du tube jusqu'à la hauteur de l'anode. Il en résulterait également une difficulté pour l'électron de s'échapper.

Une explication définitive de l'effet anormal des carbonates ne pourra être donnée qu'à la suite de nouvelles expériences.

Le présent travail m'a été suggéré par Monsieur le Professeur Dr. H. GREINACHER, et fut exécuté dans les laboratoires de l'Institut de physique de l'Université de Berne. Je me fais un plaisir et un devoir de remercier ici Monsieur le Professeur Dr. H. GREINACHER pour tout l'intérêt qu'il m'a témoigné, ainsi que pour ses précieux conseils.

Bibliographie.

- ¹⁾ E. WARBURG, Ann. d. Phys. **5**, 811, 1901.
 - ²⁾ J. HERWEG, Ann. d. Phys. **19**, 333, 1906.
 - ³⁾ J. HERWEG, Ann. d. Phys. **24**, 326, 1907.
 - ⁴⁾ H. GREINACHER, H. P. A. **7**, 360, 1934.
 - ⁵⁾ H. GREINACHER, H. P. A. **7**, 514, 1934.
 - ⁶⁾ H. GREINACHER, H. P. A. **8**, 89, 1935.
 - ⁷⁾ H. GREINACHER, H. P. A. **8**, 265, 1935.
 - ⁸⁾ H. GREINACHER, H. P. A. **9**, 590, 1936.
 - ⁹⁾ H. GREINACHER, Zs. f. tech. Phys. **19**, 132, 1938.
 - ¹⁰⁾ W. OBOLENSKY, Ann. d. Phys. **39**, 961, 1912.
 - ¹¹⁾ P. GÖRLICH, Ann. d. Phys. **13**, 831, 1932.
 - ¹²⁾ K. SCHÜTT, Ann. d. Phys. **13**, 712, 1904.
 - ¹³⁾ O. ROHDE, Ann. d. Phys. **19**, 935, 1906.
 - ¹⁴⁾ F. PLOGMEYER, Ber. d. D. Phys. Ges. **11**, 382, 1909.
 - ¹⁵⁾ W. ZIMMERMANN, Ann. d. Phys. **80**, 329, 1926.
 - ¹⁶⁾ L. COUNSON et A. MOLLE, Arch. sc. phys. et nat., **10**, 231, 1928.
 - ¹⁷⁾ R. STUBER, H. P. A. **12**, 109, 1939.
 - ¹⁸⁾ H. MAYER-LEIBNITZ, Phys. Zs. **43**, 333, 1942.
 - ¹⁹⁾ H. VOLZ, Zs. f. Phys. **93**, 539, 1935.
 - ²⁰⁾ J. H. J. POOLE, Phil. mag. **45**, 895, 1923.
 - ²¹⁾ A. BLANC, C. R. **190**, 674, 1930.
 - ²²⁾ J. FRANCK et G. SCHEIBE, Zs. f. phys. Chem. **139**, 22, 1928.
 - ²³⁾ K. BUTKOW, Zs. f. Phys. **62**, 71, 1930.
 - ²⁴⁾ K. BUTKOW, Verh. d. opt. Inst. Leningrad **8**, N° 79, 6 S., 1932.
-

Elektrooptische Eigenschaften der seignette-elektrischen Kristalle KH_2PO_4 und KD_2PO_4

von Benno Zwicker und Paul Scherrer.

(14. VI. 1944.)

Zusammenfassung: An dem im tetragonalen System kristallisierenden seignette-elektrischen Kristallen KH_2PO_4 und KD_2PO_4 wird der Temperaturgang der natürlichen Doppelbrechung und der Einfluss eines elektrischen Feldes auf die Doppelbrechung, also der Kerreffekt, gemessen.

Besonders interessant ist das optische Verhalten dieser Salze bei der Curie-temperatur und unterhalb derselben, wo mit dem Auftreten einer spontanen elektrischen Polarisation sich eine Anomalie der Doppelbrechung einstellt, die als „spontaner Kerreffekt“ gedeutet werden kann.

Die Phänomenologische Theorie für die Änderung der Doppelbrechung durch ein äusseres elektrisches Feld lässt einen linear mit der elektrischen Feldstärke anwachsenden Kerreffekt (Pockels) erwarten. Dieser lineare Effekt wird überlagert durch einen quadratisch mit der Feldstärke wachsenden piezodielektrischen Effekt (OSTERBERG und COOKSON). Im Curiegebiet zeigen die elektrooptischen Effekte Hysteresis, Sättigung und Remanenz. Auch ist namentlich das Verhalten des Koerzitivfeldes interessant. Die Hysteresiskurven zeigen grosse Barkhausensprünge.

Die theoretische Auswertung der Messungen zeigt, dass sich die optischen Anomalien in ihrer Temperaturabhängigkeit völlig auf das anomale Verhalten der elektrischen Polarisation bei diesen Substanzen zurückführen lassen: Aus optischen Messungen können z. B. der Temperaturverlauf der Dielektrizitätskonstanten, die anomale spezifische Wärme und andere Eigenschaften mehr in Übereinstimmung mit den experimentellen Angaben berechnet werden.

Optisch lässt sich auch, sehr viel besser als mit andern Methoden, das sog. „Einfrieren“ der elektrischen spontanen Polarisation mit abnehmender Temperatur verfolgen. Es zeigt sich, dass es eine kritische Temperatur gibt, unterhalb welcher die Koerzitivfeldstärke un stetig zu wachsen anfängt, so dass es bei sinkender Temperatur sehr bald unmöglich wird, die spontane Polarisation durch ein elektrisches Feld umzuklappen. Ein unterer Curiepunkt, wie er bei Seignettesalz existiert, kann auch optisch bei den beiden untersuchten Substanzen nicht festgestellt werden.

I. Einleitung.

Das Kaliumphosphat (primäres) KH_2PO_4 und damit sein Isotop KD_2PO_4 gehören zu den Seignette-elektrischen Substanzen¹⁾, die dadurch definiert sind, dass sie in einem gewissen Temperaturgebiet eine spontan auftretende elektrische Polarisierung besitzen. Die kritischen Temperaturen, bei welchen diese spontane Polarisierung entsteht oder verschwindet, werden analog wie beim Ferromagnetismus mit Curiepunkten bezeichnet. Der wesentliche Unterschied zum Seignettesalz besteht darin, dass die am Curiepunkt eingetretene spontane Polarisierung bei tieferen Temperaturen nicht mehr verschwindet und dass von einem Einfrieren der Polarisierung gesprochen werden muss. Der Kristall ist dann als pyroelektrisch zu bezeichnen.

Mit dem Auftreten der spontanen Polarisierung sind Unstetigkeiten der physikalischen Eigenschaften verbunden, wie sie unter anderem bei der Piezoelektrizität²⁾³⁾, der Dielektrizität¹⁾⁴⁾, der spezifischen Wärme⁴⁾⁵⁾ und der Elastizität⁶⁾ gemessen wurden.

Das leichte⁷⁾ und das schwere⁸⁾⁴⁾ Kaliumphosphat, KH_2PO_4 und KD_2PO_4 , kristallisieren tetragonal (Hemiedrie mit Spiegelachse). Da sich glasklare Einkristalle züchten lassen, besteht die Möglichkeit, diese Salze auch auf ihr optisches Verhalten hin zu untersuchen (vorläufige Mitteilung⁹⁾), wie es PÖCKELS¹⁰⁾, VALASEK¹¹⁾ und MÜLLER¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾ beim Seignettesalz getan haben.

1. Einfluss eines äusseren elektrischen Feldes auf das Indexellipsoid.

Für das Folgende ist es zweckmässig, vom Indexellipsoid auszugehen, das ganz allgemein, bezogen auf die optischen Symmetrieachsen (a_i), die Form hat:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{a_i^2}{n_i^2} = 1 \quad (n_i = \text{Hauptbrechungsindices})$$

Ein zweites, beliebiges, rechtwinkliges, raumfestes Rechtssystem a_i' sei gegeben durch das Schema der Richtungskosinus α_{ik} . Die in dieses System transformierte Gleichung des Indexellipsoides lautet:

$$\sum_{i,k=1}^3 \frac{a_i' a_k'}{n_{ik}^2} = 1 \quad (1)$$

Die 6 optischen Parameter $n_{ik} = n_{ki}$ berechnen sich zu

$$\frac{1}{n_{ik}^2} = \sum_{l=1}^3 \frac{\alpha_{li} \alpha_{lk}}{n_l^2}$$

und umgekehrt gilt für die Hauptbrechungsindices

$$\frac{1}{n_l^2} = \sum_{i,k}^3 \frac{\alpha_{li} \alpha_{lk}}{n_{ik}^2}$$

Durch ein äusseres elektrisches Feld E werden die optischen Eigenschaften des Kristalls verändert, was sich nach POCKELS¹⁰⁾ formal in einer Änderung der Parameter n_{ik} äussert. Diese zieht eine Änderung der Lage des optischen Symmetrieachsensystems (a_i) und damit auch der Hauptbrechungsindices n_i nach sich. POCKELS setzt für die geänderten Grössen $1/n_{ik}^2$ bei Kristallen ohne Inversionszentrum, zu denen auch KH_2PO_4 gehört, homogene lineare Funktionen der Feldstärkekomponenten (E_i) an. Für die neuen optischen Parameter v_{ik} setzt man also

$$\frac{1}{v_{ik}^2} = \frac{1}{n_{ik}^2} + \sum_{l=1}^3 e_{ik,l} E_l$$

Nimmt man speziell das System a_i' so an, dass es sich mit dem ursprünglichen optischen Symmetrieachsensystem a_i deckt, so geben die 18 phänomenologisch eingeführten Koeffizienten $e_{ik,l}$ in einfacher Weise die optische Wirkung eines äusseren elektrischen Feldes auf den Kristall an. Man nennt sie darum die elektrooptischen Konstanten des Kristalls. Sie sind experimentell aber nicht direkt bestimmbar, denn ein äusseres elektrisches Feld erzeugt elastische Deformationen zufolge des Piezoeffektes und der Elektrostriktion, die ihrerseits die Doppelbrechung beeinflussen. Für den elastooptischen Effekt gilt nach POCKELS, wenn wir mit x_n die elastischen Deformationen bezeichnen

$$\frac{1}{v_{ik}^2} = \frac{1}{n_{ik}^2} + \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} x_n \quad (p_{ik,n} = \text{elastooptische Konstanten})$$

Für das Experiment ist es am zweckmässigsten, die mechanischen Kräfte X_m und die elektrischen Felder E_l als freie Variablen einzuführen, da dann die entsprechenden Koeffizienten direkt gemessen werden können, indem man den Kristall entweder nur äussern mechanischen Kräften oder nur elektrischen Feldern aussetzt.

Die Formel für die Deformation in einem elastischen Körper, der zugleich piezoelektrisch ist, lautet nach OSTERBERG und COOKSON¹⁵⁾

$$x_n = \sum_{m=1}^6 s_{nm} X_m + \sum_{l=1}^3 d_{ln} E_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{lj,n} E_l E_j$$

Damit erhalten wir für die geänderten optischen Parameter v_{ik}

$$\frac{1}{v_{ik}^2} = \frac{1}{n_{ik}^2} + \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} s_{nm} \cdot X_m + \sum_{l=1}^3 \left(e_{ik,l} + \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} d_{ln} \right) \cdot E_l$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} g_{lj,n} \cdot E_l E_j$$

$$\frac{1}{v_{ik}^2} = \frac{1}{n_{ik}^2} + \sum_{m=1}^6 q_{ik,m} X_m + \sum_{l=1}^3 f_{ik,l} E_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ik,lj} E_l E_j \quad (2)$$

$$q_{ik,m} = q_{hm} = 36 \text{ piezooptische Konstanten} = \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} s_{nm}$$

$$f_{ik,l} = f_{hl} = 18 \text{ elektrooptische Moduln} = e_{ik,l} + \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} d_{ln}$$

(erster Ordnung)

$$h_{ik,lj} = h_{ht} = 36 \text{ elektrooptische Moduln} = \sum_{n=1}^6 p_{ik,n} g_{lj,n}$$

(zweiter Ordnung)

Die Doppelindices ik und lj lassen sich je durch einen einzigen h bzw. t ersetzen durch die folgende Zuordnung:

$t, h = 1$	2	3	4	4	5	5	6	6
$l, i = 1$	2	3	3	2	3	1	2	1
$j, k = 1$	2	3	2	3	1	3	1	2

Um nun das Indexellipsoid unter dem Einfluss äusserer Kräfte und elektrischer Felder zu erhalten, hat man einfach in Gleichung (1) an Stelle der $1/n_{ik}^2$ die $1/v_{ik}^2$ aus Gleichung (2) zu setzen.

Im Folgenden wollen wir uns auf den Fall des Kaliumphosphates spezialisieren, das nur äusseren elektrischen Feldern, aber keinen mechanischen Kräften ausgesetzt ist. Hier haben die Koeffizientenschemata folgende Form:

$$\|f_{hl}\| = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ f_{41} & 0 & 0 \\ 0 & f_{41} & 0 \\ 0 & 0 & f_{63} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \|h_{ht}\| = \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ h_{12} & h_{11} & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66} \end{matrix}$$

Beziehen wir das Indexellipsoid auf die kristallographischen Hauptachsen, und berücksichtigen wir ferner, dass die Kristalle ohne

äusseren Einfluss optisch einachsig sind, also $n_{11} = n_{22} = n_1$, $n_{33} = n_3$ und $n_{ik} = 0$ für $i \neq k$, so erhalten wir für dessen Gleichung

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{n_1^2} + \frac{a_3^2}{n_3^2} + \sum_{i,k=1}^3 a_i a_k \left[\sum_{l=1}^3 f_{ik,l} E_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ik,lj} E_l E_j \right] = 1$$

oder ausführlich, wobei wir die kristallographischen Achsen statt mit a_i nun mit a, b, c bezeichnen:

$$\begin{aligned} &+ a^2(1/n_1^2 + \frac{1}{2}(h_{11}E_a^2 + h_{12}E_b^2 + h_{13}E_c^2)) \\ &+ b^2(1/n_1^2 + \frac{1}{2}(h_{12}E_a^2 + h_{11}E_b^2 + h_{13}E_c^2)) \\ &+ c^2(1/n_3^2 + \frac{1}{2}(h_{31}E_a^2 + h_{31}E_b^2 + h_{33}E_c^2)) \\ &+ 2bc(f_{41}E_a + h_{44}E_bE_c) + 2ca(f_{41}E_b + h_{44}E_cE_a) \\ &+ 2ab(f_{63}E_c + h_{66}E_aE_b) = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Es wird sich zeigen, dass es genügt, das Indexellipsoid nur unter Berücksichtigung der elektrooptischen Moduln erster Ordnung zu diskutieren, da diese in erster Linie die beobachteten Effekte wiedergeben. Die elektrooptischen Moduln zweiter Ordnung treten nur in der Nähe der Curietemperatur merklich hervor. In diesem Sinn vereinfacht lautet das Indexellipsoid:

$$\frac{a^2 + b^2}{n_1^2} + \frac{c^2}{n_3^2} + 2f_{41}(bE_a + aE_b)c + 2f_{63}abE_c = 1. \quad (4)$$

a) *Äusseres Feld in Richtung der c-Achse.* $E_a = E_b = 0$.

Dieser Fall interessiert uns ganz besonders, denn in der c -Richtung verhält sich Kaliumphosphat elektrisch anomal. Unter dem Einfluss von E_c wird der Kristall optisch zweiachsig, denn das Indexellipsoid ist 3-achsig. Die Hauptachsenrichtungen sind die c -Achse und die Winkelhalbierenden a' (110) und b' (110) der kristallographischen a -Achsen. Die optischen Achsen fallen entweder in die a' , c oder die b' , c -Ebene, je nach dem Vorzeichen von E_c . Bezieht man die Gleichung des Indexellipsoides auf seine Hauptachsen, so erhält man

$$\frac{a'^2}{n_1^2} (1 + f_{63}E_c n_1^2) + \frac{b'^2}{n_1^2} (1 - f_{63}E_c n_1^2) + \frac{c^2}{n_3^2} = 1$$

Die Achsenabschnitte des deformierten Indexellipsoides auf die kristallographischen Achsen bleiben dieselben wie ohne äusseres Feld, nämlich n_1 , n_1 und n_3 .

Lässt man parallel a polarisiertes Licht in Richtung der c -Achse (longitudinaler Effekt) durch den Kristall hindurchtreten, so wird die gesuchte Doppelbrechung, die sich experimentell in einer

Phasenverschiebung der beiden in den Hauptachsenrichtungen (a' , b') schwingenden Wellen äussert,

$$n_{a'} - n_{b'} = n_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + f_{63} E_c n_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - f_{63} E_c n_1^2}} \right]$$

Da $f_{63} E_c n_1^2$ in allen Fällen etwas Kleines ist, können wir obigen Ausdruck entwickeln und erhalten für die beobachtbare Doppelbrechung in erster Näherung:

$$\underline{n_{a'} - n_{b'} = n_1^3 f_{63} E_c} \quad (5)$$

Wie man sofort sieht, ist für beliebig polarisiertes, *parallel a* einfallendes Licht nichts anderes als die natürliche Doppelbrechung $n_3 - n_1 = \Delta_0$ zu erwarten.

Für *parallel a' einfallendes Licht* (transversaler Effekt) erhalten wir, wenn wir wieder nach $n_1^2 f_{63} E_c$ entwickeln,

$$n_c - n_{b'} = \Delta_0 - \frac{1}{2} n_1^3 f_{63} E_c \quad (6)$$

Es ist also eine nur halb so starke Feldabhängigkeit der Doppelbrechung gegenüber dem Longitudinaleffekt zu erwarten.

Analog ergibt sich für *parallel b' einfallendes Licht*

$$n_c - n_{a'} = \Delta_0 + \frac{1}{2} n_1^3 f_{63} E_c.$$

b) Äusseres Feld in Richtung der a-Achse. $E_b = E_c = 0$.

Auch in diesem Fall bleiben die Achsenabschnitte auf den kristallographischen Achsen unverändert. Wieder wird der Kristall optisch zweiachsig. Die Achsen liegen in der Ebene $a = 0$; die eine ist identisch mit der alten optischen Achse ($= c$), die andere schliesst mit ihr den Winkel 2φ ein.

Aus der Gleichung des Indexellipsoides lässt sich sofort schliessen, dass für *einfallendes Licht parallel c* keine, und für *einfallendes Licht parallel b* nur die natürliche Doppelbrechung Δ_0 zu erwarten ist.

Die grösstmögliche Feldabhängigkeit der Doppelbrechung ergibt sich für *parallel a einfallendes Licht*. Die Hauptachsen $b''c''$ der massgebenden Schnittellipse ($a = 0$) sind aus ihrer ursprünglichen Lage (parallel b und c) um den Winkel φ herausgedreht. Wegen der Kleinheit von $f_{41} E_a$ können wir wieder entwickeln und erhalten

$$\varphi = \frac{f_{41} E_a n_1^2 n_3^2}{(n_3^2 - n_1^2)}$$

und für die beobachtbare Doppelbrechung

$$n_{y''} - n_{x''} = \Delta_0 + \frac{n_1^2 n_3^2 (n_3^3 + n_1^3) f_{41}^2 E_a^2}{2 (n_3^2 - n_1^2)} \quad (7)$$

Da sich die beiden Hauptbrechungsindizes mit der Temperatur verschieden stark ändern, ist auch eine Temperaturabhängigkeit der Doppelbrechung Δ_0 ohne Feld zu erwarten.

II. Messapparatur.

a) *Thermostat.* Da der Curiepunkt von KH_2PO_4 bei -150°C liegt und zudem die Messergebnisse stark temperaturabhängig sind, muss die Temperatur des zu untersuchenden Kristalls vom Siedepunkt der flüssigen Luft bis Zimmertemperatur stabilisiert werden können. Wir verwendeten deshalb einen Flüssigkeitskryostaten, wie er von A. VAN LAMMEREN¹⁶⁾ beschrieben wurde. Die eigentliche Stabilisierung geschah mittelst einer Toulon-Schaltung¹⁷⁾, ähnlich wie bei LÜDY⁶⁾. Auf diese Art konnten wir ohne Schwierigkeit jede Temperatur zwischen 95°K und 300°K eine Stunde lang auf $0,02^\circ$ konstant halten. Der Verbrauch an flüssiger Luft betrug zum einmaligen Abkühlen der ganzen Apparatur auf 120°K etwa 5 Liter, bei Dauerbetrieb auf dieser Temperatur ca. 200 g/Std.

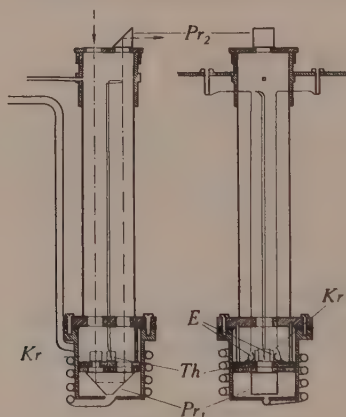


Fig. 1.

Messgefäß.

Kr: Kristall; Th: Thermolement; E: Elektroden; Pr_i : Glasprismen.

b) *Messgefäß.* Der Kopf des Messgefäßes (Fig. 1) enthält die beiden Öffnungen für den Ein- und Austritt des Lichtes, zwei Elektrodenzuführungen und den Eintritt eines Thermoelementes. Ein Stahlrohr der Wandstärke 0,05 cm hält den untern Teil des

Gefässes mit dem eigentlichen Messraum. Unten in diesen Teil mündet ein spiralförmiges Kupferrohr, durch das vorgekühlte und getrocknete Gase (N_2 oder H_2) eingeleitet werden können. Die Zuleitung von aussen besteht aus Neusilber, um den Kälteverlust möglichst klein zu halten. Der verschliessbare Messraum ist abgedichtet mit einem Bleiring. Der Tisch für die Messobjekte besteht aus zwei Cibanitplatten, durch 3 von oben kommende Stützen gehalten. Auf der untern Platte ist über die Durchtrittsöffnungen für das Licht ein genau 180° ablenkendes Glasprisma mit 4 Bronzefedern befestigt. Das Prisma lässt sich fein justieren durch unter den Haltefedern angebrachte Exzentrerscheibchen. Die obere Cibanitplatte können wir so für verschieden grosse Kristalle auswechseln, ohne dass die Einstellung des Prismas verändert wird. Auf der oberen Cibanitplatte, über einer kreisrunden Lichtdurchtrittsöffnung ruht der zu untersuchende Kristall. Die Elektrodenzuleitungen in der Form weicher Bronzefedern bilden zugleich auch die Kristallhalterung. Es wurde darauf geachtet, dass dabei der mechanische Druck minimal war. Der Tisch lässt sich um zwei zueinander senkrechte, horizontale Achsen drehen, indem nämlich die 3 Stützen verschieden tief in den Deckel des Messraumes eingeschraubt werden können.

Die Lötstelle des Kupfer-Konstanten-Thermoelementes haben wir in einen ungefähr gleich grossen Kristall, wie den zu Untersuchenden, eingekittet, um ein Nachhinken der Temperatur bei Laufendmessungen zufolge der grossen Anomalie der spezifischen Wärme am Curiepunkt und damit Fehler in der Temperaturmessung möglichst auszuschalten. Die Elektrodenzuleitungen und das Thermoelement bestehen aus zwei Kupfer bzw. einem Kupfer und einem Konstantandraht von je 0,01 cm Dicke, isoliert mit einer dünnen Seidenfadenwicklung. Zudem haben wir jeden dieser Drähte in eine dünne Glaskapillare eingezogen, um eine möglichst gute Isolation durch das Messgefäss bis an den Messort zu haben.

Die Thermospannung des Thermoelementes wurde mit einem Kompensationsapparat gemessen, wobei ein empfindliches Galvanometer (ca. 10^{-9} Amp/mm, m) als Nullinstrument diente. Die absolute Genauigkeit der Temperaturmessung beträgt etwa $\pm 0,3^\circ$. Die relative Genauigkeit dagegen ist sehr viel grösser, nämlich $\pm 0,01^\circ$, also ungefähr so gross wie die erreichte Stabilisierung.

Einige Kurven, die als einzige Variable die Temperatur enthalten, wurden bei laufender Temperatur (2° pro Std.) gemessen und nachträglich korrigiert, indem das Nachhinken des Kristalls gegenüber der gemessenen Temperatur experimentell bestimmt

wurde (maximal $0,1^\circ$ bei einer Änderung der Temperatur von 1° pro Std.).

Um ein Beschlagen mit H_2O des obern Teiles des Messgefäßes zu verhindern, mussten das Prisma, das Deckglas beim Lichteintritt und die beiden Elektrodenbuchsen (Isolation) dauernd mit getrockneter Pressluft angeblasen werden.

c) *Optische Anordnung.* Prinzipiell haben wir einfach die gesuchte Doppelbrechungsänderung in der Form einer Phasenverschiebung, d. h. die Elliptizität des aus dem Kristall austretenden Lichtes mit einem Babinet-Kompensator gemessen. Wesentlich an

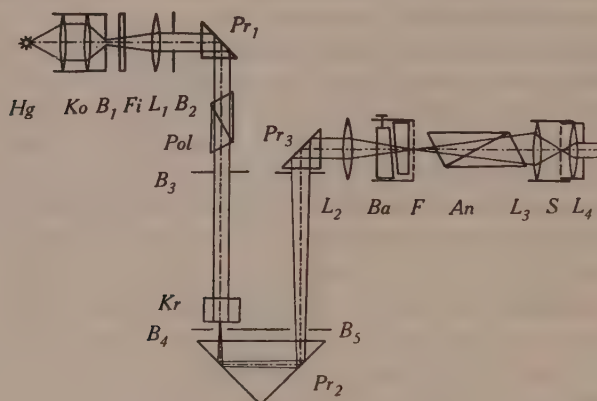


Fig. 2.

Schema der optischen Anordnung.

Hg: Quecksilberdampfampe; *Ko:* Kondensor; *Bi:* Blenden;
Fi: Grünfilter (=5460,7 Å); *Li:* Linsen; *Pr_i:* Glasprismen; *Pol:* Polarisator;
Kr: Kristall; *Ba:* Babinet-Kompensator; *F:* Fadenkreuz des Babinet-Kompensator; *An:* Analysator; *S:* Skala des Beobachtungsfernrohres.

der Anordnung (Fig. 2) ist, dass dem Auge sowohl die Skala des Beobachtungsfernrohres, als auch das Fadenkreuz des Kompensators und die Kristalloberfläche scharf erscheinen.

Mit dem Kompensator lassen sich nur Gangunterschiede von wenigen Wellenlängen messen. Da aber die beobachteten Effekte an KH_2PO_4 und KD_2PO_4 vielfach Gangunterschiede von über 100 Wellenlängen hervorriefen, haben wir die zu untersuchenden Kristalle um den Bruchteil eines Grades keilförmig hergestellt. Wir beobachteten so eine Anzahl paralleler Interferenzstreifen. Eine Doppelbrechungsänderung des Kristalls äusserte sich jetzt in einer Streifenverschiebung, die bequem zu messen war.

Die erreichte Genauigkeit beträgt $\pm 0,04 \lambda$. Die Δn -Messung ist also für dicke Kristalle genauer, weil die beobachtbaren Effekte proportional der Kristalldicke sind.

d) *Kristalle und Elektroden.* Die Messstücke wurden aus gezüchteten Einkristallen in der vorgeschriebenen Orientierung herausgesägt und auf einer Kristallschleifmaschine nach WÜLFING¹⁸⁾ geschliffen. Für die Messungen eigneten sich besonders gut Kristalle mit einem Keilwinkel von $20' - 40'$, was bei Kristallwürfeln von etwa 1 cm^3 3–6 Interferenzstreifen im Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres entspricht. Für unsere Untersuchungen war die Politur der Kristalle von grösster Wichtigkeit.

Die verschiedenen gemessenen KH_2PO_4 Kristalle hatten Kantenlängen von minimal 0,65 cm bis maximal 1,56 cm. Die Flächen waren orientiert $\perp c$ und entweder $\perp a$ und $\perp b$ oder $\perp a'$ und $\perp b'$. Der uns zur Verfügung stehende KD_2PO_4 -Kristall war c, a', b' -orientiert und hatte ungefähr die Ausmasse 0,40; 0,22; 0,26 cm. Bei allen untersuchten Kristallen handelte es sich um vollkommen glasklare und fehlerfreie Stücke ohne Wachstumsstörungen.

Die Elektroden bestanden in allen Fällen aus im Vakuum aufgedampften Goldschichten von ca. 600 Å Dicke. Da zur Messung des Longitudinaleffektes Licht in der Richtung des angelegten Feldes hindurchgeschickt werden muss, haben wir die entsprechenden Kristallflächen halbdurchlässig vergoldet. Die Schichtdicke betrug etwa 20 Å. Durch Messen der Kapazität vergewisserten wir uns, dass die elektrische Spannung am ganzen Kristall lag.

III. Messergebnisse.

1. Temperaturgang der Doppelbrechung und spontaner Kerr-Effekt von KH_2PO_4 und KD_2PO_4 .

KH_2PO_4 -Kristalle sind optisch negativ einachsige. Die beiden Hauptbrechungsindices betragen für die D-Linien des Na bei $15^\circ \text{C}^{19)}$ $n_1 = n_2 = 1,5095$ und $n_3 = 1,4684$. Die Grösse der Doppelbrechung ($n_3 - n_1 = -0,0411$) liegt zwischen derjenigen von Kalkspat (0,1721) und Quarz (0,0091). Der Versuch die Brechungsindices von KD_2PO_4 zu bestimmen, musste aufgegeben werden, weil nur sehr wenig und äusserst kleine Versuchsstücke zur Verfügung standen, die ohnehin keine genauen Werte gegeben hätten. Ihre Kenntnis ist für unsere Messungen nicht von Bedeutung.

Die Doppelbrechung nimmt bei beiden Kristallen, wie übrigens auch beim Quarz mit sinkender Temperatur zu. Wie aus den

Kurven (Fig. 3 und 4) ersichtlich ist, ändert sich die Doppelbrechung am Curiepunkt plötzlich stark („spontaner Kerreffekt“). Die

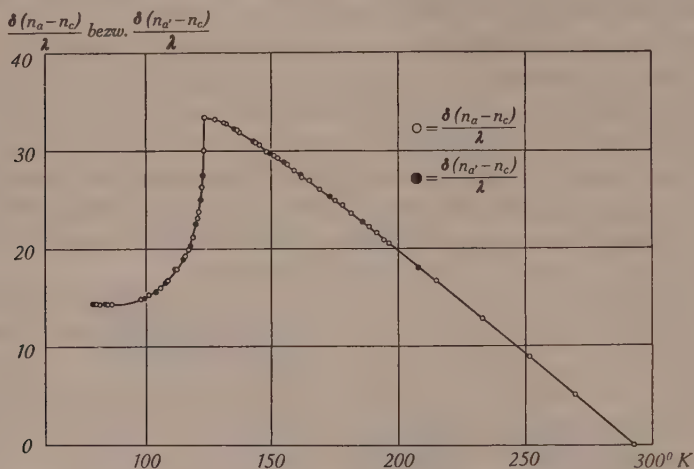


Fig. 3.

Temperaturgang der Doppelbrechung von KH_2PO_4 (spontaner Kerreffekt).
Licht $\parallel b$ [010] bzw. $\parallel b'$ [110]

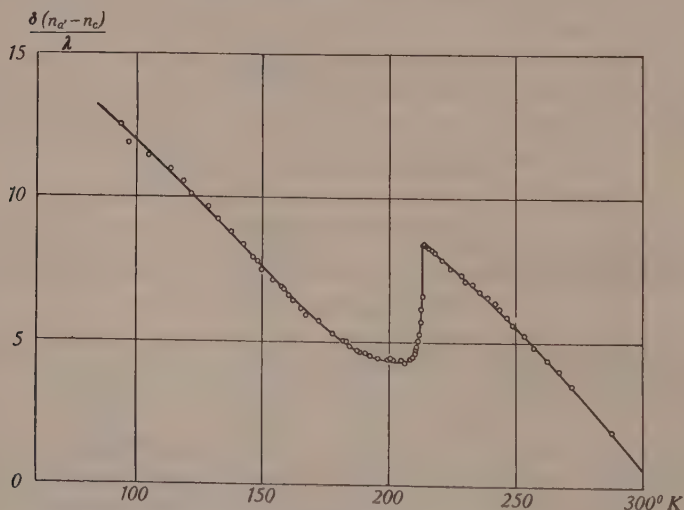


Fig. 4.

Temperaturgang der Doppelbrechung von KD_2PO_4 (spontaner Kerreffekt). Licht
 $\parallel b'$ [110]

Messungen an KII_2PO_4 stimmen gut mit den früher von BANTLE, BUSCH, LAUTERBURG und SCHERRER²⁰⁾ veröffentlichten überein.

Der Temperaturgang ist bei KH_2PO_4 etwa zweimal so gross, der Sprung am Curiepunkt sogar rund 5mal grösser als bei KD_2PO_4 . Bemerkenswert ist noch, dass bei dem von BANTLE⁴⁾ bei 158°K angenommenen „unteren Curiepunkt“ unsere Messkurve für KD_2PO_4 vollkommen glatt verläuft.

Alle Kristalle, die übrigens elektrisch isoliert aufgestellt waren, ergaben die gleichen, reproduzierbaren Kurven. Das Licht wurde sowohl $\parallel a$ als auch $\parallel b$ und $\parallel b'$ durch den Kristall hindurchgeschickt. Die entsprechenden Kurven decken sich genau. Daraus können wir schliessen, dass das Indexellipsoid rotationssymmetrisch, der isolierte Kristall also über das ganze betrachtete Temperaturgebiet optisch einachsigt bleibt.

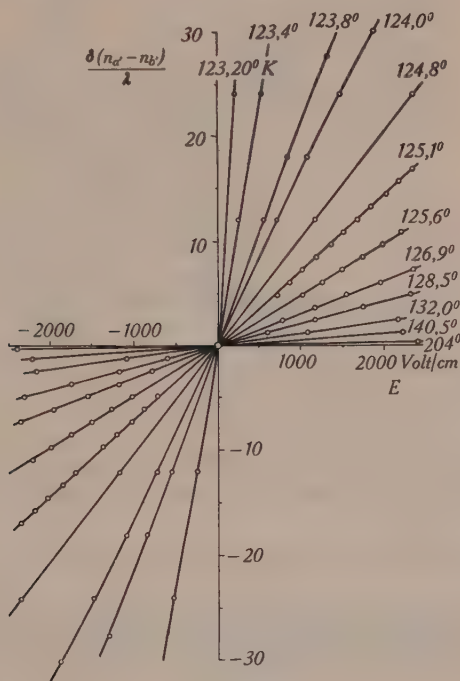


Fig. 5.

Linearer elektrooptischer Effekt von KH_2PO_4 (longitudinal).

$T > \Theta$. $E \parallel c$ -Achse [001]; Licht $\parallel c$ -Achse [001]

Für Licht $\parallel c$ -Achse konnten wir keine Doppelbrechung feststellen, was umgekehrt den Schluss zulässt, dass die Desorientierung der Kristallpräparate in bezug auf diese Richtung $30'$ nicht übersteigt. Beim Unterschreiten der Curietemperatur Θ wird der Kristall in der c -Richtung plötzlich an verschiedenen Stellen ver-

schieden stark undurchsichtig. Interferenzstreifen sind keine mehr zu sehen. Das Muster, das einer Ätzfigur nicht unähnlich sieht, verschwindet wieder beim Erwärmen über den Curiepunkt. Es handelt sich hier um Erscheinungen, die mit der Existenz von Elementarbezirken engsten Zusammenhang haben²¹⁾. (Siehe auch S. 368.)

2. Linearer elektrooptischer Effekt für $T > \Theta$.

Es handelt sich hier um die Versuche zu den Gleichungen (5) und (6), den Longitudinaleffekt für KH_2PO_4 Fig. 5) und den Transversaleffekt für KH_2PO_4 (Fig. 6) und KD_2PO_4 (Fig. 7). Bei Zim-

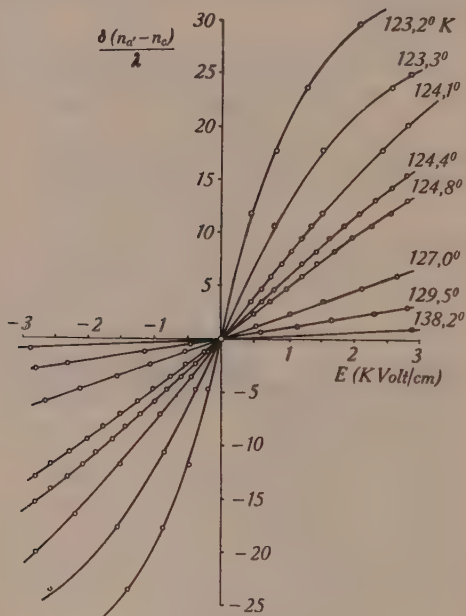


Fig. 6.

Linearer elektrooptischer Effekt von KH_2PO_4 (transversal).
 $T > \Theta$; $E \parallel c$ -Achse [001]; Licht $\parallel b'$ [110].

mertemperatur ist der Effekt gerade noch messbar, wird mit sinkender Temperatur grösser und steigt unmittelbar oberhalb des Curiepunktes sehr stark an. Man sieht, dass auch bei grossen Effekten die abgeleiteten Gleichungen in erster Näherung gelten. Da der Longitudinaleffekt nichts Neues bringt, haben wir ihn an KD_2PO_4 nicht gemessen.

Die Doppelbrechung $n_a - n_c$ wurde ebenfalls auf eine Feldabhängigkeit hin untersucht; erst unmittelbar beim Curiepunkt

liess sie sich messbar beeinflussen, doch so wenig, dass dieser Betrag wahrscheinlich auf eine Fehlorientierung der Fläche $\perp a$ von ca. $30'$ zurückzuführen ist.

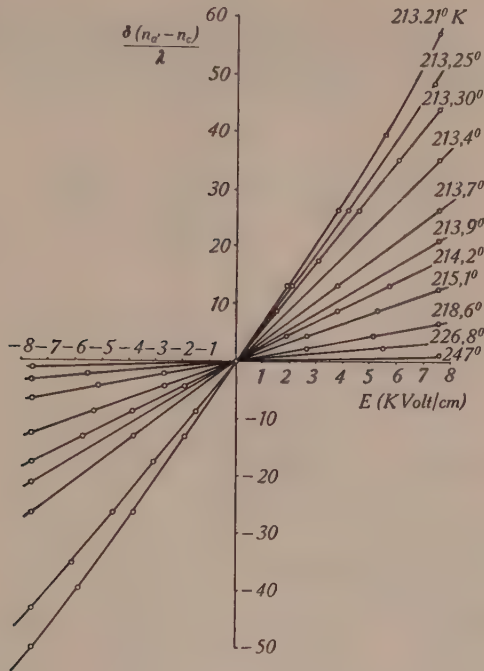


Fig. 7.

Linearer elektrooptischer Effekt von KD_2PO_4 (transversal).

$T > \Theta$; $E \parallel c$ -Achse $[001]$, Licht $\parallel b'$ $[110]$.

3. Elektrooptische Hysteresis für $T < \Theta$.

An die Stelle des linearen elektrooptischen Effektes tritt im Curiegebiet eine elektrooptische Hysteresis. Auffallend ist der treppenförmige Verlauf bei beiden Salzen. Fig. 8 zeigt die Hysteresis, wie wir sie bei 3 aufeinanderfolgenden Umläufen für KH_2PO_4 bei konstanter Temperatur gemessen haben. Man sieht sofort, dass die Sprünge und damit die ganzen Kurven statistischen Schwankungen unterworfen sind; immerhin ist eine gewisse Ähnlichkeit der Kurven unverkennbar. Letztere geht verloren, wenn man den Kristall zwischen den einzelnen Umläufen über den Curiepunkt erwärmt.

Da bei KD_2PO_4 der Curiepunkt verhältnismässig hoch (213°K) liegt, konnten wir hier die entsprechenden Messungen über ein

grosses Temperaturgebiet ausführen. In der letzten Kurve von Fig. 9 ist zum Vergleich der Grössenordnung noch der lineare Effekt unmittelbar oberhalb des Curiepunktes eingezeichnet.

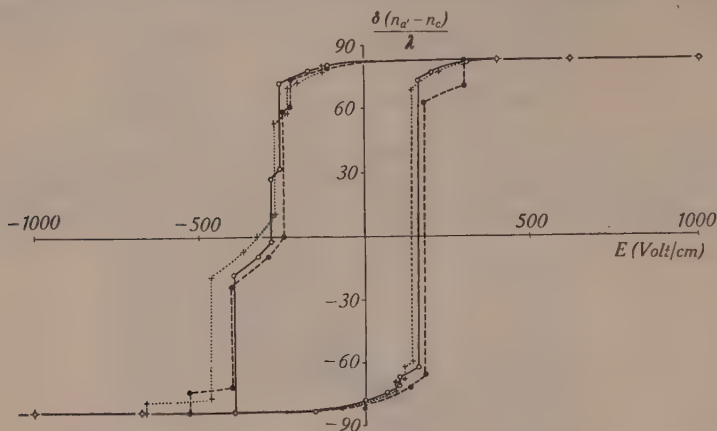


Fig. 8.

Elektrooptische Hysteresis von KH_2PO_4 bei 121°K (drei aufeinanderfolgende Umläufe).

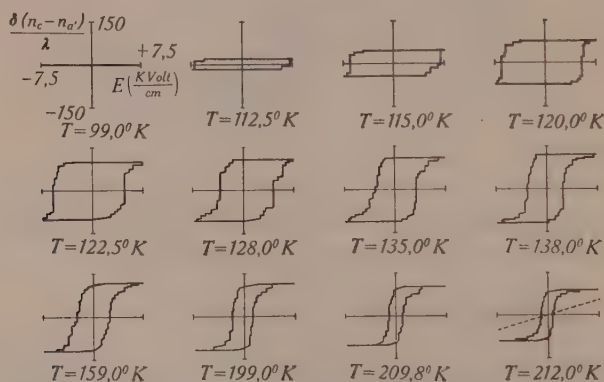


Fig. 9.

Elektrooptische Hysteresis von KD_2PO_4 bei verschiedenen Temperaturen.

$E \parallel c\text{-Achse } [001]; \text{ Licht } \parallel b' [110]; \lambda = 5460,7 \text{ \AA}$

4. Elektrooptischer Effekt als Funktion der Temperatur.

Wir lassen jetzt das elektrische Feld am Kristall konstant und variieren die Temperatur. Oberhalb des Curiepunktes messen wir einfach den gewöhnlichen Temperaturgang mit überlagertem Transversaleffekt. Am Curiepunkt nimmt die Doppelbrechung weiter stark zu, bzw. ab, die Kurven verschiedener Feldstärken mit

gleichem Vorzeichen vereinigen sich und streben einem Grenzwert zu. Interessant ist, dass bei beiden Salzen sich das Mittel aus den Kurven *A* und *B* (Fig. 10 und 11) genau mit dem spontanen Kerreffekt deckt. Die mittlere Kurve entspricht also der Feldstärke $E_c = 0$. Dagegen genügen schon Feldstärken von wenigen Volt um zu erreichen, dass die Doppelbrechung des Kristalls beim langsamen Abkühlen entweder die Kurve *A* oder *B* durchläuft.

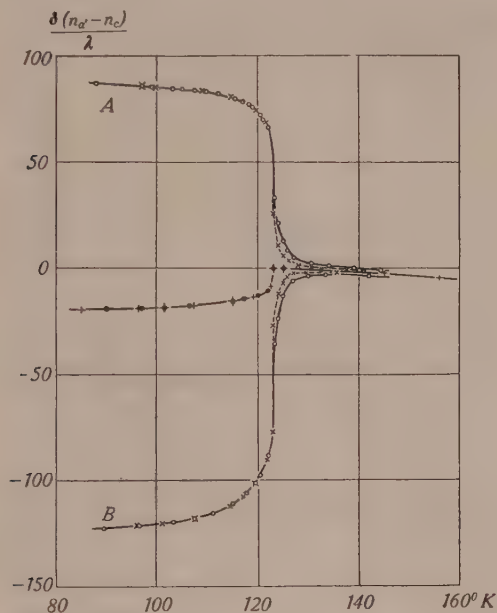


Fig. 10.

Transversaler elektrooptischer Effekt von KH_2PO_4

$E \parallel c\text{-Achse } [001] \quad \text{Licht} \parallel b' [110]$

A o—o—o $+3000 \text{ Volt. cm}^{-1}$ *B* o—o—o $-3000 \text{ Volt. cm}^{-1}$

× ... × ... × $\pm 1500 \text{ Volt. cm}^{-1}$

+—+—+ spontaner Kerreffekt ······ $\left(\frac{A+B}{2} \right)$

Zu den Kurven von KD_2PO_4 ist noch zu erwähnen, dass keinerlei Anzeichen eines „unteren Curiepunktes“ wie beim Seignettesalz festzustellen sind.

Analoge Messungen mit Lichtdurchtritt durch den Kristall parallel *a* ergeben, wie nach der Theorie zu erwarten ist, nur den spontanen Kerreffekt.

IV. Diskussion.

1. Elektrooptische Moduln.

Ein Mass für den elektrooptischen Modul f_{63} bei einer bestimmten Temperatur ist die Steilheit der entsprechenden $\frac{\delta n}{\lambda}(E)$ -Kurve im Nullpunkt. In Fig. 12 sind die aus den Messungen nach den Gleichungen (5) und (6) berechneten Werte aufgezeichnet. Die Be-

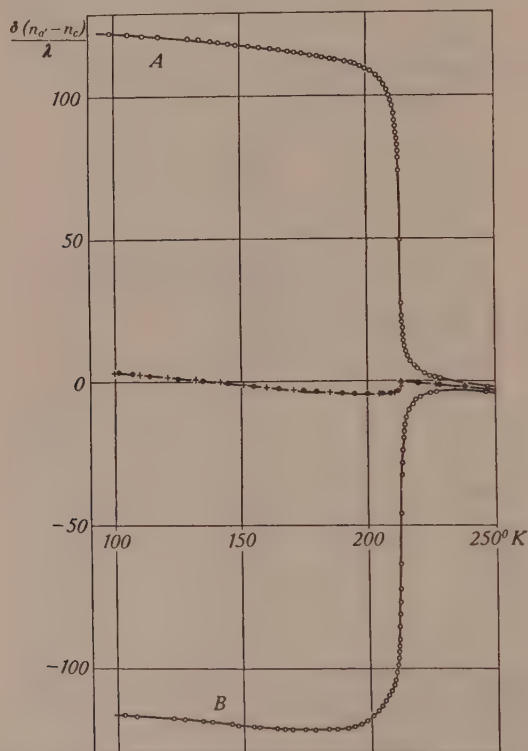


Fig. 11.

Transversaler elektrooptischer Effekt von KD_2PO_4 . $E \parallel c$ -Achse $[001]$; Licht $\parallel b'$ $[110]$.

A $\circ-\circ-\circ$ + 7300 Volt. cm^{-1} B $\circ-\circ-\circ$ - 7300 Volt. cm^{-1}

+--+--+ spontaner Kerreffekt $\bullet-\bullet-\bullet$ $\frac{A+B}{2}$

rechnungen für KH_2PO_4 aus dem Transversal- und dem Longitudinaleffekt stimmen sehr gut überein, obwohl die Messungen an verschiedenen Kristallexemplaren vorgenommen wurden. Der wahrscheinliche Fehler ist bei hohen Temperaturen, der Kleinheit des Effektes wegen, verhältnismässig gross. In der Gegend des Curie-

punktes ist er nur noch durch die Ungenauigkeit der Spannungsmessung bestimmt.

Der Einwand, dass dieser grosse Effekt durch eine piezoelektrische Deformation des Kristalls hervorgerufen sein könnte, ist nicht stichhaltig, da wie eine Abschätzung zeigt, eine solche Verfälschung höchstens 2% des beobachteten Effektes ausmachen kann.

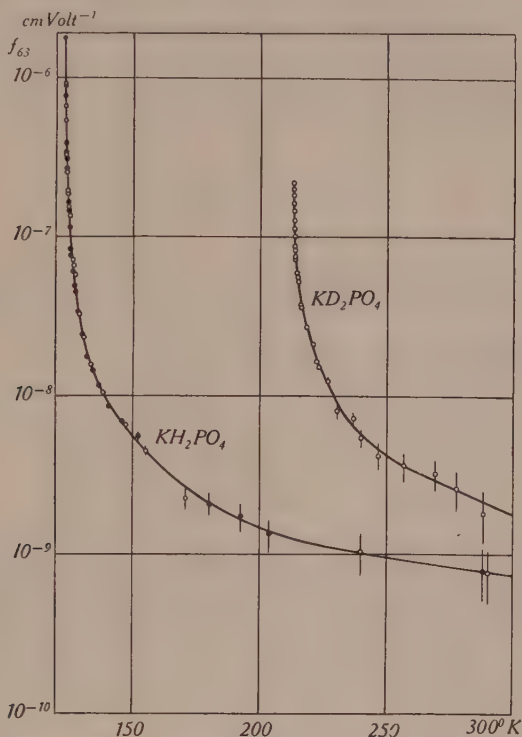


Fig. 12.

Elektrooptischer Modul f_{63} von KH_2PO_4 und KD_2PO_4 .

o—o—o f_{63} aus transversalem Effekt •—•—• f_{63} aus longitudinalem Effekt

Der elektrooptische Modul f_{41} konnte mit unserer Versuchsanordnung nicht bestimmt werden. Wäre nämlich f_{41} sogar gleich gross wie f_{63} bei Zimmertemperatur, so müsste man bei einem Kristall von 1 cm Dicke und 3000 Volt/cm eine Interferenzstreifenverschiebung von $2 \cdot 10^{-5}$ nachweisen (Gleichung (17)), was unterhalb der Empfindlichkeit unserer Anordnung liegt. Wahrscheinlich wäre es leichter, den Winkel φ der optischen Achsen, als eine Doppelbrechungsänderung von 10^{-9} zu messen.

Auf Grund all dieser Messungen fanden wir es naheliegend, den elektrooptischen Effekt statt proportional der Feldstärke, proportional den durch das Feld induzierten elektrischen Momenten zu setzen. Sie unterscheiden sich von den entsprechenden Feldkomponenten durch die Faktoren $(\varepsilon_i - 1)/4\pi$ ($i=1, 2, 3$). Diese Annahme scheint vernünftiger, weil primär sicher die Polarisierung des Kristallgitters auf das Licht einwirkt und nicht ein äusseres elektrisches Feld. Die starke Temperaturabhängigkeit unseres Effektes ist durch die starke Temperaturabhängigkeit der Polarisierung bedingt. Der elektrooptische Modul f_{63} ist jetzt, wo die Polarisierung als Variable benützt wird, zu ersetzen durch

$$f'_{63} = \frac{4\pi \cdot f_{63}}{\varepsilon_c - 1}$$

Diese neuen, auch beim Durchlaufen der Curietemperatur praktisch nicht mehr temperaturabhängigen Moduln haben folgende Werte:

$$\text{KH}_2\text{PO}_4: f'_{63} = 2,09 \cdot 10^{-7} \text{ CGS}$$

$$\text{KD}_2\text{PO}_4: f'_{63} = 1,39 \cdot 10^{-7} \text{ CGS}$$

$$\text{Seignettesalz: } f'_{41} = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ CGS (POCKELS)}$$

$$\text{Quarz: } f'_{11} = 4,9 \cdot 10^{-9} \text{ CGS (POCKELS)}$$

$$f'_{41} = 2,0 \cdot 10^{-9} \text{ CGS (POCKELS)}$$

Hier fällt auf, dass die elektrooptischen Moduln seignetteelektrischer Stoffe etwa 10^2 mal grösser sind als diejenigen gewöhnlicher Stoffe, also ähnlich wie beim Kerreffekt von Flüssigkeiten, wo die Kerrkonstanten von Dipolflüssigkeiten (Nitrobenzol, Nitrotoluol) auch ungefähr 10^2 mal grösser sind als bei gewöhnlichen Flüssigkeiten.

2. Temperaturgang der Dielektrizitätskonstanten.

Durch unsere Annahme $\Delta n = \alpha \cdot P_c$ können wir jetzt aus dem linearen elektrooptischen Effekt die Dielektrizitätskonstante ε_c berechnen

$$\varepsilon_c = 1 + \frac{2\pi n_1^2 \cdot f_{63}}{\alpha}$$

Wir bestimmen die Konstante α dadurch, dass wir bei irgend einer Temperatur die DK der Salze messen. Wir verwenden zu diesem Zweck bekannte DK -Werte, so für KH_2PO_4 den von BUSCH¹⁾ gemessenen Wert bei 132° K und für KD_2PO_4 den von BANTLE³⁾ bestimmten Wert bei 230° K. Die nun aus optischen

Messungen berechnete DK als Funktion der Temperatur stimmt für beide Salze gut mit den aus elektrischen Messungen erhaltenen DK überein (Fig. 13). Einzig für hohe Temperaturen sind die errechneten DK etwas zu klein. Der Grund hierfür liegt möglicherweise darin, dass bei der Änderung der Doppelbrechung durch die Änderung der Polarisation in erster Linie nur die „Dipol“-Polarisation

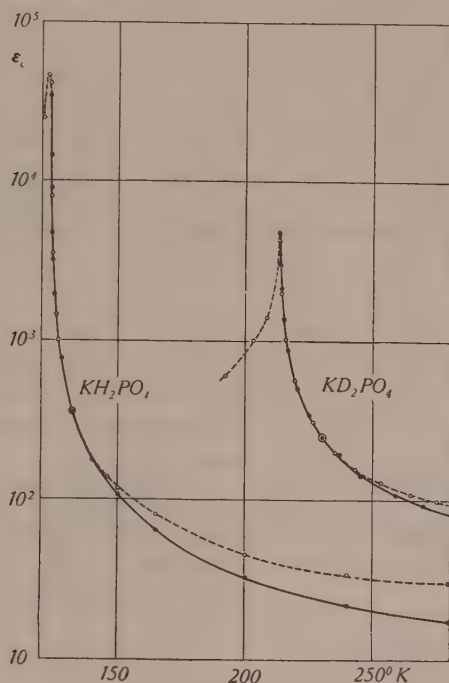


Fig. 13.

Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten E_c .

- KH_2PO_4 o—o—o gemessen von BUSCH (800 sec^{-1} , 200 Volt cm^{-1})
 •—•—• berechnet aus elektroopt. Effekt (stat.)
 KD_2PO_4 o—o—o gemessen von BANTLE (1000 sec^{-1} , 40 Volt cm^{-1})
 •—•—• berechnet aus elektroopt. Effekt (stat.)

sation ohne die „Untergrund“-Polarisation gemessen wird. Diese Vermutung wird ferner gestützt durch die experimentellen Tatsachen, dass die f'_{ik} der seignetteelektrischen Kristalle 100mal grösser sind als bei andern Stoffen und dass die reziproke Suszeptibilität ($(1/x_c \text{ proportional } 1/f_{63})$) als Temperaturfunktion praktisch eine Gerade ist, wie es nach dem Curie-Weiss'schen Gesetz zu erwarten wäre (Fig. 14).

3. Verlauf der spontanen Polarisation.

Unterhalb der Curietemperatur zeigt die Doppelbrechung Hysteresis und Sättigung und wir können aus unseren Messungen durch den oben verwendeten Ansatz auf die spontane Polarisation,

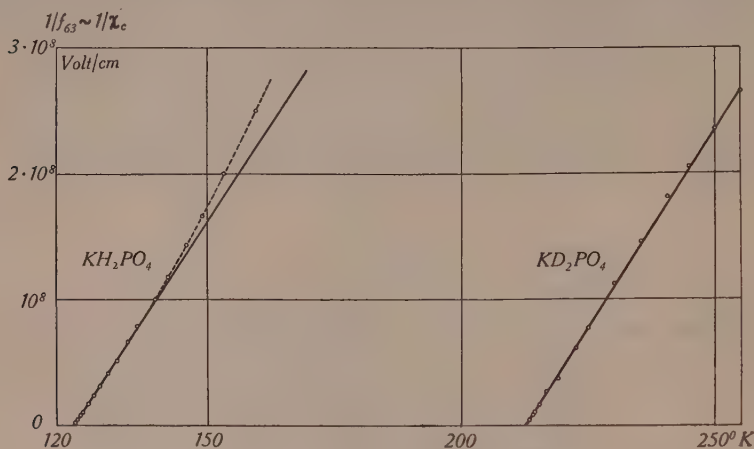


Fig. 14.

Temperaturverlauf der reziproken Suszeptibilität (aus elektroopt. Effekt).

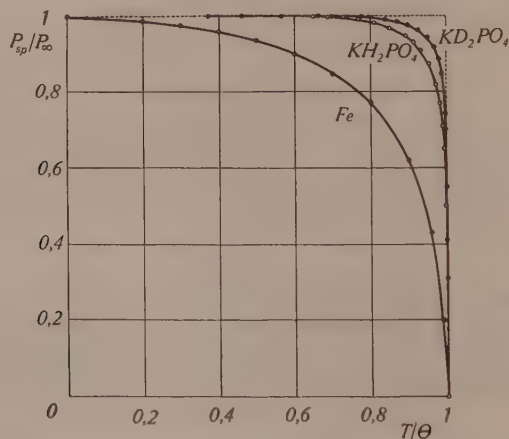


Fig. 15.

Temperaturgang der spontanen Polarisation von Fe, KH_2PO_4 und KD_2PO_4 .

○ Fe (Langevin) ○ KH_2PO_4 • KD_2PO_4 Slater

Koerzitivfeld usw. schliessen. Fig. 15 stellt die von uns optisch bestimmte spontane Polarisation der beiden Salze als Funktion von T/Θ dar. Auffallend ist die im Grunde genommen starke Abweichung der seignette-elektrischen Kristalle vom ferromagnetischen

Verhalten (Fe), die spontane Polarisation steigt am Curiepunkt sehr viel steiler an und erreicht bald den Grenzwert $P_{s, \max}$. Der sehr steile Verlauf von P_s am Curiepunkt spricht vielleicht für die Theorie von SLATER²²⁾, welche eine durch den Piezoeffekt verzögerte Umwandlung erster Art vorschlägt.

Was die absoluten Werte der Polarisation betrifft, so stimmen sie bei KH_2PO_4 ungefähr mit den elektrischen Messungen überein. Bei KD_2PO_4 erhalten wir einen beinahe doppelt so grossen Wert, wie ihn BANTLE⁴⁾ aus Messungen bei 50 Hertz ermittelte. Der Grund liegt in der verzögerten Entstehung der Polarisation bei KD_2PO_4 beim Anlegen eines Feldes. Experimente zeigen, dass auch der von uns beobachtete optische Effekt diese zeitliche Verzögerung aufweist. Warum die Relaxationszeiten beim leichten und schweren Kaliumphosphat verschieden sind, ist unbekannt. Dem KD_2PO_4 -Kristall wird demnach schon bei 50 Hertz nicht mehr die nötige Zeit gegeben, seine Polarisation voll auszubilden.

Bemerkenswert ist auch, dass die optisch bestimmte spontane Polarisation bei tieferen Temperaturen bestehen bleibt und nicht die geringsten Anzeichen dafür vorhanden sind, dass das seignette-elektrische Gebiet durch eine untere Curietemperatur abgeschlossen würde wie beim Seignettesalz.

4. Anomalie der spezifischen Wärme.

Die zusätzliche spezifische Wärme ΔC eines Körpers lässt sich thermodynamisch aus dem Temperaturverlauf der spontanen Polarisation berechnen. Es gilt²³⁾:

$$\Delta C = -\frac{1}{2} f \frac{dP_s^2}{dT} \quad f = \text{Lorentzfaktor.} \quad (8)$$

Die gesamte Wärmemenge Q , die wir zum Zerstören der spontanen Polarisation dem Kristall zuführen müssen, ergibt sich durch Integration zu

$$Q = \frac{1}{2} f P_{s, \max}^2.$$

Wenn wir die von BANTLE³⁾ gemessenen Q -Werte und die von uns optisch bestimmten Sättigungswerte $P_{s, \max}$ benutzen, erhalten wir für die Lorentzfaktoren $f = 0,33$ für KH_2PO_4 und $f = 0,20$ für KD_2PO_4 . Wegen des oben erwähnten Relaxationseffektes sind unsere Werte kleiner als die von BANTLE bestimmten.

Aus unseren optischen Messungen können wir nun auch den Verlauf von P_s sehr genau ermitteln und haben jetzt mit Gleichung (8) ein sehr empfindliches Mittel, unseren Ansatz auf seine Rich-

tigkeit hin zu prüfen. Die Resultate (Fig. 16) sind überraschend gut bei KH_2PO_4 . Auch die Übereinstimmung bei KD_2PO_4 ist als gut zu bezeichnen, wenn man bedenkt, dass die kompliziertere Messkurve BANTLE's davon herrührt, dass er zwei aus verschiedenen Zuchten stammende Kristalle mit etwas verschiedenen Curiepunkten zusammen gemessen hat.

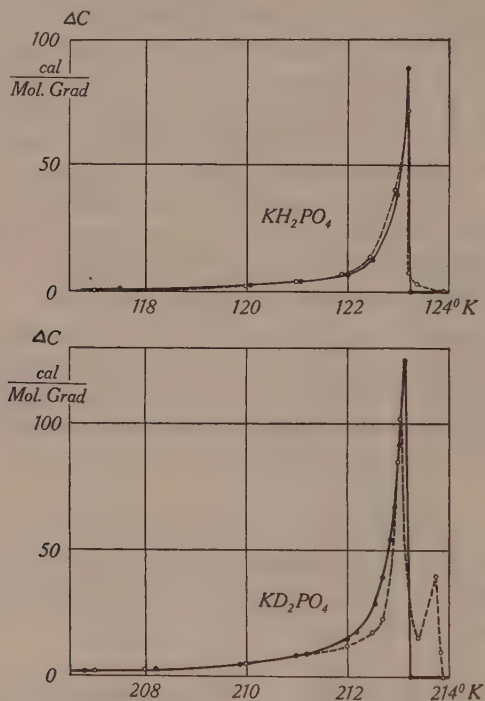


Fig. 16.

Anomalie der spezifischen Wärme.

•—•—• theoretisch (aus opt. Messungen)

o...o...o experimentell (nach BANTLE)

5. Hysteresis. „Einfrieren der Polarisation“.

Das Auffallendste bei unseren Hysteresiskurven ist wohl ihre Treppenform, und man ist versucht, diese den Barkhausensprüngen zuzuschreiben. Es müssen also auch hier einheitlich polarisierte Elementarbezirke vorhanden sein. Weil wir optisch beobachteten, muss die Grösse dieser auf einmal umklappenden Bereiche direkt sichtbar werden. Nach unseren Beobachtungen ist ihre Grösse im Gegensatz zum Eisen makroskopisch, bei KH_2PO_4 bis $3 \cdot 3 \cdot 3$ mm, bei KD_2PO_4 ca. 1 mm^3 , quaderförmig, Begrenzungen orientiert

parallel den kristallographischen Hauptachsen a, a, c . Ferner zeigt sich, dass ihre Anzahl grösser wird, bei abnehmender Ausdehnung des Kristalles in der c -Richtung.

Interessant ist ferner, dass bei jedem Sprung beim Durchlaufen der Hysteresiskurve die Spannung am Kristall für einen Moment zusammenfällt und zwar je nach beobachteter Sprunggrösse bis 300 Volt. Aus unserer elektrischen Schaltung können wir auf eine plötzlich frei werdende elektrische Ladung bis zu ca. 2500 CGS schliessen. Auch das zwingt die Folgerung auf, dass die Polarisation bereichsweise umklappt und dabei die entsprechende Ladung an der Oberfläche senkrecht c frei wird.

Dass in früheren Arbeiten keine solchen Beobachtungen aufgezeichnet sind, liegt wohl daran, dass diese Autoren die Hysteresiskurven nicht statisch gemessen haben. In der Tat verschwanden auch bei uns, wegen der grossen Relaxation, die Sprünge bei den Hysteresiskurven schon bei wenigen Umelektrisierungen pro Minute. Dabei werden die Kurven auch breiter, d. h. das Koerzitivfeld wird grösser.

Nach diesem experimentellen Befund wurde an unserem Institut nochmals die Untersuchung der elektrischen Hysteresis aufgegriffen und es gelang von ARX²⁴⁾ bei statischer Messung, ebenfalls die Treppenform der Hysteresiskurven nachzuweisen.

Die Tatsache, dass bei unseren Kurven der Sättigungsast horizontal ist, deutet wieder darauf hin, wie schon oben vermutet, dass wir optisch nur die „Dipol“-Polarisation ohne Untergrund messen.

Die für die Hysteresiserscheinungen interessanten Daten sind für KD_2PO_4 in Fig. 17 als Funktion der Temperatur dargestellt. Oben ist die Sättigungspolarisation aufgetragen, wie sie aus Fig. 11 ausgewertet wurde und dazu im gleichen Masstabe diejenige Polarisation P_u , die sich mit 7500 Volt/cm umklappen lässt. Wie zu erwarten, decken sich die Werte für hohe Temperaturen. Bei 140° K beginnt sich aber eine Abweichung bemerkbar zu machen, die wir als den Beginn des „Einfrierens“ der Polarisation bezeichnen möchten. Das P_u fällt mit abnehmender Temperatur immer rascher bis auf 0 ab. Bei 110° K können wir mit einer Feldstärke von 7,5 KV/cm die Polarisation nicht mehr beeinflussen, sie ist „eingefroren“.

In der mittleren Kurve von Fig. 17 ist der Temperaturgang der Koerzitivfeldstärke E_k aufgetragen. Diese Grösse ist gleich der halben Breite der Hysteresiskurven, die übrigens bei einer bestimmten Temperatur überall gleich breit sind. Interessant ist hier, dass wieder bei der selben Temperatur, bei welcher das Einfrieren der Dipole beginnt (140° K), eine Unstetigkeit auftritt. Dass hier die

Koerzitivfeldstärke plötzlich so stark ansteigt, möchten wir wiederum dem beginnenden Einfrieren der Dipole zuschreiben.

Die Hysteresisverluste zeigen natürlich ein ganz ähnliches Verhalten. Die aus den optischen Messungen berechneten Hysteresisverluste bleiben unter den eigentlichen Verlusten zurück von dem Moment an, wo wir nicht mehr die ganze Polarisation umklappen können. Die Kurve steigt zwar anfänglich noch etwas an, fällt dann aber rasch auf null. Die wahren Verluste, dargestellt durch $4 P_s E_k$,

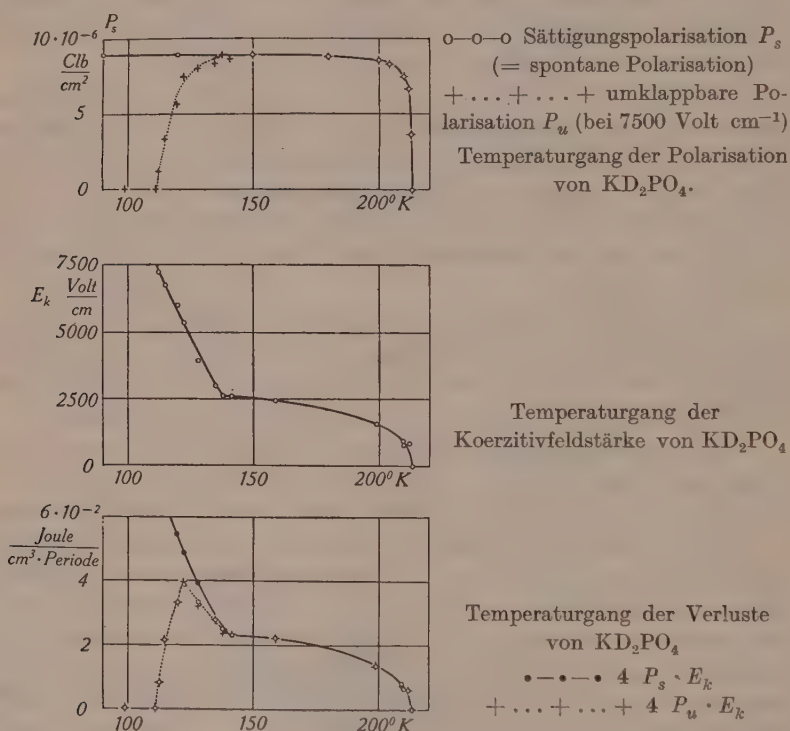


Fig. 17.

steigen aber wie das Koerzitivfeld unterhalb der kritischen Temperatur plötzlich an.

Diese Resultate sind in einem Punkt von denen BANTLE's⁴⁾ wesentlich verschieden, nämlich darin, dass wir bei allen diskutierten Grössen kein Minimum bei $200^\circ K$ finden. Da BANTLE mit 50 Hertz, wir aber statisch gemessen haben, ist der Grund wieder in der endlichen Einstellungsgeschwindigkeit der Polarisation zu suchen. Diese ist, wie zu erwarten, ausserdem temperaturabhängig.

Trotzdem zeigen BANTLE's Hysteresisaufnahmen ein beginnendes Einfrieren bei ungefähr der gleichen Temperatur.

Eine Auswertung der von BUSCH und GANZ²⁵⁾ gemessenen Hysteresiskurven führt zu ganz analogen Resultaten für KH_2PO_4 . Aus ihren Messungen schliessen wir auf eine kritische Temperatur von 80°K für KH_2PO_4 und von 82°K für KH_2AsO_4 ($\Theta = 96,5^\circ \text{K}$). Die Dipolpolarisationen sind bei diesen Salzen eingefroren bei ca. 55°K (KH_2PO_4) bzw. 68°K (KH_2AsO_4).

Die interessierenden Daten für KH_2PO_4 sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

	KH_2PO_4	KD_2PO_4
Maximale spontane Polarisation P_s, max in Clb/cm^2	$5,25 \cdot 10^{-6}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$
nach BANTLE ⁴⁾	$4,95 \cdot 10^{-6}$	$4,83 \cdot 10^{-6}$
Lorentzfaktor f	0,33	0,20
nach BANTLE ⁴⁾	0,37	0,68
nach BUSCH ¹⁾	0,42	
Curietemperatur in $^\circ \text{K}$	123,2	213,2
nach BANTLE ⁴⁾	123,0	213,1
Beginn des Einfrierens der Dipole in $^\circ \text{K}$ nach BANTLE ⁴⁾	~ 85	139
nach BUSCH und GANZ ²⁵⁾	—	~ 145
Maximaler Wert der $DK \epsilon_c$ bei Θ . .	$3,5 \cdot 10^4$	$4,7 \cdot 10^3$
nach BANTLE ⁴⁾	—	$4,4 \cdot 10^3$
nach BUSCH und GANZ ²⁵⁾	$3,2 \cdot 10^4$	—

6. Abweichungen vom linearen elektrooptischen Effekt.

Aus der allgemeinen Gleichung des Indexellipsoides (3) resultiert, für den Fall, dass nur $E_c \neq 0$ ist, eine zusätzliche Doppelbrechung, welche ihre Ursache in der Elektrostriktion hat. Sie geht mit E_c^2 und hat die Form

$$\Delta n = \Delta_0 - \Phi \cdot E_c^2 \quad (9)$$

Eine solche Abweichung vom linearen Verhalten haben wir bei KD_2PO_4 in der Nähe des Curiepunktes feststellen können. Da bei höheren Temperaturen von diesem quadratischen Effekt nichts zu merken ist, muss zudem geschlossen werden, dass einer oder mehrere der Koeffizienten p_{ik} oder g_{ik} wesentlich temperaturabhängig sind.

Wie man aus den Messresultaten sieht, beobachteten wir bei KH_2PO_4 eine viel grössere Abweichung vom linearen Effekt, die

aber nicht mit E^2 geht. Ein elektrostriktiver Effekt von gleicher Grösse wie bei KD_2PO_4 wäre kleiner als die Messgenauigkeit, weil nur bis 3 KV/cm gemessen wurde; er kann also wohl vorhanden sein. Die Ursache für die beobachtete Abweichung scheint im piezodielektrischen Effekt zu liegen. Nach OSTERBERG¹⁵⁾ ist nämlich die DK feldstärkeabhängig $\epsilon_c = \epsilon_c^0 - \text{const. } E_c^2$. Damit wird aber die Polarisation

$$P_c = \epsilon_c E_c - \beta \cdot E_c^3 \quad (10)$$

und weil $\Delta n = \alpha \cdot P_c$ auch die beobachtbare Doppelbrechung von der Form $\Delta n = \alpha \cdot \epsilon_c E_c - A \cdot E_c^3$, wobei sich A durch die g_{ik} , c_{ik} und α ausdrücken lässt. Einen solchen Charakter haben nun gerade die Kurven von KH_2PO_4 in der Nähe des Curiepunktes. Im Gegensatz zu KD_2PO_4 ist also für dieses Salz eine direkte piezodielektrische Beeinflussung vorhanden, was denkbar ist, da dieser Stoff am Curiepunkt auch eine 10mal grössere DK aufweist als das schwere Salz. Eine diesbezügliche Bestätigung folgt auch aus dem spontanen Kerreffekt dieser Salze, der im folgenden Abschnitt besprochen wird.

7. Erklärung des spontanen Kerreffektes.

Wir möchten ihn auf die spontane Elektrostriktion, die durch das Entstehen der Polarisation plausibel scheint, zurückführen. Da $P = x \cdot E$ ist, können wir für KD_2PO_4 nach Gleichung (9) sofort sagen, dass die spontane Doppelbrechungsänderung für dieses Salz mit P_s^2 gehen sollte. Das ist auch tatsächlich der Fall, die maximale Abweichung beträgt 4%.

Wegen der grossen piezodielektrischen Beeinflussung ist für KH_2PO_4 kein so einfacher Zusammenhang mehr zu erwarten. Wir hätten Gl. (10) nach E_c^2 aufzulösen und in Gl. (9) einzusetzen. Die ganze Rechnung ist aber erst dann von Interesse, wenn alle notwendigen p_{ik} , g_{ik} bzw. h_{ik} usw. bekannt sind und daraus der spontane Kerreffekt quantitativ berechnet werden kann.

8. Vergleich der Resultate mit den entsprechenden bei Seignettesalz.

Am ausführlichsten sind die Messungen MUELLER'S¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾. Für den Temperaturverlauf der Doppelbrechung von Seignettesalz findet er eine spontane Änderung von $n_a - n_c$ und $n_a - n_b$, während $n_c - n_b$ normal verläuft ($a =$ ausgezeichnete el. Achse). Am unteren Curiepunkt ist die Abweichung proportional dem Quadrat der spontanen Polarisation, beim oberen Curiepunkt dagegen nicht. Der Effekt ist etwa halb so gross wie bei KD_2PO_4 und etwa 8mal kleiner als bei KH_2PO_4 .

Was nun den linearen elektrooptischen Effekt anbetrifft, so zeigt sich aus dem Studium des Indexellipsoides, dass bei MUELLER,

der Licht parallel b und c durch den Kristall durchschickt, der lineare elektrooptische Effekt gar nicht beobachtet werden kann. Die von MUELLER beobachtete grösste Doppelbrechungsänderung ist erstaunlich klein, nämlich (bei 10 K Volt/cm am obern Curiepunkt) nur $0,4 \Delta n/\lambda$, also im Vergleich zum Kaliumphosphat etwa um einen Faktor 200 kleiner als der lineare Effekt und somit von der Grössenordnung des von uns beobachteten elektrostriktiven Anteils bei KD_2PO_4 , der ebenfalls quadratisch von E abhängt. Es handelt sich bei diesen von MUELLER beobachteten Erscheinungen offenbar um eine elektrostriktive Beeinflussung der Brechungsindices, wie wir sie für KH_2PO_4 in Gleichung (3) berücksichtigt haben.

Durch eine Arbeit von BANCROFT²⁶⁾ ist der piezodielektrische Effekt an Seignettesalz bestätigt. Man sieht daraus, dass die g_{ik} so gross sind, dass sie eine Elektrostriktion hervorrufen, die ihrerseits die Doppelbrechung messbar verändert. Es wäre daher durchaus möglich, dass die Resultate MÜLLER's weitgehend damit erklärt werden könnten.

Dem Aluminiumfonds Neuhausen danken wir für die freundliche Überlassung von Mitteln zu dieser Untersuchung.

Literaturverzeichnis.

- 1) G. BUSCH, H.P.A. XI, 269, 1938.
- 2) W. LÜDY, Zs. f. Phys. **113**, 302, 1939.
- 3) W. BANTLE und CH. CAFLISCH, H.P.A. XVI, 235, 1943.
- 4) W. BANTLE, H.P.A. XV, 373, 1942.
- 5) J. MENDELSSOHN und K. MENDELSSOHN, Nature **144**, 595, 1939.
- 6) W. LÜDY, H.P.A. XV, 527, 1942.
- 7) J. WEST, Zeitschr. Krist. **74**, 306, 1930.
- 8) A. R. UBBELOHDE und J. WOODWARD, Nature **114**, 632, 1939.
- 9) B. ZWICKER und P. SCHERRER, H.P.A. XVI, 214, 1943.
- 10) F. POCKELS, Lehrbuch der Kristalloptik.
- 11) J. VALASEK, Phys. Rev. **20**, 639, 1922.
- 12) H. MUELLER, Phys. Rev. **47**, 175, 1935.
- 13) H. MUELLER, Phys. Rev. **58**, 805, 1940.
- 14) H. MUELLER, Annals of the New York Academy of Sciences XL, 321, 1940.
- 15) OSTERBERG und J. W. COOKSON, Phys. Rev. **51**, 1096, 1937.
- 16) J. A. VAN LAMMEEREN, Technik der tiefen Temperaturen.
- 17) KLUGE und BRIEBRECHER, E.T.Z. 1935, 731.
- 18) M. EWALD, Die optische Werkstatt.
- 19) LANDOLT und BÖRNSTEIN, Phys. Chem. Tabellen HW II, 927.
- 20) BANTLE, BUSCH, LAUTERBURG und SCHERRER, H.P.A. XV, 324, 1942.
- 21) M. DE QUERVAIN und B. ZWICKER, H.P.A. XVI, 216, 1943.
- 22) J. C. SLATER, Journ. Chem. Physics **9**, 16, 1941.
- 23) R. BECKER und W. DÖRING, Ferromagnetismus, Berlin 1939.
- 24) A. VON ARX, H.P.A. XVII, 298, 1944.
- 25) G. BUSCH und E. GANZ, H.P.A. XV, 501, 1942.
- 26) D. BANCROFT, Phys. Rev. **53**, 587, 1938.

Zur Theorie der Richtstrahlung mit Parabolspiegeln

von F. Lüdi, Brown, Boveri & Cie., Baden.

(29. VI. 1944)

Inhalt: Mittels der Kirchhoff'schen Beugungsformel wird die Richtstrahlung für dm- und cm-Wellen durch ein Rotationsparaboloid berechnet und verglichen mit derjenigen anderer Richtantennen, beispielsweise elektromagnetisches Horn und Sägezahnantenne.

Einleitung: Beim optischen Scheinwerfer ist für die Divergenz α des Lichtkegels die Ausdehnung der Lichtquelle a (Krater) im Verhältnis zur Spiegelbrennweite f gemäss der bekannten Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2f}$$

massgebend; die Beugung tritt wegen des kleinen Verhältnisses von Wellenlänge und Spiegelöffnung ganz zurück. Nicht dagegen bei den viel grösseren Mikrowellen der Hochfrequenztechnik, wo dieses Verhältnis für die Divergenz des Strahlkegels ausschlaggebend ist. Es erfolgt hier eine Berechnung auf optischer Grundlage. Der wesentliche Unterschied ist neben der viel grösseren Wellenlänge die Polarisierung der vom Brennpunkt ausgehenden Kugelwelle. Für den Strahlengang ist wie bei den Lichtwellen die geometrische Optik zuständig. Die vom Brennpunkt ausgehende Kugelstrahlung wird am Paraboloid reflektiert und verlässt die Spiegelöffnung als „Parallelstrahlung“. erinnert man sich der geometrischen Eigenschaft der Parabel, dass die Strahlänge vom Brennpunkt zum Paraboloid und zurück auf eine Fläche senkrecht zur Hauptachse z. B. die Deckfläche konstant ist, so bekommt man die wichtigste Eigenschaft, nämlich die Gleichphasigkeit der die Öffnung verlassenden „ebenen“ Welle. Dies muss auch so sein, weil das Paraboloid für den Brennpunkt ein optisch abbildendes System ist. Wir können deshalb die Parabel und den Dipol ersetzen durch eine ebene Welle, welche auf eine kreisrunde Öffnung trifft und an dieser gebeugt wird. Für die Intensitätsverteilung über den Öffnungswinkel ist nun die Amplitudenverteilung der elektromagnetischen Feldstärke auf der beugenden Öffnung massgebend. Weil wir eine polarisierte Dipolstrahlung betrachten, so tritt im Gegensatz zum Licht, wo die strah-

lenden Dipole (die Atome) alle möglichen Richtungen haben, eine charakteristische Verschiedenheit der Erregung in der beugenden Öffnung auf. Sie äussert sich in der unterschiedlichen Horizontalcharakteristik (senkrecht zum Dipol) und Vertikalcharakteristik (in der Ebene Dipol und Spiegelachse) der Strahlung.

Die Anwendung der Kirchhoff'schen Formel läuft darauf hinaus, die Erregung in der Zwischenebene der beugenden Öffnung zu kennen. Durch eine Reihe plausibler Vereinfachungen werden wir uns dabei auf die wesentliche Abhängigkeit der Feldverteilung in der Zwischenebene beschränken und so auf einfache geschlossen integrierbare Ausdrücke kommen. Sie stimmen einerseits mit den Messwerten mit relativ guter Genauigkeit überein und führen andererseits auf einen direkten analytischen Vergleich mit den Formeln für das Horn und die Sägezahnantenne, wodurch der technische Vorzug des einen oder andern Richtgebildes bewertet werden kann. Die Kirchhoff'sche Formel muss als exakte Fassung des Huygens'schen Prinzips nicht nur die relative Intensitätsverteilung über den Beugungswinkel θ geben, sondern auch die absolute Intensität, d. h. die Verstärkung gegenüber der ungerichteten Dipolstrahlung, sofern die Erregung der Zwischenebene auf den Kugelstrahler im Brennpunkt bezogen ist. Auch dies ist von technischer Bedeutung, da ja die Richtantennen neben der eigentlichen Richtwirkung auch aus Gründen der Verstärkung der relativ kleinen Mikrowellenenergien benützt werden. Für Horn und Sägezahnantenne ist die Aufstellung einer Beziehung der Feldstärke in der Zwischenebene auf den einzelnen Dipol nicht gut möglich; trotzdem erlaubt die vorliegende Untersuchung, auch die Verstärkung dieser Richtgebilde gerade im Vergleich zum Paraboloid anzugeben. Noch eine Bemerkung analytischer Natur. Die hier geformte Problemstellung, Ersetzen des Spiegels und Dipols durch eine ebene konphase Welle, die an einer Schirmöffnung gebeugt wird, führt bei Anwendung der Kirchhoff'schen Formel auf die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen (Lichtquelle im Unendlichen), wobei im Exponenten des Kirchhoff'schen Ausdrucks nur lineare Glieder auftreten und wodurch die Integrale besonders einfach auszuwerten sind. Lichtquelle nahe der beugenden Öffnung führt bekanntlich auf Fresnel'sche Beugungsintegrale (quadratische Glieder im Exponenten), vgl. G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik.

Die folgenden Paragraphen geben die Rechnung der hier skizzierten Methode; § 3 enthält die Zusammenstellung der Resultate und § 4 den Vergleich mit andern Theorien, welche mir während und nach der Untersuchung bekannt wurden.

§ 1. Die Feldverteilung in der Zwischenebene.

Zur Orientierung diene Fig. 1. Aus später ersichtlichen Gründen wählen wir ein Paraboloid, dessen Brennpunkt in der Deckfläche liegt und die als Zwischenebene betrachtet wird. Es gilt dann für die Brennweite

$$f = \frac{1}{2} R.$$

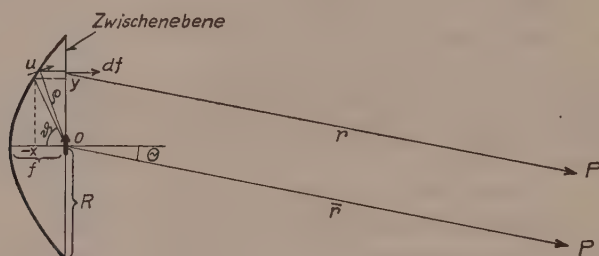


Fig. 1.

Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems O sei im Brennpunkt, wo sich auch der erregende Dipol befindet. Die x -Richtung fällt mit der Spiegelachse zusammen und die z -Richtung ist senkrecht auf der Zeichenebene zu denken. Die Figur ist ein Axialschnitt durch das Paraboloid in der x - y -Ebene. Ein Aufpunkt P , der sich in dieser Vertikalebene in grossem Abstand r vom erregenden Flächenelement df der Zwischenebene befindet, schliesst mit der Spiegelachse den Winkel θ ein. Der Gangunterschied Δ gegenüber dem erregenden Flächenelement in O beträgt

$$\Delta = y \cdot \sin \theta$$

Diese Gangunterschiede bestimmen im wesentlichen die Beugung durch die Begrenzung der strahlenden Fläche.

Der Dipol in O sende eine Kugelwelle aus. Die Brennweite sei genügend gross, dass sich die Spiegelfläche schon in der Fernzone befindet und die Feldstärke beim Auftreffen durch

$$u = \frac{u_0}{\varrho} \cos \vartheta \quad (1)$$

gegeben sei; u_0 gleich Dipolstärke. Die Abhängigkeit der Feldamplitude von der Entfernung vom Mittelpunkt O auf der Zwischenfläche ist durch zwei Gründe verursacht.

1. Auch bei unpolarisierter Strahlung (Licht) findet eine Schwächung der Amplitude nach der Begrenzung der Zwischenfläche statt durch die Vergrösserung von ϱ gegen den Rand des Spiegels. Durch die parabolische Reflexion entstehen parallele

Bündel, welche keine weitere Schwächung hervorrufen. Eine einfache Rechnung mit Hilfe der Parabelgleichung ergibt nach der Fig. 1

$$\frac{dy}{d\vartheta} = f \cdot \frac{f+2f(f+x) + (f+x)^2}{f + (f+x)}$$

Die Flächenhelligkeit in der Zwischenebene nimmt also nach dem Rand in dem Mass ab wie $\frac{dy}{d\vartheta}$ zunimmt und zwar gerade auf die Hälfte von $x = -f$ bis $x = 0$. Dies gilt für alle Flächenelemente in gleichem Abstand $\sqrt{y^2 + z^2}$ um die x -Achse. Trotzdem vernachlässigen wir diese Abhängigkeit und ersetzen sie durch eine mittlere Feldstärke entsprechend dem mittleren Abstand $\bar{\varrho} = \frac{3}{4} R$

$$u_1 \approx \frac{4}{3} \frac{u_0}{R}$$

wodurch bereits eine wesentliche Vereinfachung im Kirchhoff'schen Integralausdruck bewirkt wird.

2. Weitaus die wichtigere Abhängigkeit der Feldamplitude entsteht durch die Winkelabhängigkeit ϑ bei linear polarisierter Strahlung. In der x - z -Ebene ($\vartheta = 0$) besteht keine solche; dagegen in der x - y -Ebene nimmt die Flächenhelligkeit nach dem Rand mit $\cos \vartheta$ ab und wird Null am Rande selbst. Diese Abhängigkeit werde berücksichtigt, jedoch wieder aus rechnerischen Gründen in bezug auf das Beugungsintegral vereinfacht in der Weise, dass statt dem \cos des Winkels ϑ

$$\cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{R}$$

genommen werde. Für kleine Winkel ϑ , wo die Feldamplitude noch gross ist, nimmt dieser Ausdruck ab wie $\cos \vartheta$; erst für grössere Winkel, wo die Feldbeiträge kleiner werden, tritt eine stärkere Abweichung auf. Diese y -Abhängigkeit sei für alle z -Werte dieselbe. Auch das bedeutet eine Annäherung an die Wirklichkeit im Sinne einer Vereinfachung, weil bei seitlicher Ausschwenkung aus der x - y -Ebene auch eine z -Komponente auf Kosten der y -Komponente entsteht und am einfachsten durch Fig. 2 der Aufsicht auf den Spiegel veranschaulicht wird. Der Spiegel werde an 4 symmetrischen Punkten je von einem Strahl getroffen. Weil der elektrische Vektor immer in der Meridianebene durch den Dipol liegt, enthält er vor der Reflexion die z -Komponenten, welche sich jedoch sowohl in der y -Richtung wie in der z -Richtung aufheben. Dies wird aus Symmetriegründen auch nach der Reflexion der Fall sein, so dass

wir in der Zwischenebene nur ein Feld in der y -Richtung gemäss der erwähnten Verteilung zu betrachten brauchen.

3. Eine letzte Vereinfachung werde dadurch getroffen, dass man die kreisförmige Öffnung durch eine quadratische gleicher Fläche ($a = \sqrt{\pi} \cdot R$) ersetzt; dadurch ist Separation der Integrationsvariablen möglich, wodurch die Integration besonders einfach wird und zugleich auf den Vergleich mit dem Horn führt. Trotzdem die angeführten Vereinfachungen etwas rigoros erscheinen, werden wir doch sehen, dass die errechneten Resultate in brauchbarer Übereinstimmung mit den Messungen sind und vor allem die charakteristischen Merkmale wiedergeben.

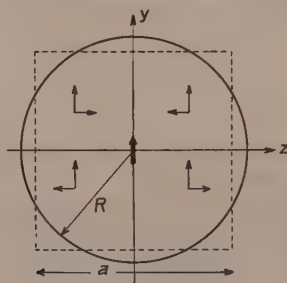


Fig. 2.

Wir setzen also für die Erregung der Zwischenfläche unter Berücksichtigung der Phase:

$$u_1 = \frac{4}{3} \frac{u_0}{R} \cos \pi \frac{y}{a} \cdot e^{-ikr_a} \quad \left(y \text{ von } -\frac{a}{2} \text{ bis } +\frac{a}{2} \right) \quad (2)$$

wo $k = 2\pi/\lambda$ und r_a der Weg vom Brennpunkt auf die Deckfläche ist.

§ 2. Berechnung des Feldes im Aufpunkt P .

Der allgemeine Ausdruck der Kirchhoff'schen Formel lautet

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_F \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \text{grad } u - u \text{ grad } \frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\mathbf{f} \quad (3)$$

wo u eine Vektorgrosse, in unserem Fall der elektrische Feldvektor ist. u ist die Erregung in der Zwischenfläche, also hier der Deckfläche, r der Abstand vom erregten Flächenelement $d\mathbf{f}$ zum Aufpunkt P , $d\mathbf{f}$ das vektorielle Flächenelement mit der Flächennormalen nach aussen von der Strahlungsquelle weg. Zur Berechnung der Verstärkung kommt es auf die Absolutgrösse des Ausdrucks an.

Es ist:

$$\text{grad} \frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} e^{-ikr} + ik e^{-ikr} \right) \mathbf{r}_0 \approx -\frac{ik}{r} e^{-ikr}$$

für grosse Abstände von $P \left(\frac{1}{r} \ll \frac{2\pi}{\lambda} \right)$; \mathbf{r}_0 ist der Einheitsvektor in Richtung P . Ferner ist mit (2)

$$\text{grad} u_1 = -u_1 ik \cdot \mathbf{r}_{a_0} = -ik \frac{4}{3} \frac{u_0}{R} \cos \frac{\pi y}{a} \cdot e^{-ikr_a} \cdot \mathbf{r}_{a_0}$$

\mathbf{r}_{a_0} Einheitsvektor in der Strahlrichtung auf die Zwischenfläche, also senkrecht wegen der Spiegelwirkung. Setzt man diese Ausdrücke in den Kirchhoff'schen Integralausdruck ein, so folgt:

$$u_P = \frac{ik}{\pi} \frac{u_0}{3R} e^{-ik2f} \int_F \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \Theta + 1) d\mathbf{f} \quad (4)$$

wenn berücksichtigt wird, dass $r_a = \text{konst.} = 2f$ ist und für $(\mathbf{r}_0, d\mathbf{f})$ und $(\mathbf{r}_{a_0}, d\mathbf{f})$ die \cos des Strahlvektors mit der Flächennormalen \mathbf{n} d. h. $\cos \Theta$ resp. -1 geschrieben werden (-1 , weil die vom Spiegel kommenden Strahlen parallel mit der nach aussen gerichteten Flächennormalen auf die Zwischenebene fallen).

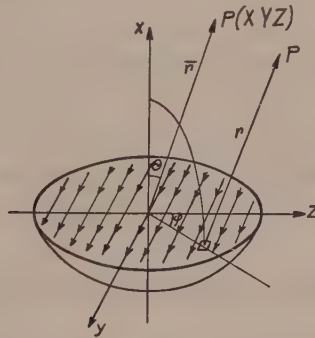


Fig. 3.

Führen wir jetzt Polarkoordinaten ein. Dann sind die Koordinaten des Aufpunktes P , Fig. 3

$$\begin{aligned} X &= \bar{r} \cos \Theta \\ Y &= \bar{r} \sin \Theta \cdot \sin \varphi \\ Z &= \bar{r} \sin \Theta \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

und der Abstand des Aufpunktes vom Flächenelement mit den Koordinaten y, z

$$r = \sqrt{X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2},$$

wird bei grossem Abstand r angenähert,

$$r \approx \bar{r} - \sin \Theta (y \cdot \sin \varphi + z \cos \varphi)$$

Wir setzen dies im Ausdruck (4) ein, wobei r im Nenner durch \bar{r} ersetzt werden kann (nicht aber im Exponenten, wo die Phase entscheidend wirkt) und $(\cos \Theta + 1)$ als langsam veränderlich vor das Integral gesetzt werden darf.

$$u_P = i \frac{2 u_0}{3 R} \frac{e^{-i \frac{2 \pi}{\lambda} (2 f + \bar{r})}}{\lambda \bar{r}} \cdot (\cos \Theta + 1) \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \cdot e^{+i \frac{2 \pi}{\lambda} (y \cdot \sin \varphi + z \cos \varphi) \sin \Theta} \cdot dy dz. \quad (5)$$

Hierbei ist noch $df = dy dz$ und $k = \frac{2 \pi}{\lambda}$ gesetzt und die Integration erstreckt sich über die Quadratfläche gemäss Fig. 2. Durch diese Vereinfachungen wird nun der Integralausdruck für ein beliebiges Azimut φ in einfacher Weise lösbar.

Wird $\cos \pi y/a$ durch

$$\frac{e^{i \frac{\pi y}{a}} + e^{-i \frac{\pi y}{a}}}{2}$$

ersetzt, dann bekommt man eine innere und äussere Integration (Separation), wobei für die innere z konst. und für die äussere y konstant ist. Die Integrale sind von der Form

$$\int_{-a/2}^{+a/2} e^{i \alpha x} \cdot dx = \frac{[e^{i \alpha x}]_{-a/2}^{+a/2}}{i \alpha} = 2 a/2 \frac{e^{i \alpha a/2} - e^{-i \alpha a/2}}{2 i \alpha a/2} = a \frac{\sin \alpha a/2}{\alpha \cdot a/2}$$

Das Schlussresultat nach Phase und Amplitude heisst:

$$u_P = i u_0 \frac{2 a^2}{3 R \lambda \bar{r}} e^{-i \left[\frac{2 \pi}{\lambda} (2 f + \bar{r}) + \pi \right]} \cdot \frac{(\cos \Theta + 1)}{2} \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cos \varphi \cdot \sin \Theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \cos \varphi \cdot \sin \Theta} \cdot \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta + \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta + \frac{\pi}{2}} + \frac{\left(\sin \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \sin \Theta - \frac{\pi}{2}} \right] \quad (6)$$

wobei also für $a = \sqrt{\pi} \cdot R$ in den weiteren Ausrechnungen zu setzen ist. Im Exponenten ist noch der Phasensprung π , der bei der Reflexion auftritt, berücksichtigt.

§ 3. Diskussion der Gleichung (6).

Dieser Ausdruck ergibt nun die Richtdiagramme in absoluter Grösse in bezug auf die Dipolstärke u_0 , enthält also auch die Verstärkung. Er vereinfacht sich sofort bedeutend, wenn man das Strahlungsdiagramm in zwei charakteristischen Ebenen, der Horizontalebene und der Vertikalebene betrachtet vgl. Fig. 3.

a) Horizontalebene $\varphi = 0$ dann wird die Winkelabhängigkeit des Absolutwertes der Feldstärke mit $a = \sqrt{\pi} \cdot R$

$$|u_P| = u_0 \frac{8}{3} \frac{R}{\lambda r} \frac{\cos \Theta + 1}{2} \frac{\sin \left(\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta \right)}{\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta} \quad (7)$$

Das erste Minimum bestimmt sich aus:

$$\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta = \pi$$

zu

$$\Theta = \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{\pi} \cdot R}$$

b) Vertikalebene $\varphi = \pi/2$. Man erhält für $|u_P|$ aus (6) nach einfacher Umformung:

$$|u_P| = u_0 \frac{2\pi}{3} \frac{R}{\lambda r} \frac{\cos \Theta + 1}{2} \frac{-\pi \cos \left(\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta \right)}{\left(\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \quad (8)$$

Die beiden Ausdrücke (7) und (8) werden für $\Theta = 0$ identisch wie es sein muss. Der Winkel für das erste Minimum folgt aus

$$\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta = \frac{3}{2} \pi$$

(nicht $\pi/2$, weil dafür auch der Nenner 0 wird) zu

$$\Theta = \arcsin \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi} \cdot R}$$

Für kleine Winkel ist also der Öffnungswinkel des Hauptkegels in der Vertikalebene 1,5mal grösser als in der Horizontalebene. Dafür sind die Nebenmaxima bedeutend kleiner, vgl. Fig. 4, wo die beiden Richtdiagramme für eine Apertur $\frac{2R}{\lambda} = 12$ nach Gleichung (7) und (8) aufgetragen sind. $\frac{\cos \Theta + 1}{2}$ kann für kleine Winkel durch 1 ersetzt werden. Die Verstärkung ist für dieses Beispiel nach Gleichung (9) 16fach für die Feldstärke.

c) Verstärkung in der Spiegelachse ($\Theta = 0$). Aus (6) folgt mit $a = \sqrt{\pi} \cdot R$

$$|u_P| = \frac{8}{3} \frac{u_0}{\bar{r}} \frac{R}{\lambda}$$

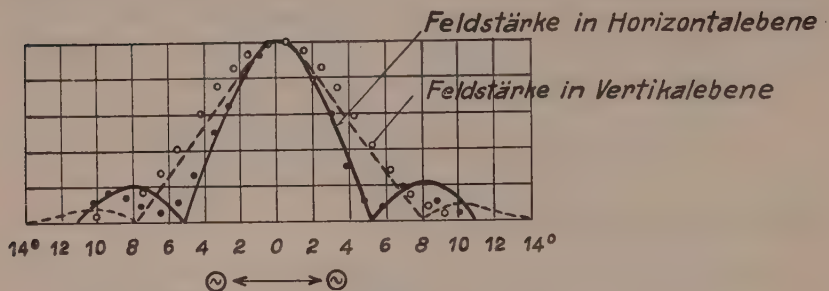


Fig. 4.

◦ Messpunkte nach Staal --- Berechnung nach Gleichung (7) und (8).

$$\text{für Spiegelöffnung } \frac{2R}{\lambda} = 12.$$

Vergleichen wir diesen Wert mit der freien Dipolstrahlung senkrecht zum Dipol ($\vartheta = 0$) im Abstand \bar{r} , Gleichung (1)

$$u = \frac{u_0}{r}$$

so folgt für die Verstärkung:

$$V = \frac{|u_P|}{|u|} = \frac{8}{3} \frac{R}{\lambda} = 2,65 \cdot \frac{R}{\lambda} \quad (9)$$

ein äusserst einfacher Ausdruck, der vor allem zeigt, dass diese durch dasselbe Verhältnis R/λ wie der Öffnungswinkel bestimmt ist. Das ist auch einleuchtend, denn die grössere Verstärkung wird durch die stärkere Bündelung erzielt. Weil die durch einen Senderdipol im Abstand r erzeugte Feldstärke proportional mit der Quadratwurzel der Leistung zunimmt, ist es bemerkenswert, dass ein Spiegel des dreifachen Durchmessers dieselbe Verstärkungssteigerung bewirkt wie ein Senderneunfacher Leistung!

d) Das elektromagnetische Horn. Ein Wellenleiter quadratischen Querschnitts werde mit einer H_{01} -Welle erregt. Das charakteristische dieses Wellentyps ist das Vorhandensein nur dreier Feldkomponenten, zwei magnetische in der Achsrichtung und eine elektrische senkrecht dazu, z. B. in der y -Richtung. Die Randbedingun-

gen ergeben eine Amplitudenverteilung der elektrischen Feldstärke in der z -Richtung gemäss

$$u_0 \cos \frac{\pi z}{b}$$

und zwar ist dies die exakte Abhängigkeit.

Man kann sich nun vorstellen, dass durch einen aufgesetzten Trichter keine Veränderung im stetigen Feldverlauf eintritt (keine weitere Knotenbildung), sondern lediglich eine ähnliche Vergrösserung auf die Trichtermündung erfolgt, wo die Feldverteilung jetzt

$$u_1 \cos \frac{\pi z}{a}$$

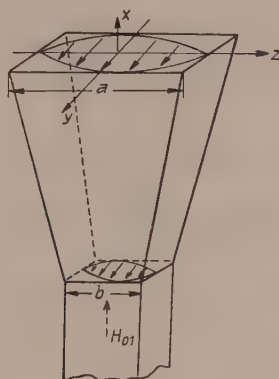


Fig. 5.

ist, die für $z = \pm a/2$ verschwindet. Die Feldverteilung ist in Fig. 5 wie in Fig. 3 durch die Länge der Pfeile angedeutet. Vergleichen wir jetzt mit dem Spiegel bei den oben gemachten Vereinfachungen, so erkennen wir, dass die Feldverteilung dieselbe ist und damit die Winkelabhängigkeit der Strahlung bei gleicher Strahlungsfläche dieselbesein muss (in den Formeln tritt an Stelle von $\pi^{3/2} R/\lambda$ einfach $\pi a/\lambda$) mit dem einzigen Unterschied, dass Vertikal- und Horizontalcharakteristik vertauscht sind, weil hier die \cos -Abhängigkeit senkrecht zur Dipolrichtung erfolgt.

e) Die Sägezahnantenne. Dieser ebenfalls bekannte Richtstrahler ist ein Drahtgebilde nach Fig. 6, welches in der Mitte durch eine Lecherleitung gespiesen wird. Die Schenkellänge $\lambda/2$ bewirkt, dass die durch die Pfeilrichtung angedeutete Stromverteilung J zustande kommt. Da sich die Horizontalkomponenten sowohl in der z - als auch in der y -Richtung aufheben, kann der Strahler durch die darunter gezeichnete gleichphasig schwingende „Dipolfläche“ und

bei genügend grosser Schenkelzahl durch eine homogene Feldverteilung ersetzt werden. Als Zwischenebene zur Berechnung der Beugung nach der Kirchhoff'schen Formel kann die Dipolebene selbst genommen werden. Ein zweites Gebilde gleicher Form im Abstand $\lambda/2$ wirkt als Reflektorantenne, so dass die Fläche nur nach vorn strahlt. Bei konstanter Feldverteilung resultiert für die Winkelabhängigkeit Gleichung (7), wo wieder statt $\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \frac{\pi a}{\lambda}$ zu setzen ist. Es sei hier bemerkt, dass dies der bekannte Ausdruck der Optik für die Lichtbeugung an einem Spalt der Breite a ist, wodurch die volle Analogie mit dieser hervortritt. Durch die Strahlungsdämpfung werden die äusseren Schenkel etwas schwächer als die inneren erregt sein, so dass im äussersten Fall mit einer cos-Verteilung gerechnet werden kann, dann gilt Gleichung (8). Man kann sagen, das Richtdiagramm wird bei gleicher Strahlungsfläche nahezu dasselbe wie für Horn und Spiegel.

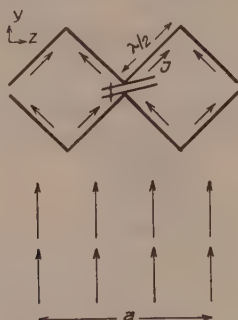


Fig. 6.

Zur direkten Bestimmung der Verstärkung würde beim Horn wie bei der Sägezahnantenne eine Beziehung der Feldamplitude in der „Zwischenebene“ auf den freistehenden Dipol erforderlich sein, die aber in den beiden Fällen nicht leicht anzugeben ist. Jedoch gibt folgende Überlegung eine indirekte Bestimmung der Verstärkung: Weil gezeigt wurde, dass die Strahlungsdiagramme bei gleich gross strahlender Fläche von Spiegel, Horn und Sägezahnantenne nahezu gleich sind, so muss bei gleicher Senderleistung bei angepasster Antenne die Verstärkung gleich sein wie beim Spiegel, also

$$V = \frac{8}{3} \frac{a}{\sqrt{\pi} \lambda}$$

denn die zugeführte Generatorleistung kommt ja bis auf die vernachlässigbaren Leitungsverluste als Strahlungsleistung zum Vor-

schein, welche mittels des Poynting'schen Vektors ($\approx |u_P|^2$) als Flächenintegration über das Strahlungsdiagramm erhalten wird. Jedoch mit einem Unterschied: dass die Verstärkung der beiden letzteren Richtstrahler noch um etwa einen Faktor $\sqrt{2}$ besser ist als die des Spiegels gleicher Richtfläche. Dies aus dem Grunde, weil bei diesem nach Fig. 1 nur die hintere Halbkugel der Dipolstrahlung ohne zusätzliche Verwendung eines Reflektordipols oder -spiegels gerichtet wird. Man kann also bei kurzen Wellen für die Richtwirkung mit ebenso gutem Vorteil die einfacheren Drahtgebilde an Stelle der teuren und umständlichen Parabolspiegel benützen.

§ 4. Vergleich mit anderen Theorien.

Die Theorie von DARBORD behandelt bereits die Verstärkung des Parabolspiegels in exakter Weise¹⁾. STAAL²⁾ berechnete dann auf Grund der Darbord'schen Theorie das Strahlungsdiagramm und führte auch Messungen zum Vergleich mit der Theorie aus. METSCHL³⁾ gibt in seinem Referat einen guten Überblick über die Methoden der Berechnung.

Weil DARBORD nicht die Kirchhoff'sche Formel benützt, muss er auf einem Umweg, um im Hinblick auf die Verstärkung die charakteristische $\frac{1}{r\lambda}$ Abhängigkeit nach Gleichung (6) zu bekommen, die Beugung (Diffraction) der einzelnen Spiegelemente mittels Energiesatz und Poynting'scher Strahlung berechnen.

Die exakte Verstärkungsformel, welche auch noch die Abhängigkeit von der Brennweite $p = 2f$ enthält, lautet

$$V = \frac{2\pi p}{\lambda} \left\{ \ln \left(\frac{R^2}{p^2} + 1 \right) - \frac{R^4}{(p^2 + R^2)^2} \right\}$$

Für $p = R$ (unser Beispiel der Fig. 1) wird daraus

$$V = 2,85 \frac{R}{\lambda}$$

Der Faktor 2,65 in Gleichung (9) weicht um weniger als 10% hiervon ab. Der Einfluss der Brennweite ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass mehr oder weniger als die Halbkugel der Dipolstrahlung gerichtet wird. Um mit der Spiegelfläche möglichst in die Wellenzone des Dipols zu gelangen, wird man eine grössere Brennweite wählen, jedoch mit Rücksicht auf die damit abnehmende Verstärkung nicht zu gross, so dass die Bauart $f = R/2$ nach Fig. 1 für übersichtliche Verhältnisse ein annehmbarer Kompromiss ist. Eine kritische Abhängigkeit von der Brennweite wegen

Phasenauslöschung mit der ungerichteten Vorwärtsstrahlung wird erst für sehr kleine Spiegelöffnungen im Verhältnis zur Wellenlänge zu erwarten sein; denn der Winkel, unter dem ein Objekt vom Dipol aus erscheint, ist für grosse Distanzen sehr klein im Vergleich zum Gesamtwinkel der gerichteten Strahlung.

Zur Bestimmung der Winkelabhängigkeit berechnet STAAL die Feldverteilung in der Brennebene und damit nach dem Huyghens'schen Prinzip die Superposition in P für die Vertikal- und Horizontalebene. OLLENDORFF hat schon früher⁴⁾ bei der Berechnung der Fernwirkungskennlinie einer Zylinderparabel aus Stäben diese durch die Deckfläche konstanter Dipolstärke (ohne nähere Begründung) ersetzt. Nach unserer Darlegung ist ersichtlich, dass die Zylinderparabel viel ungünstiger als Paraboloid, Horn oder Sägezahnantenne ist, weil die Phasengleichheit nur in der Äquatorebene erfüllt ist.

Für das Horn wurde bereits von BARROW und LEWIS¹⁾ die Winkelabhängigkeit nach Gleichung (8) in analoger Weise ausgerechnet und in guter Übereinstimmung mit den Messungen gefunden. Nach der vorliegenden Betrachtung liegt jedoch die Ursache der kleineren Nebenmaxima gegenüber dem Spiegel nicht in der focusfreien Führung des Wellenfeldes, sondern in der verschiedenen Feldverteilung in der Zwischenebene. Eine solche ist ja beim Spiegel auch in der Horizontalebene durch geeignete Mittel, wie z. B. durch ein schwächeres Reflexionsvermögen nach dem Rand ebenfalls zu erreichen.

Für die Sägezahnantenne sind ebenfalls schon spezielle Formeln aufgestellt worden⁶⁾, welche für grosse Öffnungen die gleiche Winkelabhängigkeit wie hier ergeben.

Die Fig. 4 ist im selben Masstab wie im Referat von METSCHL aufgetragen und die eingezeichneten Messpunkte zeigen, dass die Winkelabhängigkeit in der Horizontalebene mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben wird. Die Abweichung in der Vertikalebene ist auf die starke Vereinfachung der \cos -Abhängigkeit nach § 1 zurückzuführen; sie gibt aber die im Referat METSCHL betonte Niedrigkeit der gemessenen Nebenmaxima gut wieder.

Wenn auch nicht die volle Exaktheit mit unserer vereinfachten Theorie wiedergegeben wird (die durch bessere Berücksichtigung der Feldverteilung in der Zwischenebene beliebig weit getrieben werden könnte), so hat sie doch den Vorteil der Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit im Hinblick auf eine vergleichende Beurteilung der verschiedenen Richtstrahler. Sie zeigt vor allem auch, dass für nicht zu kleine Aperturen die Grösse des $\lambda/2$ -Dipols und dessen Stromverteilung für das Richtdiagramm ganz zu vernachlässigen ist.

Nachtrag.

Für konstante Feldverteilung in der Zwischenebene lässt sich das Doppelintegral in Gleichung (5) auch für kreisrunde Spiegelöffnung relativ einfach ausrechnen. Es wird statt (5) für die x -, z -Ebene ($\varphi = 0$), Fig. 3

$$\int_{z=-R}^{+R} \int_{y=-\sqrt{R^2-z^2}}^{+\sqrt{R^2-z^2}} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z \cdot \sin \Theta} \cdot dy dz \quad (10)$$

Die Integration von $-\sqrt{R^2-z^2}$ bis $+\sqrt{R^2-z^2}$ bedeutet zuerst Summation über alle gleichphasig mitwirkenden Felder in der y -Richtung und dann erst Phasenaddition in der z -Richtung. Für die Vertikalebene (xy) $\varphi = \pi/2$ sieht das Doppelintegral gleich aus bei Vertauschung der Integrationsvariablen und man muss also dieselbe Richtungsabhängigkeit bekommen. Die Ausrechnung führt auf Besselfunktionen erster Ordnung

$$u_P \approx 2 R^2 \pi \frac{J_1\left(2 \frac{R \pi}{\lambda} \sin \Theta\right)}{\frac{2 \pi R}{\lambda} \sin \Theta} \quad 1. \text{ Nullstelle: } \frac{2 \pi}{\lambda} R \sin \Theta = 3,83$$

welcher Ausdruck mit demjenigen für die Beugung an einem Loch in der Optik identisch ist. Für das Beispiel der Fig. 4 ist das Minimum nur 25' weiter aussen. Der Öffnungswinkel ist rund 1,2mal grösser als für einen Spalt *gleicher* Breite wie der Lochdurchmesser. Für die Verstärkung bekommt man anstatt Gleichung (9)

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{R}{\lambda} = 4,2 \frac{R}{\lambda}$$

also eine viel grössere Abweichung gegenüber dem exakteren Wert $2,85 R/\lambda$ als nach (9) unter Berücksichtigung der angenäherten Feldverteilung in der Öffnung.

Wird die Feldverteilung nach § 1 berücksichtigt, so ist das auszuwertende Integral für die kreisrunde Öffnung von der Form:

$$\int_{z=-R}^{+R} \int_{y=-\sqrt{R^2-z^2}}^{+\sqrt{R^2-z^2}} \cos\left(\frac{\pi y}{2 R}\right) \cdot e^{A y + B z} dy dz \quad (11)$$

Seine Ausrechnung ist bedeutend komplizierter als (10) und konnte

nur mit Hilfe der Laplace-Transformation gefunden werden. Der allgemeine Ausdruck für ein beliebiges Azimut φ wird

$$R \pi \left\{ \frac{J_1(R \sqrt{\alpha^2 - B^2})}{\sqrt{\alpha^2 - B^2}} + \frac{J_1(R \sqrt{\beta^2 - B^2})}{\sqrt{\beta^2 - B^2}} \right\} \quad (12)$$

worin

$$\alpha = iA + \frac{\pi}{2R}, \quad \beta = iA - \frac{\pi}{2R} \text{ ist.}$$

Für die Wurzeln gilt mit

$$A = 2 \frac{i\pi}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta \quad B = 2 \frac{i\pi}{\lambda} \cos \varphi \cdot \sin \Theta$$

$$\sqrt{\alpha^2 - B^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\sin \varphi \sin \Theta - \frac{\lambda}{4R} \right)^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta}$$

$$\sqrt{\beta^2 - B^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\sin \varphi \sin \Theta + \frac{\lambda}{4R} \right)^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta}$$

Die Verstärkung wird $V = 16/3 R/\lambda J_1(\pi/2) = 3,02 R/\lambda$, also etwas grösser als nach Gleichung (9), während der ursprüngliche Wert von DARBORD $\pi R/\lambda$ ist.

Der Vergleich von (12) mit der entsprechenden Gleichung (6) für quadratische Öffnung und also mit Horn und Sägezahnantenne ist nicht so übersichtlich und bleibe dem Leser überlassen. Die wenig grössere Genauigkeit wird nur mit unverhältnismässigem Aufwand erzielt. Herrn A. KÄCH, der die Ausrechnung der beiden Integrale durchgeführt hat, danke ich auch an dieser Stelle bestens für seine Bereitwilligkeit und gehabte Mühe.

Literaturangabe.

¹⁾ R. DARBORD, L'Onde Electrique **11** (1932), S. 54 und A. CLAVIER, L'Onde Electrique **13** (1934), S. 101.

²⁾ C. I. H. A. STAAL, Philips Transmitting News **3** (1937), S. 14.

³⁾ E. C. METSCHL, HF-Tech. & El. Ak. **50** (1937), S. 206.

⁴⁾ F. OLLENDORFF, Die Grundlagen der HF-Technik 1926.

⁵⁾ W. L. BARROW & F. D. LEWIS, Proc. of the I.R.E. (1939), S. 41. (Siehe auch W. L. BARROW und F. M. GREENE, Proc. the I.R.E. **26** (1938), S. 1498.

⁶⁾ M. H. CHIREX, L'Onde Electrique **5** (1926), S. 237; L'Onde Electrique **7** (1928), S. 168.

L'Hystérèse de la transformation du NH_4Cl .

par P. Dinichert.

(15. VII. 1944)

A. Introduction et Résumé

On sait que le NH_4Cl subit, à -30°C , une transformation, qui se manifeste par une variation rapide mais continue de plusieurs propriétés physiques et qui, dans son ensemble, est irréversible, de sorte qu'elle présente un effet d'hystérèse.

On trouvera ci-dessous une explication de cette hystérèse. Nous supposons qu'il n'existe que deux formes cristallines distinctes et qu'à une pression donnée le passage de l'une à l'autre s'effectue à une température bien déterminée. Lorsque cette température est atteinte, des noyaux de la nouvelle phase se forment à l'intérieur de l'ancienne. Ils peuvent être produits par la croissance de germes tels que ceux dont FRENKEL⁴⁾ a traité théoriquement la formation. Du fait que les deux mailles ont des dimensions différentes, ils exercent des tensions ou pressions qui déplacent la température de transformation des régions soumises à ces forces. Ces dernières, d'autre part, produisent des ruptures internes, une fois les limites de l'élasticité atteintes. La transformation devient ainsi une succession de phénomènes réversibles et irréversibles.

Cette théorie permet d'expliquer non seulement l'allure générale de la transformation, mais elle cadre aussi de façon satisfaisante avec les détails des données expérimentales ^{2) 5) 6) 7) 8)}, tant qualitativement que même quantitativement.

B. Les Calculs

1. Notations.

- α Forme cristalline à haute température.
- β Forme cristalline à basse température.
- $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ Coefficients linéaires de dilatation thermique de α et β .⁸⁾
- K_α, K_β Compressibilités isothermes de α et β .
- $\pm \lambda$ Dilatation et contraction relative de la maille au point de transformation.

- t Température (nous en situons le zéro à la température de transformation).
- $p(t)$ Courbe d'équilibre dans le diagramme de phase¹).
- $B = \frac{dp}{dt} = \text{constante.}$

2. *Suppositions.*

a) Le cristal est isotrope et homogène et se comporte sous certains rapports comme un fluide. C'est-à-dire que, dans des domaines limités, les pressions et tensions sont uniformes en tout point et en toute direction. (Cette supposition est probablement justifiée par le fait que l'observation des phénomènes ne donne que des valeurs moyennes).

b) Le volume total reste constant au cours des phases réversibles de la transformation. En d'autres termes, la limite extérieure des domaines envisagés est maintenue fixe.

c) Les ε ne varient pas avec la température (ce qui est vrai à une certaine distance de la transformation).

d) Les K ne varient pas avec la température et les valeurs utilisées sont celles que l'on trouve en dehors de l'intervalle de transformation. (Les mesures de compressibilité étant essentiellement macroscopiques et portant donc, dans l'intervalle de transformation, sur un mélange des deux formes, on est obligé de procéder de la façon indiquée).

Nous examinerons plus loin l'influence de ces approximations et nous montrerons qu'elles ne modifient pas l'aspect général de la transformation calculée.

3. *La propagation de la transformation en abaissant la température.*

Supposons qu'à l'intérieur d'un domaine de volume V de α il se soit formé, à la température $t = 0$, un noyau de β , qui à $-t$, a atteint un volume V_β . Admettons maintenant qu'à cette température un nouvel élément de volume dV_β se transforme. S'il était libre de se contracter, il occuperait un volume plus petit de la quantité

$$\delta V_1 = -3\lambda dV_\beta. \quad (1)$$

En réalité il est retenu par son enceinte et il soumet tout le domaine à une tension. Cette dilatation $-\delta V_1$ du système se répartit sur les deux formes, de telle façon, que d'une part la somme des augmentations des volumes V_α et V_β occupés par α et β lui soit égale:

$$\delta V_\alpha + \delta V_\beta = \delta V_1 \quad (\text{supposition b}) \quad (2)$$

et que d'autre part les tensions engendrées soient égales :

$$\delta p_\alpha = -\frac{\delta V_\alpha}{K_\alpha V_\alpha} = \delta p_\beta = -\frac{\delta V_\beta}{K_\beta V_\beta} = \delta p_1 \quad (3)$$

De (1) (2) et (3), on tire :

$$\delta p_1 = -\frac{3\lambda dV_\beta}{K_\alpha V_\alpha + K_\beta V_\beta} \quad (4)$$

A cause de la contraction thermique inégale ($\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$) des volumes V_α et V_β , un abaissement $-dt$ de la température fait également subir une dilatation au système :

$$\delta V_2 = 3 V_\beta (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) dt. \quad (5)$$

Il en résulte une tension :

$$\delta p_2 = -\frac{3 V_\beta (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) dt}{K_\alpha V_\alpha + K_\beta V_\beta} \quad (6)$$

La condition d'équilibre s'écrit alors (fig. 3 triangle abc) :

$$-B dt = -\frac{3}{K_\alpha V_\alpha + K_\beta V_\beta} [V_\beta (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) dt + \lambda dV_\beta].$$

ou, comme $V_\alpha + V_\beta = V$,

$$B dt = \frac{3}{K_\alpha V + (K_\beta - K_\alpha) V_\beta} [V_\beta (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) dt + \lambda dV_\beta] \quad (7)$$

Par intégration on trouve, pour le volume transformé jusqu'à la température $-t$, l'expression

$$V_\beta = V \frac{BK_\alpha}{B(K_\beta - K_\alpha) + 3(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)} \left(e^{\frac{B(K_\beta - K_\alpha) + 3(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)}{3\lambda} t} - 1 \right) \quad (8)$$

Relevons que la concentration V_β/V de la nouvelle forme ne dépend pas du volume V . Cela revient à dire que la transformation s'étale sur le même intervalle de température quelle que soit la grandeur du volume à transformer.

4. La propagation de la transformation en élevant la température.

En partant inversement des basses températures, il se produit des phénomènes analogues. Cependant les effets du saut de la constante réticulaire et de la dilatation thermique sont de sens opposé. Ainsi s'introduit la dissymétrie dans l'allure de la transformation effectuée dans une direction ou dans l'autre.

La condition d'équilibre s'exprime par (fig. 1, triangle $a'b'c'$):

$$B dt = \frac{3}{K_\beta V + (K_\alpha - K_\beta) V_\alpha} [V_\alpha (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) + \lambda dV_\alpha]. \quad (11)$$

et donne la relation suivante entre le volume transformé et la température:

$$V_\alpha = V \frac{BK_\beta}{B(K_\alpha - K_\beta) + 3(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)} \left(e^{\frac{B(K_\alpha - K_\beta) + 3(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)}{3\lambda} t} - 1 \right) \quad (12)$$

Là de même, la concentration V_α/V ne dépend pas du volume total V . Ce fait confère à nos considérations toute la généralité désirable. Elle nous permet, en effet, de les appliquer telles quelles à n'importe quel cristal, sans avoir à nous préoccuper des dimensions et du nombre de microcristaux ou de régions homogènes distinctes qui pourraient le constituer.

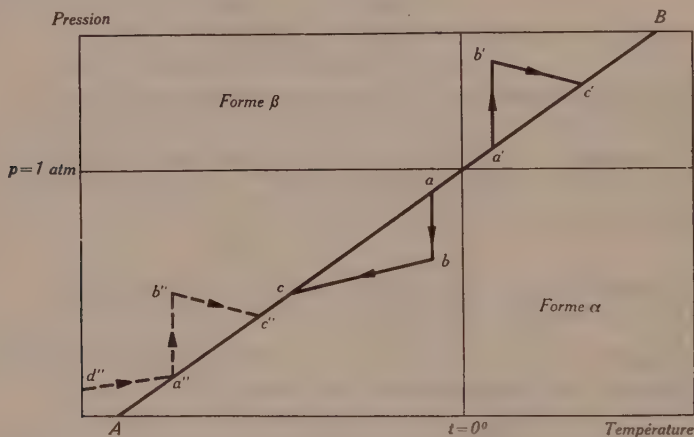


Fig. 1.

Diagramme de phase.

AB : Courbe d'équilibre.

$ab, a'b', a''b''$: Variations de pression dues au saut de la constante réticulaire.

$bc, b'c', b''c''$: Variations de pression dues à l'inégalité des dilatations thermiques de α et β .

5. Valeurs numériques.

Substituons, dans les équations (8) et (12), les valeurs numériques suivantes, que nous empruntons aux travaux déjà cités:

$$\varepsilon_\alpha = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ 1/deg}, \quad \varepsilon_\beta = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ 1/deg}, \quad \lambda = 1,5 \cdot 10^{-3},$$

$$K_\alpha = 5,5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{dynes}, \quad K_\beta = 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{dynes},$$

$$B = 75 \cdot 10^6 \text{ dynes/cm}^2 \cdot \text{deg}$$

et nous obtenons :

$$\frac{V_\beta}{V} = -1,2 (e^{-0,076 \cdot t} - 1), \quad (8')$$

$$\frac{V_\alpha}{V} = +0,9 (e^{+0,076 \cdot t} - 1). \quad (12')$$

Ces deux fonctions sont représentées graphiquement dans la figure 2.

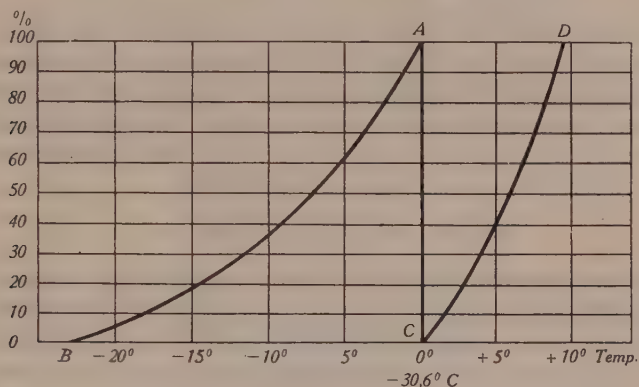


Fig. 2.

Concentration de la forme α du cristal pendant la transformation.
 (Sans ruptures.)

Examinons de quelle manière nos résultats sont faussés par nos approximations.

Si le pourtour du volume V , au lieu d'être fixe, cède aux tensions et pressions, celles-ci en sont diminuées. L'effet est d'autant plus marqué que l'enceinte, formée de phase en état de disparition, devient plus mince, c'est-à-dire que la transformation est plus avancée.

En outre, en abaissant la température, les valeurs de ε_α et ε_β se rapprochent l'une de l'autre et la tension due à l'inégalité des contractions thermiques devient plus faible (voir éq. [6]). Par contre, en élevant la température, la tension due à la même cause devient plus forte, puisque l'écart entre ε_α und ε_β va alors en augmentant (voir éq. [10]), et il en résulte une diminution de pression à l'intérieur du système. Cela signifie que, par nos approximations, nous avons introduit dans nos calculs deux effets retardateurs supplémentaires. Les transformations doivent donc s'effectuer sur un intervalle de température plus petit que celui que nous avons calculé.

C. La Transformation

Essayons maintenant de décrire la transformation en partant uniquement des deux lois de transformation, que nous venons d'établir, et des limites probables d'élasticité du cristal.

1. *Abaissement de la température.*

a) Le début de la transformation.

Partant avec un cristal formé à haute température, donc homogène, il y a, au point de transition $t = 0$, soudainement apparition de la nouvelle phase. Les faits expérimentaux indiquent qu'elle suit la courbe AB de la fig. 2 sur un petit intervalle de température jusqu'à ce que 5% du cristal environ soient transformés. Cette première étape est réversible.

b) Les ruptures internes.

Ensuite l'expérience montre que brusquement la transformation progresse très rapidement sur quelques centièmes de degré. Cela provient de ce que les tensions, qui sont à ce moment là de l'ordre de grandeur de 10kg/cm^2 , ont atteint les limites de l'élasticité (cela semble plausible si l'on se base sur les données connues pour le NaCl passablement plus dur). Il se produit alors progressivement des ruptures internes, plus ou moins favorisées par des défauts du cristal. Il existe, ainsi que nous le verrons plus loin, plusieurs preuves expérimentales de ces ruptures, qui, faisant disparaître les tensions, permettent au cristal de continuer sa transformation. Il s'agit là de l'étape irréversible de la transformation.

c) La fin de la transformation.

Quelques petites régions plus résistantes, parce que vraisemblablement particulièrement homogènes, restent néanmoins sous tension. Elles continuent à se transformer relativement lentement, puisqu'elles suivent la fin de la courbe AB . Supposons que la transformation y soit achevée lorsqu'on se trouve au point a'' de la fig. 1. L'ordonnée de a'' donne la tension à laquelle ces domaines restent soumis. Remarquons, enfin, que cette dernière étape est de nouveau réversible.

2. *Élévation de la température.*

a) Le début de la transformation ($t < 0$).

En vertu de ce qui a été dit à la fin du paragraphe précédent, nous sommes en présence d'un cristal homogène quant à la sub-

stance (β), mais inhomogène en ce qui concerne les pressions internes.

Les régions sous tension suivent dans la fig. 1 la courbe $d'' a'' b'' c''$. Nous observons donc l'apparition de très petits noyaux de forme α à une température $-t$ déjà, qui grossissent selon une loi analogue à celle exprimée par l'éq. (12').

b) La suite de la transformation.

At $t = 0$, la majeure partie du cristal, celle qui se trouvait à pression normale, commence, elle aussi, à se transformer en suivant la courbe CD de la fig. 2, jusqu'à ce que 10% du cristal à peu près se soient transformés.

c) Les ruptures.

Puis, sous l'effet des pressions, qui peuvent vraisemblablement atteindre des valeurs plus élevées que les tensions avant de dépasser les limites de l'élasticité, il se produit à nouveau des ruptures. Le cristal se transforme presque entièrement.

d) La fin de la transformation.

Les quelques régions qui ont résisté, cette fois également, se transforment rapidement, puisqu'elles suivent l'extrémité de la courbe CD . Comme nous étions partis d'un cristal parfaitement homogène, chaque élément de volume retrouve sa place une fois la transformation complète terminée, et il ne subsiste ici aucune inhomogénéité au point de vue de la pression. Cela signifie qu'en abaissant de nouveau la température, le début de la transformation aura lieu à $t = 0$.

Pour être complets, disons, pour terminer, que les étapes a), b) et d) sont réversibles, tandis que c) ne l'est évidemment pas.

Assemblons maintenant ces différentes phases de la transformation (voir aussi fig. 3), et comparons par anticipation le cycle ainsi construit aux résultats obtenus par la diffraction des rayons X pour la concentration des deux formes α et β . (Nous nous étions du reste laissé guider par ces expériences pour le choix de l'endroit où il fallait faire intervenir les ruptures). Nous constatons une concordance satisfaisante, tant qualitative que quantitative, pour l'apparition des formes nouvelles, les intervalles de températures, les quantités de substances transformées et la dispersion des mesures dans les régions du phénomène irreproductible des ruptures.

3. Les transformations partielles.

Dans la fig. 3 est retracée la concentration de la forme α pour une transformation dans laquelle on a admis des tensions et des pressions de rupture plus grandes qu'en réalité, afin d'élargir la boucle d'hystérèse et de faciliter la représentation graphique de ce que nous allons exposer.

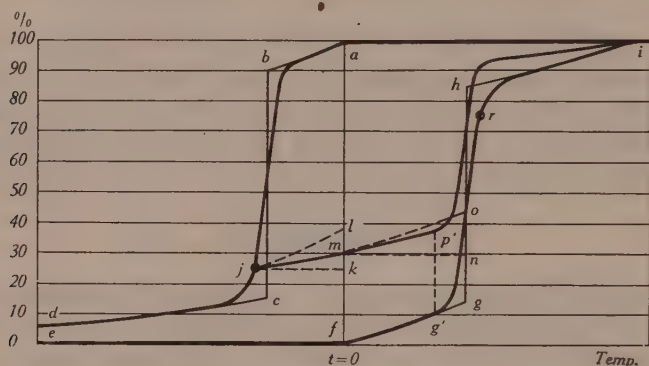


Fig. 3.

Concentration de la forme α pendant une transformation complète (a b c d e f g r i) et pendant une transformation partielle (a b j m p' h i).

(La courbe en trait mince correspond à la transformation d'un cristal dans lequel les ruptures se produiraient simultanément. Les courbes en traits épais représentent des transformations réelles avec des ruptures s'étalant sur un étroit intervalle de température.)

Le cristal est amené par refroidissement en j . En ce point il est constitué d'un mélange de régions sous tension et de régions sous pression normale. Si l'on élève de nouveau la température jusqu'à $t = 0$, les régions sous pression normale, donc entièrement composées de β , suivent l'horizontale jk , c'est-à-dire qu'elles ne se retransforment pas encore; les régions sous tension, de leur côté, suivent la courbe jm , qui se déduit de la courbe de transformation réversible ab , reportée en jl , en tenant simplement compte qu'elle ne s'applique plus qu'à 35% du cristal, qui se retransforment pour le moment (100% moins les 65% transformés par rupture et correspondant au saut bj). Si l'on continue à réchauffer le cristal, les régions retransformées suivent évidemment l'horizontale mn , tandis que la forme β sous pression normale se met à se transformer et suit la courbe mp' , déduite de la courbe fg , reportée en mo , en tenant de nouveau compte de la quantité de substance (70% environ) qui est en état de transformation.

Arrivé au point p' , situé en-dessus du point g' , les ruptures se produisent et ceci d'autant plus facilement qu'il s'agit, à cet instant, d'un cristal de constitution tout à fait inhomogène. Par conséquent la quantité de substance transformée au cours de cette étape est relativement plus considérable que dans le cas d'une transformation complète, et pour cette raison, le coude en h est plus brusque.

N'importe quel autre cycle partiel, par exemple celui qu'on obtiendrait en partant du point r et en refroidissant le cristal, se construirait ou se calculerait de façon analogue.

D. Comparaison avec les expériences

A l'appui de notre théorie, nous allons citer un certain nombre de faits expérimentaux caractéristiques, tirés de quatre séries de mesures :

- I. Les chaleurs spécifiques⁷⁾,
- II. Les constantes diélectriques⁹⁾,
- III. Les propriétés élastiques⁶⁾,
- IV. Les dimensions de la maille⁸⁾
(par diffraction des rayons X).

Chacune de ces méthodes d'investigation (que nous désignerons désormais par ces chiffres romains) présente des avantages et des inconvénients :

I est d'une grande précision, mais ne donne que le comportement global du cristal et la méthode de mesure ne permet guère de rester à une température fixe.

II est moins précis ; ne donne également que le comportement global du cristal, mais rend possible une succession rapide de mesures, facilitant l'exploration de très petits intervalles de températures.

III fournit entre autres de précieux renseignements sur les ruptures présumées.

IV révèle séparément l'évolution de chacune des deux formes cristallines. Par contre elle ne se prête pas à l'étude détaillée de petits cycles à cause des longs temps d'exposition.

a) La température de transformation $t = 0$.

Les quatre séries montrent que la transformation commence à la même température bien déterminée ($t = 0$), que l'on parte des hautes ou des basses températures.

b) Les ruptures.

I. La transformation progresse par à-coups dans la partie presque verticale de la boucle d'hystérèse.

II. Peu après le début de la transformation, la constante diélectrique fait parfois un saut brusque et irrégulier. Il se manifeste par une pointe étroite et aiguë au point de départ de la partie raide de la courbe de transformation, mais en sens opposé à l'évolution normale. GUILLIEN⁵⁾ a du reste observé ce même phénomène au cours de ses mesures sur des poudres cristallines.

III. Le cristal est plastique et le coefficient de frottement interne est fortement augmenté juste à l'endroit où les autres propriétés physiques changent brusquement.

IV. L'exploration de la surface, au moment où les deux phases ont à peu près la même concentration, montre bel et bien que la transformation s'effectue par régions plus ou moins étendues.

I, II et III montrent que la température $t = 0$ ne se trouve pas au milieu de la boucle d'hystérèse, conformément à ce que nous avons prévu à cause d'une différence éventuelle entre la tension de rupture et la pression d'éclatement.

En outre Smits et ses collaborateurs²⁾ ont remarqué que la variation de volume (mesurée au dilatomètre) dans la région correspondant aux ruptures est d'autant plus brusque que la substance est plus pure (simultanéité des fractures).

c) Les transformations partielles.

I et II fournissent de petits cycles dont les caractéristiques correspondent exactement à celles des cycles que nous pouvons construire selon la méthode du paragraphe C 3.

d) Les propriétés des deux formes α et β .

La meilleure vérification de notre théorie est donnée par IV. En effet, connaissant les tensions et les pressions qui règnent à l'intérieur du cristal, il est aisé de calculer, en fonction de la température, les déformations que subit la maille de chacune des deux formes.

Or les courbes pour les constantes réticulaires, que l'on détermine de cette façon-là, ont un aspect tout à fait semblable à celui qui avait été trouvé expérimentalement et qui, à ce moment là, avait paru quelque peu étrange.

L'élargissement des raies, qui doit se produire dans les régions

cù il y a coexistence de domaines sous des pressions différentes, est faible et absolument conforme à l'expérience. Il correspond à une variation de dimensions de la maille de $0,1\%$.

E. Conclusions

Toute transformation accompagnée d'un changement de volume doit pouvoir être traitée de la même façon. Les transformations dites normales, c'est-à-dire sans hystérèse, ne seraient que des cas limites, dus soit au fait qu'il ne se produit pas de tensions, le corps n'étant pas rigide, soit au fait que les tensions et pressions dépassent, dans un intervalle de température extrêmement petit déjà, les limites de l'élasticité, la variation de volume étant grande.

Remarquons toutefois que la température à laquelle le cristal se brise ne dépend pas seulement de la tension de rupture de la substance sous l'effet d'une traction ou compression pure. Il faut encore tenir compte des forces latérales à la limite entre les deux phases, et qui dépendent d'une part de la quantité de substance transformée, mais d'autre part probablement aussi d'un changement de structure éventuel du cristal au passage d'une phase à l'autre.

Des phénomènes semblables à ceux décrits dans ce travail devraient se produire en particulier à la fusion. Or UBBELOHDE³⁾ semble précisément les avoir observés dans ces mesures des chaleurs spécifiques de l'octadécane aux abords du point de fusion.

Monsieur le Professeur Weigle voudra bien trouver ici l'expression de ma vive gratitude pour les nombreuses discussions qu'il m'a été donné d'avoir avec lui.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

¹⁾ BRIDGMAN, Phys. Rev. **38**, 182, 1931.

²⁾ SMITS, MÜLLER, KRÖGER, Zs. Phys. Chem. **38**, (B), 177, 1937.

³⁾ UBBELOHDE, Trans. Farad. Soc. **34**, 292, 1938.

⁴⁾ FRENKEL, Journal Chem.-Phys. **7**, 538, 1939.

⁵⁾ GUILLIEN, Comptes-Rendus **208**, 1561, 1939.

⁶⁾ LAWSON, Phys. Rev. **57**, 417, 1940.

⁷⁾ EXTERMANN, WEIGLE, Helv. Phys. Acta, **15**, 455, 1942.

⁸⁾ DINICHERT, Helv. Phys. Acta **15**, 462, 1942.

⁹⁾ DINICHERT, Helv. Phys. Acta **17**, 400, 1944.

La constante diélectrique du NH_4Cl au point de transformation

par P. Dinichert

(15. VII. 1944)

A. Introduction

La constante diélectrique est une des nombreuses propriétés physiques qui, par son anomalie, révèle la transformation du NH_4Cl . Il semblait donc intéressant d'étudier, en particulier sur des cristaux uniques, son comportement près du point de transition, afin d'obtenir de nouveaux faits expérimentaux susceptibles d'éclairer le mécanisme de l'hystérèse de cette transformation. Nous avons donné dans l'article précédent une explication de l'allure de la transformation. Aussi, dans le travail ci-dessus, n'avons-nous cherché qu'à étudier l'hystérèse du phénomène sans mesurer la constante diélectrique en valeur absolue.

B. Le dispositif expérimental

Le circuit de mesure a été décrit par COHEN-ENRIQUEZ et RENAUD¹⁾ et nous n'y avons apporté que quelques modifications insignifiantes. Si l'on voulait procéder à une étude détaillée des cycles d'hystérèse, il fallait atteindre une précision de mesure des capacités du millièrne de cm. Il était donc indispensable d'éviter tout changement parasite de capacité du dispositif expérimental. Le circuit oscillant était placé dans un thermostat et, bien que construit de façon très rigide, nous l'avions soustrait à tout effort mécanique, qui aurait pu lui être transmis par les tiges de commande des condensateurs. Afin d'obtenir de très petites variations de capacité, adaptées aux variations de la constante diélectrique, le condensateur de mesure et le condensateur qui pouvait lui être substitué pour contrôler la stabilité du circuit (après chaque lecture) étaient constitués de deux armatures métalliques fixes, entre lesquelles on introduisait une plaque de verre semi-circulaire. La variation maximum de capacité résultant de ce changement de diélectrique était d'environ 0,5 cm. et la graduation des condensateurs permettait d'en lire le millièrne. Nous travaillions avec une fréquence d'environ 2000 kHz.

Nous sommes arrivés à obtenir des cristaux d'environ 10 cm. de capacité, sur lesquels nous déposons, par évaporation, des électrodes d'or (pour qu'elles puissent suivre les déformations du cristal et soient chimiquement inattaquables). Le condensateur qui les contenait comme diélectrique était formé d'une petite boîte métallique. Elle était hermétiquement fermée, contenait une matière desséchante et était immergée dans un bain dont nous réglions la température. C'est un thermocouple qui mesurait cette température et c'est un thermocouple également qui, en commandant un dispositif de réglage automatique que nous avons déjà utilisé précédemment²⁾, permettait de la maintenir constante. La précision était de 0,02°.

C. Résultats

Malgré les précautions prises, nous n'avons pas pu éviter une certaine dérive du circuit électrique. Comme nous ne pouvions la mesurer qu'à une température déterminée, pour l'extrapoler ensuite sur toute la région de transformation, les courbes peuvent être quelque peu déformées dans le sens des ordonnées (constante diélectrique). Cette distorsion est d'autant plus petite que les temps employés pour les mesures et les intervalles de température sont plus petits, de sorte que les détails de la transformation, pris séparément, ne sont entachés que d'une très faible erreur. En outre, l'allure générale des courbes, qui seule nous intéressait, n'en est pas altérée. Celle-ci est tout à fait analogue à celle que présentent d'autres propriétés physiques, telles que l'énergie interne³⁾ et le volume du cristal²⁾⁴⁾.

1. *Les cristaux uniques.*

Nous avons étudié plusieurs cristaux, qui se sont tous comportés de façon semblable mais non pas identique. Ce fait avait été déjà constaté au cours d'autres expériences. Chaque transformation a son aspect particulier, dû probablement au degré de pureté et d'homogénéité (pouvant se modifier d'une transformation à l'autre) du cristal. Ces inégalités se manifestent par des coudes plus ou moins brusques au début et à la fin de la transformation et par des différences de largeur de la boucle d'hystérèse. Deux cycles de transformations obtenus avec le même cristal sont représentés dans la fig. 1.

Nous ne donnons pas de valeurs pour ε , puisque nous ne les avons pas mesurées. Notons toutefois qu'en prenant la valeur d'environ 3, empruntée à GUILLIEN⁵⁾, nous obtenons, comme lui, $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ de l'ordre de grandeur de 1% au point de transition.

La température t_f , à laquelle on peut situer le début de la transformation, est la même quel que soit le sens dans lequel est effectuée la transformation. Cependant la partie de la courbe qui correspond à la transformation rapide rendue possible par les ruptures, est plus rapprochée de t_f lorsqu'on abaisse la température que lorsqu'on l'élève.

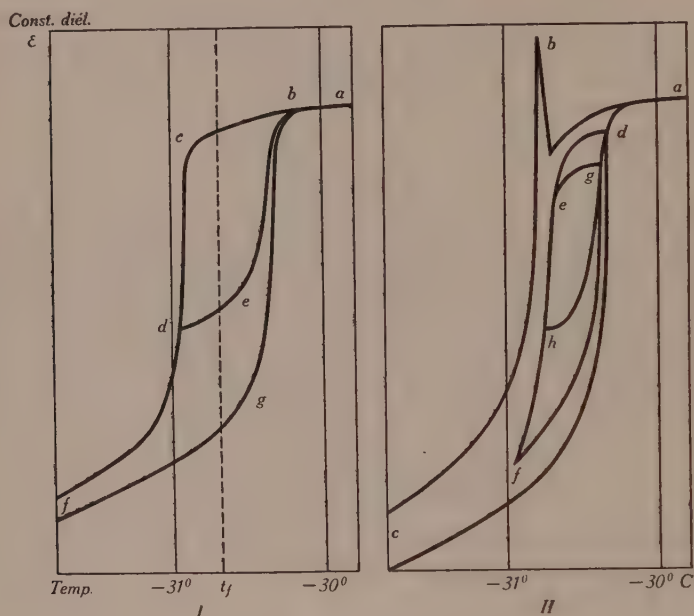


Fig. 1.

Transformations complètes et partielles d'un cristal unique.

Les transformations ont été parcourues de la façon suivante:

I: $a b c d e b c d f g b a$

II: $a b c d e h f g e h g d a$

t_f : point de transition.

Il y a du reste plusieurs faits qui semblent démontrer l'existence de ces ruptures. A l'endroit précis où elles doivent se produire selon la théorie, on observe parfois un saut brusque et irrégulier de la constante diélectrique dans un intervalle de température de quelques centièmes de degré, mais en sens opposé à l'évolution normale (fig. 1, II, point b). GUILLIEN⁵⁾ a observé ce même phénomène au cours de ses mesures sur des poudres. D'autre part nous avons constaté une boucle d'hystérèse plus large (d'environ 0,1°) lors de la première transformation d'un cristal que lors des transformations consécutives, ce qui montre que les inhomogénéités

créées par une transformation facilitent les fractures. Enfin, les cycles sont d'autant plus étroits et s'achèvent d'autant plus rapidement que moins de substance a été transformée, c'est-à-dire que l'inhomogénéité du cristal est plus grande.

Du côté des basses températures, les deux branches de la courbe ne convergent que très lentement l'une vers l'autre, mettant ainsi en évidence le grand étalement en température de la transformation.

2. Les poudres.

Des expériences semblables sur des poudres comprimées en forme de pastilles montrent que les petites dimensions des particules ne semblent influencer la transformation, conformément à la théorie, que par l'inhomogénéité accrue qu'elles occasionnent: les fractures se produisent plus facilement, tout en s'étalant sur un plus grand intervalle de température. En conséquence la boucle d'hystérèse est moins large, mais par contre plus arrondie et plus inclinée (fig. 2).

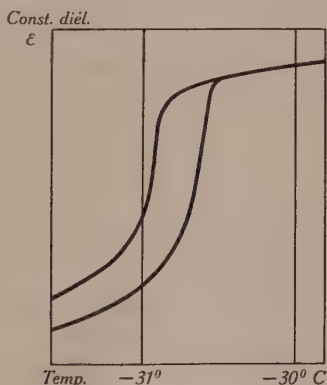


Fig. 2.

Transformation d'une poudre cristalline.

En outre on constate, du fait que la densité macroscopique d'une poudre, même comprimée, est plus petite que celle d'un cristal unique, que la constante diélectrique apparente est plus faible que pour un cristal unique (comparaison de la fig. 1 et de la fig. 2 dessinées à la même échelle).

D. Résumé

Nous avons observé le comportement de la constante diélectrique du NH_4Cl dans un intervalle de température de 10°

autour du point de transition, à environ -30° . L'aspect des courbes de transformations complètes et partielles de cristaux uniques et de poudres est semblable à celui d'autres propriétés physiques. Il est conforme à l'interprétation que nous avons donnée du phénomène d'hystérèse de cette transformation.

En terminant je tiens à remercier Monsieur le Professeur WEIGLE, qui m'avait proposé ces recherches, du grand intérêt qu'il leur a porté.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

¹⁾ COHEN-ENRIQUEZ, RENAUD, *Physica* **2**, 429, 1935.

²⁾ DINICHERT, *Helv. Phys. Acta* **15**, 462, 1942.

³⁾ EXTERMANN, WEIGLE, *Helv. Phys. Acta* **15**, 455, 1942.

⁴⁾ SMITS, MÜLLER, KRÖGER, *Zs. Phys. Chem.* **38** (B), 177, 1937.

⁵⁾ GUILLIEN, *Comptes-Rendus* **208**, 1561, 1939.

Compte-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique

tenue à Sils (Engadine) le 3 septembre 1944.

Président: Prof. Dr. H. König (Berne), absent.

Vice-président: Prof. Dr. G. WENTZEL (Zurich).

Secrétaire: Prof. Dr. A. MERCIER (Berne).

Partie administrative.

La Société a perdu l'un de ses membres les plus estimés, M. MAX WEHRLI, professeur à l'Université de Bâle, membre du Comité et ancien président de la Société. Le vice-président fait une adresse à sa mémoire.

La Société a reçu comme nouveau membre M. HOURIET (Zurich).

Partie scientifique.

Ein Problem aus der Theorie des Deuterons

VON K. BLEULER (Zürich).

FIERZ und WENTZEL haben kürzlich das Deuteron-Problem behandelt auf Grund eines Nukleon-Modells, das sie der Mesontheorie (starke Kopplung) entnommen haben¹⁾. Die Tensorkraft (Spin-Bahn-Kopplung) wurde dabei vernachlässigt. Dann ist die Hamiltonfunktion H des Zweikörperproblems eine Diagonalmatrix bezüglich der folgenden Quantenzahlen:

J = Gesamtspin ($J = 0, 1, 2 \dots$)

M = Spinkomponente ($M = -J, \dots, +J$)

K = gesamter „isotoper Spin“ ($K = 0, 1, 2 \dots$)

$N + 1$ = Ladung ($N = -K, \dots, +K$)

Die Untermatrix H , die zu einem Wertsystem dieser 4 Quanten-

¹⁾ M. FIERZ und G. WENTZEL, Zum Deuteronproblem I, *Helv. Phys. Acta* **17**, S. 215 (1944). — G. WENTZEL, Zum Deuteronproblem II, *Helv. Phys. Acta* **17**, S. 252 (1944).

zahlen gehört, ist noch eine Matrix bezüglich der Spins j_1, j_2 der beiden Nukleonen ($j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$)

$$(j_1 j_2 | H | j_1' j_2') = \left\{ \frac{-\Delta}{M_p} + \frac{\varepsilon}{2} [(j_1 + \frac{1}{2})^2 + (j_2 + \frac{1}{2})^2 - 2] \right\} (j_1 j_2 | 1 | j_1' j_2') + V(r) (j_1 j_2 | \Omega | j_1' j_2')$$

($V(r) > 0$) (vgl. FIERZ und WENTZEL I, § 2). Bisher wurden nur die Untermatrizen diskutiert, bei denen entweder $J=0$ oder $K=0$ ist (Spin-Singulett bzw. Ladungs-Singulett). Im allgemeinen Falle erwiesen sich nun die gleichen Methoden als brauchbar; allerdings erfordern sie längere Rechnungen. Ohne auf diese einzugehen, soll hier nur das Hauptergebnis skizziert werden.

In der „Adiabaten-Methode“ wird das Problem zunächst für einen konstanten Nukleonenabstand r behandelt; die so erhaltenen Eigenwerte von H (ohne Translationsenergie $\frac{-\Delta}{M_p}$) sind von r abhängig: $W(r)$; sie bestimmen die Potentialkurven der adiabatischen Näherung. $W(r)$ kann in zwei Grenzfällen berechnet werden:

1. In grossen Abständen r ist die Wechselwirkungsenergie $V(r)$ klein gegen die Isobaren-Energie ε , so dass erstere als kleine Störung behandelt werden kann; eine einfache Störungsrechnung ergibt dann $W(r)$ als Entwicklung nach Potenzen von $V(r)/\varepsilon$.

2. $V(r) \gg \varepsilon$ (r klein). Hier ergibt die Oszillatornäherung (FIERZ und WENTZEL I, § 4 und II, § 2) eine Entwicklung von $W(r)$ nach Potenzen von $\sqrt{\frac{\varepsilon}{V(r)}}$:

$$W = -V + \sqrt{\varepsilon V} (2n+1) + \varepsilon \left[\frac{J(J+1) + K(K+1) - d^2}{4} - \frac{n(n+1)}{8} - \frac{17}{16} \right]$$

Dabei sind d und n ganze, nicht negative Zahlen, deren Paritäten durch die Bedingung

$$J + K + d + n = \text{ungerade}$$

eingeschränkt sind ($d = |j_1 - j_2|$, n = Oszillationsquantenzahl); ferner ist d nach oben begrenzt durch die Bedingungen

$$d \leq J, \quad d \leq K.$$

Alle zu $d \neq 0$ gehörigen Eigenwerte W sind doppelt, die entsprechenden Eigenfunktionen sind in j_1, j_2 symmetrisch bzw. antisymmetrisch. Für $J=0$ oder $K=0$ kann d nur den Wert 0 annehmen ($j_1 = j_2$); in diesem Sonderfall kommt man auf die Formel (44) (l. c. II) zurück. Die Eigenwerte $J=0$, $K=1$, $n=0$ und $J=1$, $K=0$, $n=0$ sind von allen die tiefsten. Die Zuordnung der Eigen-

werte W in den beiden Grenzfällen ergibt sich daraus, dass bei festen Werten von J und K eine Überschneidung der Potentialkurven ausgeschlossen ist.

Für den Vergleich mit der Erfahrung kommen vorderhand nur diejenigen Potentialkurven $W(r)$ in Betracht, die für $r \rightarrow \infty$ zwei unangeregten Nukleonen entsprechen ($j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, $W(\infty) = 0$). Diese Kurven sind in der folgenden Tabelle charakterisiert:

J	K	$V(r) \ll \varepsilon$	$V(r) \gg \varepsilon$	Parität
1 0	0 1	$W = -\frac{V}{3} + \dots$	$W = -V + \sqrt{\varepsilon V} - \frac{9}{16} \varepsilon + \dots$ ($d=0, n=0$)	gerade
1	1	$W = \frac{V}{9} + \dots$	$W = -V + \sqrt{\varepsilon V} - \frac{5}{16} \varepsilon + \dots$ ($d=1, n=0$)	ungerade
0	0	$W = V + \dots$	$W = -V + 3\sqrt{\varepsilon V} - \frac{21}{16} \varepsilon + \dots$ ($d=0, n=1$)	ungerade

Die letzte Kolonne gibt die Parität der räumlichen Schrödingerfunktion gemäss dem Pauli-Prinzip an (S - bzw. P -Terme).

Die S -Potentialkurven $J=1, K=0$ (3S) und $J=0, K=1$ (1S) liegen in beiden Grenzfällen am tiefsten, was mit der Erfahrung verträglich ist (vgl. II, § 3). Für die 3P -Kurve ($J=K=1$) gilt wie für die 1P -Kurve ($J=K=0$) (vgl. I, § 4), dass $W(r)$ im 2. Grenzfall (kleine r) negativ wird (entsprechend anziehenden Kräften). Dies ist von Bedeutung für die Richtungsverteilung (Anisotropie) der Neutron-Proton-Streuung bei höheren Energien.

Der Jubiläumsspende für die Universität Zürich möchte ich für die Gewährung einer Subvention, die mir diese Arbeit ermöglichte, meinen besten Dank aussprechen.

Diskussionsbemerkung von G. WENTZEL (Zürich).

Die von Herrn Dr. BLEULER erwähnten anziehenden P -Potentiale haben zur Folge, dass die Richtungsverteilung der Neutron-Proton-Streuung bei höheren Energien anisotrop wird in dem Sinne, der den Beobachtungen¹⁾ entspricht. Solange die Tensorkraft vernachlässigt wird, ergibt sich allerdings (nach unveröffentlichten Rechnungen von Herrn VILLARS) eine zu schwache Anisotropie, da nämlich die P -Potentialkurven dann immer oberhalb der S -Kurven liegen. Nun bewirkt aber die Tensorkraft (Spin-Bahn-

¹⁾ E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. FERRETTI, G. C. TRABACCHI: Naturwiss. **30**, 582 (1942); Ric. Scient. **13**, 502 (1942).

Kopplung) unter anderem eine Aufspaltung des 3P -Terms ($J = K = 1$) in ein Triplett, und wenn auch nur eine dieser drei Potentialkurven genügend tief zu liegen käme, würde dies für die Erklärung der beobachteten Anisotropie der Streuung ausreichen (ähnlich wie in der von RARITA und SCHWINGER¹⁾ diskutierten „neutralen Theorie“). Eine genauere Prüfung dieser Frage ist beabsichtigt.

¹⁾ W. RARITA, J. SCHWINGER: Phys. Rev. **59**, 556 (1941).

Diffusion des électrons rapides par les noyaux du plomb

par Pierre Du Pasquier.

(25. VIII. 1944.)

Résumé. La diffusion par le plomb des électrons d'énergies comprises entre 1 et 3 Mev. est étudiée à la chambre de Wilson dans des vapeurs de plomb tétraméthyl. La diffusion observée est en accord avec les prévisions théoriques.

Une discussion tenant compte des dernières mesures montre que les résultats actuels ne confirment pas les anomalies signalées lors des premières recherches dans ce domaine.

§ 1. Introduction.

Les électrons rapides qui pénètrent dans la matière entrent en interaction avec les électrons des différentes orbites et avec les champs de forces des noyaux. Cette interaction se manifeste par:

1° l'ionisation, qui permet de voir la trace de l'électron dans la chambre de Wilson;

2° l'excitation des atomes et des molécules;

3° la déviation brusque de la trajectoire. On dit alors que l'électron a subi un « choc ». Le choc peut être:

a) élastique, au cas où l'électron conserve son énergie;

b) inélastique s'il en perd une partie, soit par l'arrachement d'un électron périphérique qui est alors fortement accéléré, soit par l'émission d'un quantum de radiation de freinage dans le champ d'un noyau.

Dans ce travail, nous étudierons particulièrement le processus 3° a), désigné dans son ensemble par le terme de « diffusion ». On peut admettre que les chocs élastiques qui causent une déviation notable (disons $> 15^\circ$) sont dûs uniquement au champ d'un noyau. En principe, on devrait tenir compte du champ des couches électroniques (effet d'écran). Mais, dans les chocs considérés, l'électron pénètre profondément dans l'atome et il est dévié très près du noyau dont il s'approche jusqu'à une distance de l'ordre de 10^{-11} cm. où l'influence du cortège électronique n'est plus sensible. Un calcul numérique de BARTLETT & WELTON¹⁾ montre que l'effet d'écran est négligeable pour les déviations de plus de 15° dès que l'énergie dépasse $\frac{1}{4}$ de Mev. (les électrons étudiés ici ont des énergies de 1 à 3 Mev.). Nous pouvons également négliger l'entraînement du

noyau et le considérer comme fixe, sa masse étant environ $4 \cdot 10^5$ fois celle de l'électron.

La loi de la diffusion dépend de la nature du champ de forces du noyau; la théorie a été faite (voir § 2) en postulant l'existence du seul champ électrique de Coulomb. Des expériences de diffusion permettent de voir si cette hypothèse est justifiée. Un désaccord avec la théorie indiquerait l'existence d'une interaction supplémentaire entre électron et noyau. Une telle réaction ne serait pas impossible a priori, car l'émission de rayons β par les corps radioactifs montre que les particules lourdes du noyau ont des interactions avec des électrons. Toutefois, comme l'émission d'une particule β est accompagnée par celle d'un neutrino, le processus inverse, absorption d'un rayon β par un noyau, devrait être précédé par la création d'une paire de neutrinos, et la probabilité d'un tel effet serait faible (de second ordre). Seule, l'expérience peut décider de l'existence ou de la non-existence d'une interaction de ce genre.

Les premières mesures de diffusion ont donné des résultats assez discordants. D'importantes anomalies ont été signalées, notamment pour l'azote²⁾. Leur explication théorique soulevait de grandes difficultés³⁾. D'autre part, il existait des contradictions entre les mesures de différents auteurs^{2) 4) 5)}. Il était donc nécessaire de compléter et de préciser les données expérimentales. C'est pourquoi une série de mesures ont été faites à l'institut de physique de l'E.P.F.^{6) 7) 8)}, par la technique de la chambre de Wilson, dans des conditions comparables, en tenant compte de plusieurs facteurs importants, avant tout de la correction géométrique (voir § 3).

A la suite du travail de BLEULER⁸⁾, on pouvait admettre une diffusion normale pour les atomes légers. Pour les noyaux moyens et lourds, les valeurs trouvées étaient en général plus faibles que les valeurs théoriques, par exemple KLARMANN & BOTHE⁹⁾ trouvent pour le Xénon 0,2 fois la valeur calculée, et 0,17 pour le Krypton. BARBER & CHAMPION¹⁰⁾ trouvent les facteurs 0,4 pour l'iode et 0,15 pour le mercure. Mais là aussi des contradictions subsistaient^{11) 12)}.

La question se posait donc de savoir si le champ coulombien suffisait à expliquer la diffusion observée, et si par conséquent les anomalies signalées devaient être attribuées à des erreurs expérimentales, ou s'il y avait vraiment entre électron et noyau une interaction supplémentaire de plus en plus marquée en allant vers les atomes lourds. C'est pour résoudre cette question que des mesures furent entreprises par SIGRIST¹³⁾ sur l'iode et par nous-mêmes sur le plomb. SIGRIST, grâce au fort pouvoir diffusant de la vapeur

de iodure de méthyle employée par lui, a une bonne précision statistique (250 chocs observés). Ses résultats montrent un très bon accord avec la théorie. Les mesures relatées ici font également conclure à une diffusion normale pour le plomb.

§ 2. Théorie de la diffusion.

Un calcul de RUTHERFORD donne la loi de la diffusion de particules électrisées par un centre chargé (mécanique classique). Pour les électrons rapides, il est indispensable d'introduire l'expression relativiste de la masse, $m/\sqrt{1-\beta^2}$. La section efficace pour la diffusion d'un angle Θ dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$ est:

$$R(\Theta)d\Omega = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \cos^2 \frac{\Theta}{2} d\Omega = Z^2 r(\Theta) d\Omega \quad (1)$$

avec la signification des lettres:

Z = nombre atomique du noyaux diffusant

m = masse au repos de l'électron

e = charge de l'électron (en unités é. s.)

$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\text{vitesse de l'électron}}{\text{vitesse de la lumière}}.$

Les autres théories de la diffusion donnent la même distribution, multipliée par une fonction de l'angle Θ , de valeur voisine de un, soit $f(\Theta)$, dans l'expression de laquelle Z et β entrent comme paramètres.

Les sections efficaces sont donc $R(\Theta)f(\Theta)d\Omega$ et la distribution de RUTHERFORD est caractérisée par $f(\Theta) \equiv 1$.

MOTT¹⁴⁾ a calculé la diffusion par la théorie de DIRAC, et trouve un développement en puissances croissantes de $Z\alpha$, où α est la constante de structure fine:

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137}.$$

Ce développement est:

$$f(\Theta) = 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \pi\beta Z\alpha \sin \frac{\Theta}{2} \cos^2 \frac{\Theta}{2} + \dots \quad (2)$$

URBAN¹⁵⁾, reprenant le calcul avec les mêmes hypothèses que MOTT, aboutit à un développement analogue:

$$f(\Theta) = 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \pi\beta Z\alpha \sin \frac{\Theta}{2} + \dots \quad (3)$$

qui diffère du précédent par l'absence du facteur $\cos^2 \Theta/2$ dans le coefficient de $Z\alpha$.

Ces deux développements ne sont valables que pour les éléments légers ($Z\alpha \ll 1$), et ne donnent qu'un ordre de grandeur pour la diffusion par un élément lourd comme le plomb. Aucune formule correspondante n'existe pour les atomes lourds, mais des calculs numériques ont été faits dans des cas particuliers.

MOTT¹⁶⁾ a calculé $f(90^\circ)$ en fonction de l'énergie dans la diffusion par l'or ($Z = 79$).

BARTLETT & WATSON¹⁷⁾ donnent des valeurs de $f(\theta)$ pour diverses énergies comprises entre 23,4 kv. et 1,7 Mev., et pour une série d'angles entre 15° et 180° . Les calculs sont faits pour le mercure ($Z = 80$), et les auteurs font remarquer que la variation de $f(\theta)$ avec Z est assez lente pour que ces résultats puissent être utilisés au calcul de la diffusion par les éléments voisins (Au, Pb, Tl, Bi). La variation avec l'énergie est également assez faible pour qu'on puisse utiliser les valeurs calculées pour 1,7 Mev. dans tout le domaine de 1 à 3 Mev., l'erreur ne dépassant certainement pas 4%.

Enfin, MASSEY¹⁸⁾ donne une courbe $f(\theta)$ pour la diffusion d'électrons de 1,7 Mev. par le mercure. Sa courbe, basée sur les calculs de BARTLETT & WATSON, redonne exactement la même distribution. C'est celle que nous avons prise pour base de nos calculs.

§ 3. Méthode, appareillage.

La méthode utilisée est, comme pour les travaux précédents, celle de la chambre de Wilson avec champ magnétique, le milieu diffusant étant à l'état gazeux. Les trajectoires électroniques sont photographiées stéréoscopiquement et sont restituées dans l'espace par un appareil à projections. L'énergie des électrons est mesurée par la courbure de leur trajectoire dans le champ magnétique et les chocs sont observables directement, les chocs inélastiques étant reconnaissables à l'augmentation de la courbure après le choc, ou, dans le cas de l'arrachement d'un électron, à la trace de celui-ci.

La chambre de Wilson automatique est décrite en détails dans un travail précédent⁶⁾. Rappelons-en rapidement les principales caractéristiques. La détente est commandée pneumatiquement en reliant l'espace situé sous le piston à un réservoir préalablement vidé. La pression du gaz dans la chambre est légèrement inférieure à une atmosphère, en sorte que le piston remonte dès qu'on laisse agir la pression atmosphérique sur sa face inférieure. Toutes les opérations sont commandées électriquement par des contacts fermés au moment voulu par des cames. Une rotation complète de l'arbre à cames correspond à un cycle d'opérations et à la prise

d'une photo. La durée de ce cycle a été réglée uniformément à 35 secondes. L'espace utile, éclairé latéralement par 4 lampes sofités, a un diamètre de 17 cm. et une profondeur de 1,65 cm. Les deux appareils de prise de vues sont disposés symétriquement par rapport à l'axe de la chambre et leurs lignes de visée font entre elles un angle de $21,5^\circ$. Les vues ont été prises sur film de cinéma normal AGFA Isopan Ultra 23/10 Din, les objectifs étant ouverts à 1:3,2. Le champ magnétique est produit par deux bobines de 283 tours. Toutes les photos ont été faites avec un champ de 1000 gauss, nécessitant une intensité de 60 amp. Le champ, mesuré au moyen d'une bobine exploratrice et d'un galvanomètre balistique, par comparaison avec le champ calculable d'une longue bobine sans fer, a été reconnu homogène à moins de 1% près dans tout l'espace utile. Les électrons sont émis par une préparation de radium. Une lentille électronique en concentre un faisceau grossièrement monocinétique sur une fenêtre de mica par où ils pénètrent dans la chambre. Des blocs de plomb arrêtent le rayonnement γ du radium pour éviter les photo-électrons qui nuiraient à la clarté de l'image.

Restitution des trajectoires.

Les films sont placés dans deux appareils de projections situés par rapport à l'écran comme les appareils de prise de vues par rapport au plan horizontal médian de la couche éclairée. Une tablette mobile sert d'écran et les deux projections se recouvrent lorsqu'elle est dans la position convenable.

La méthode de scintillation, qui consiste à projeter alternativement l'une et l'autre image plusieurs fois par seconde, et dans laquelle la fixité de l'image est le critère du recouvrement des deux projections, très fatigante pour la vue, a été remplacée par celle des anaglyphes, deux filtres respectivement rouge et vert étant placés devant les objectifs de projection. Le critère du recouvrement est alors l'apparition d'une seule image noire au lieu de deux images rouge et verte.

Pour chaque trace ainsi restituée, on mesure :

- 1^o la courbure, d'où l'on déduit facilement l'énergie,
- 2^o la longueur,
- 3^o l'angle de déviation, lors d'un choc éventuel.

A cause de la faible profondeur de la couche éclairée et du fait que l'axe de la lentille électronique est horizontal, toutes les trajectoires visibles sont dans une position quasi-horizontale, ce qui permet de simplifier beaucoup le travail en mesurant les courbures et les longueurs sur un plan de projection horizontal fixe. Ce n'est

que lorsqu'une trajectoire, après un choc, sort du plan horizontal, qu'on emploie la tablette mobile pour trouver la position exacte et la vraie grandeur de l'angle. La photographie stéréoscopique n'est pas superflue pour autant, car elle est nécessaire pour distinguer les chocs réels des croisements accidentels de traces.

La courbure et la longueur sont mesurées à l'aide d'un ensemble de cercles tracés à l'encre de chine sur du celluloïd.

Nombre de chocs théorique.

En intégrant $2\pi R(\Theta)f(\Theta)\sin\Theta d\Theta$ entre Θ_1 et Θ_2 , on obtient la section efficace pour le diffusion entre les angles Θ_1 et Θ_2 . Soit $\sigma(\Theta_1\Theta_2) = Z^2s(\Theta_1\Theta_2)$ la valeur de cette intégrale.

Si un électron parcourt un trajet de longueur L dans un milieu contenant N atomes par cm^3 , il doit subir en moyenne un nombre $NL\sigma(\Theta_1\Theta_2)$ de déviations sous des angles compris entre Θ_1 et Θ_2 . Comme il y a un mélange de différents gaz dans la chambre de Wilson, la diffusion totale est la somme des diffusions de chacun des constituants. En appelant N_i le nombre d'atomes de nombre atomique Z_i par cm^3 , on a :

$$n(\Theta_1\Theta_2) = \sum N_i Z_i^2 L \cdot 2\pi \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} r(\Theta)f(\Theta)\sin\Theta d\Theta = \sum N_i Z_i^2 L s(\Theta_1\Theta_2) \quad (4)$$

On commet ainsi une erreur, car on a donné à tous les atomes la même loi de diffusion $f(\Theta)$ qu'au plomb. Mais comme les autres constituants n'entrent que pour 10 % dans l'expression de $\sum N_i Z_i^2$, un calcul approché de la différence suffit à faire la correction. On obtient :

pour les intervalles	15—20°	20—30°	30—60°	60—180°
une correction	2,5 %	3 %	4 %	6 %

valeur à soustraire du nombre calculé. Sans être explicitement rappelée plus loin, cette correction est sous-entendue dans les formules (5) et (12).

Correction géométrique.

Un choc ne peut être reconnu avec certitude que si les deux branches de la trajectoire avant et après la déviation ont une longueur et une netteté suffisante. Une longueur minimum est également nécessaire pour mesurer la courbure. D'autre part, les chocs pour lesquels le plan défini par les deux tangentes à la trajectoire passant par le point de choc est très incliné par rapport au plan horizontal seront peu ou pas visibles, et mal définis à cause des mauvaises conditions optiques. Pour ces raisons, on con-

vient de ne considérer comme observables que les chocs qui remplissent les conditions suivantes:

- 1° les deux branches ont une longueur minimum de 1,5 cm.,
- 2° le plan des deux tangentes n'est pas incliné de plus de 45° sur le plan horizontal.

Le nombre des chocs observables n'est donc qu'une fraction g du nombre total des chocs. Cette fraction serait $\frac{1}{2}$ si la condition 2) était seule exigée. En tenant compte des deux conditions, un calcul élémentaire⁷⁾ donne un coefficient plus petit que $\frac{1}{2}$:

$$g(\Theta) = \frac{1}{2} - \frac{b \sin \Theta}{\pi d} (2 - \sqrt{2}) = 0,5 - 0,1695 \sin \Theta$$

avec b = longueur minimum exigée: 1,5 cm.

d = profondeur éclairée: 1,65 cm.

$g(\Theta)$ représente la probabilité, pour une déviation d'angle Θ , d'être observable.

Le nombre théorique des chocs observables est donc:

$$n_{\text{obs}}(\Theta_1 \Theta_2) = \sum N_i Z_i^2 L \cdot 2 \pi \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} r(\Theta) f(\Theta) g(\Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (5)$$

où la longueur L est la somme des longueurs des trajectoires, chacune d'elles étant préalablement réduite de 3 cm., car un choc survenant pendant les premiers ou les derniers 1,5 cm. ne serait pas observable en vertu de la condition 1).

Nous appellerons L la « longueur réduite ».

L'intégration de la formule (5) a été faite graphiquement à l'aide d'un planimètre sur une courbe tracée point par point au moyen de valeurs de $f(\Theta)$ lues sur la courbe de MASSEY.

Correction de l'effet de la diffusion sur la courbure.

Chaque électron subit, en plus des chocs observables, un grand nombre de très petites déviations, non reconnaissables individuellement, mais dont la somme produit au bout d'un trajet de longueur l une déviation moyenne Θ par rapport à la direction initiale. Dans le champ magnétique, cela cause une variation de courbure dont la valeur est Θ/l .

La théorie de cet effet a été faite par WILLIAMS¹⁹⁾. La courbure supplémentaire introduite par le phénomène suit une distri-

bution de Gauss, la probabilité d'une courbure additionnelle comprise entre k_s et $k_s + dk_s$ étant:

$$W(k_s) dk_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \kappa} e^{-\frac{k_s^2}{2\kappa^2}} dk_s. \quad (6)$$

La racine du carré moyen est

$$\kappa = \sqrt{2\pi} \frac{e}{H\varrho} \frac{\sqrt{\sum N_i Z_i^2}}{\beta \sqrt{l}} \alpha_m$$

où H est le champ magnétique, ϱ le rayon de courbure et α_m un coefficient numérique fonction de β , l , $\sum N_i Z_i^2$ donné par WILLIAMS.

L'erreur relative moyenne sur la courbure est alors

$$\frac{\kappa}{k} = \kappa \varrho = \frac{1}{H} \sqrt{2\pi} \frac{e}{\beta} \frac{\sqrt{\sum N_i Z_i^2}}{\sqrt{l}} \alpha_m = \frac{H_s}{H} \quad (7)$$

en appelant H_s le champ magnétique qui causerait la même courbure additionnelle que la diffusion.

Le tableau I donne les valeurs de l (longueur moyenne d'une trajectoire), α_m , H_s et $\frac{H_s}{H}$ en fonction du rayon de courbure ϱ .

Tableau I.

ϱ cm.	l cm.	α_m	H_s gauss	$\frac{H_s}{H}$ en %
12	11,5	2,25	56	5,6
10	11	2,18	56	5,6
8	10	2,18	59	5,9
6	9	2,16	63	6,3
4,5	7,5	2,12	69	6,9

La fluctuation moyenne de la valeur de $H\varrho$ est donc de 5 à 7%, 2 à 3 fois plus faible que dans les travaux de BLEULER et de SIGRIST. Cela tient au fait qu'on a à la fois un champ fort (1000 gauss) et un pouvoir diffusant relativement faible ($\sum N_i Z_i^2 = 4,88 \cdot 10^{21}$).

Cette fluctuation entraîne une erreur dans le spectre d'énergie des électrons. Le calcul permet de connaître la grandeur de cette erreur et par conséquent de la corriger. Nous ne donnerons pas ces calculs (développements de Taylor et intégrations), pour lesquels nous renvoyons une fois de plus aux travaux déjà cités⁸⁾¹³⁾.

Si $L_g(\varrho)d\varrho$ est la longueur mesurée des traces dont le rayon de courbure est compris entre ϱ et $\varrho + d\varrho$, la vraie longueur des traces dans le même intervalle est:

$$L(\varrho)d\varrho = \frac{L_g(\varrho)d\varrho}{1 + \left(\frac{H_s}{H}\right)^2 \left(3 + 3\varrho \frac{L'}{L_g} + \frac{\varrho^2}{2} \frac{L''}{L_g}\right)} \quad (8)$$

en désignant par L' , L'' , les dérivées première et seconde de $L_g(\varrho)$ par rapport à ϱ .

Le nombre théorique des chocs est multiplié par le facteur correctif $(1 + \varepsilon)$, avec:

$$\varepsilon = - \left(\frac{H_s}{H}\right)^2 \frac{L}{L_g} \left(\frac{3 A \varrho^2 + 2 B}{A \varrho^2 + B} + 2 \varrho \frac{L'}{L} \frac{A \varrho^2 + 2 B}{A \varrho^2 + B} \right) \quad (9)$$

A et B étant définis par:

$$\sigma(\Theta_1 \Theta_2) = \frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{\varrho^4} \quad (10)$$

σ étant la section efficace de MOTT ou d'URBAN, sans le terme en $Z\alpha$, exprimée en fonction de $H\varrho$, au lieu de β .

Une dernière correction est nécessitée par le fait qu'on a considéré des domaines d'énergie finis, ϱ variant de $\varrho - \frac{A\varrho}{2}$ à $\varrho + \frac{A\varrho}{2}$, et que σ est une fonction de ϱ , alors qu'on l'a considéré comme constant dans chaque intervalle. En d'autres termes, on a remplacé une intégrale par une somme de termes finis.

Le facteur de correction s'écrit $(1 + \delta)$, avec:

$$\delta = \frac{1}{12} \left(\frac{A\varrho}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{3 A \varrho^2 + 10 B}{A \varrho^2 + B} - 2 \varrho \frac{L'}{L} \frac{A \varrho^2 + 2 B}{A \varrho^2 + B} + \frac{\varrho^2}{2} \frac{L''}{L} \right) \quad (11)$$

A et B ayant la même signification que plus haut.

Cette correction est en moyenne inférieure à 1%, à cause de l'étroitesse des intervalles ($A\varrho/\varrho < 0,1$)

Le nombre définitif des chocs observables est ainsi:

$$\begin{aligned} n_{th}(\Theta_1 \Theta_2) &= (1 + \varepsilon)(1 + \delta)n_{obs}(\Theta_1 \Theta_2) = \\ &= (1 + \varepsilon)(1 + \delta) \Sigma N_i Z_i^2 L_g \cdot 2\pi \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} r(\Theta) f(\Theta) g(\Theta) \sin \Theta d\Theta. \end{aligned} \quad (12)$$

On remarquera que c'est la longueur mesurée L_g qui entre dans cette formule, la correction se faisant par le facteur $(1 + \varepsilon)$.

C'est ce nombre n_{th} qui sera comparé au nombre n_{exp} des chocs observés expérimentalement.

§ 4. Les mesures.

Remplissage de la chambre.

Il s'agissait tout d'abord de trouver une combinaison gazeuse ou tout au moins volatile de l'un des éléments lourds, Au, Hg ou Pb. Les combinaisons organo-métalliques (mercure ou plomb) remplissent assez bien les conditions voulues. Le mercure diméthyl, très toxique, a été employé par BARBER & CHAMPION²⁰). Le plomb tétraméthyl, que nous avons choisi, toxique également, est toutefois moins dangereux. Sa tension de vapeur est plus faible, mais tout de même suffisante.

Le plomb tétraméthyl, $\text{Pb}(\text{CH}_3)_4$, est un liquide huileux à la température ordinaire. Le point de fusion est $-27,5^\circ$, le point d'ébullition 110° . La densité est 2. Il est insoluble dans l'eau et dans l'alcool en présence d'eau; ce point est important, car le mélange d'alcool et d'eau employé pour la formation des gouttelettes n'aura pas d'influence sur la pression saturante du $\text{Pb}(\text{CH}_3)_4$. La tension de vapeur saturante est représentée par la formule $\log_{10} p = 7,751 - \frac{1865}{T}$, où p est mesuré en mm. de mercure, T étant la température absolue. La tension de vapeur est par exemple 22 mm. Hg à 18° .

Pour avoir un pouvoir diffusant aussi grand que possible, le $\text{Pb}(\text{CH}_3)_4$ a toujours été maintenu à la pression saturante. La pression totale dans la chambre devant être de l'ordre de 50 cm. Hg, il faut ajouter un gaz. L'azote donne des traces de bonne qualité, mais il diffuse trop, il aurait contribué pour 40 % à la diffusion totale. L'hélium aurait été le gaz idéal (2 % de la diffusion totale), il n'a pas été possible de s'en procurer. L'hydrogène diffuse peu, mais donne des traces trop faibles. Un compromis a été trouvé en faisant un mélange de 3 parties d'hydrogène pour 1 d'azote.

Pour le remplissage, on procède comme suit: le piston étant au bas de sa course, la chambre est d'abord rincée à l'hydrogène, puis vidée jusqu'à une pression restante de 5 à 6 mm. Hg. On met alors le réservoir contenant le $\text{Pb}(\text{CH}_3)_4$ en communication avec la chambre. On contrôle au manomètre que la pression saturante est atteinte, puis on évapore le mélange d'eau et d'alcool. On introduit enfin l'azote, puis l'hydrogène, en les faisant barboter dans le mélange eau-alcool pour assurer la saturation. On laisse remonter le piston, le volume offert au gaz diminue, et une partie des vapeurs doit se condenser. On est ainsi certain que la saturation est atteinte et qu'elle se maintiendra malgré l'élévation de température de l'ordre de 2° causée au cours de chaque série de mesures (un film de 70 vues)

par l'échauffement des bobines du champ magnétique. Le nombre théorique des chocs est en gros proportionnel à la pression du plomb tétraméthyl qui doit donc être connue aussi exactement que possible. C'est pourquoi le manomètre n'a été employé que comme contrôle, et la pression calculée en fonction de la température qui a été relevée au début et à la fin de chaque série de mesures. La grandeur $\Sigma N_i Z_i^2$ a été calculée pour chaque film. Les pressions partielles ont été en moyenne, avant l'expansion:

H^2	340 mm. Hg
N^2	110
eau	15
alcool	21
$Pb(CH^3)^4$. .	25

pour une température moyenne de 20° .

Le rapport d'expansion a été de 1,2.

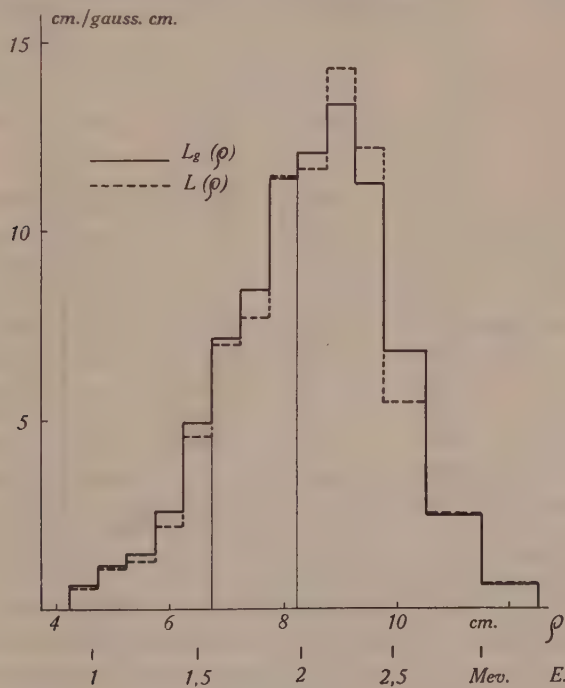


Fig. 1.

On a eu, comme valeur moyenne, après l'expansion:

$$\Sigma N_i Z_i^2 = 4,88 \cdot 10^{21}$$

le plomb seul intervenant pour 90 % dans cette valeur, et

$$\sum N_i Z_i^3 = 3,48 \cdot 10^{23}$$

cette valeur servant au calcul du nombre des chocs par les formules de MOTT et d'URBAN.

Les résultats.

2480 paires de clichés ont été prises, sur lesquels on a mesuré 609 m. de traces. La longueur réduite est 454 m.

Les nombres de chocs observés et calculés sont portés sur le tableau II, ainsi que les valeurs du rapport $\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$.

Tableau II.

angles	énergies $H\rho$	4250— 6750 gauss. cm.	6750— 8250	8250— 12500	Total 4250— 12500
15—20°	n_{exp}	7,5	14,5	13,5	35,5
	n_{th}	7,21	10,94	14,70	32,85
	$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$	1,04	1,32	0,92	1,08
20—30°	n_{exp}	8	7	10	25
	n_{th}	5,31	8,09	10,84	24,24
	$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$	1,50	0,87	0,92	1,03
30—60°	n_{exp}	4	7	3,5	14,5
	n_{th}	3,46	5,26	7,06	15,78
	$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$	1,15	1,33	0,50	0,92
60—180°	n_{exp}	2	2	0,5	4,5
	n_{th}	0,81	1,23	1,65	3,69
	$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$	2,47	1,62	0,30	1,22
Total 15—180°	n_{exp}	21,5	30,5	27,5	79,5
	n_{th}	16,79	25,52	34,25	76,56
	$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$	1,20	1,19	0,80	1,04

La fig. 1 donne le spectre d'énergie des électrons en cm./gauss. cm. en fonction du rayon de courbure ρ , pour un champ de 1000 gauss. $L_g(\rho)$ est la valeur mesurée, $L(\rho)$ la valeur corrigée. Les énergies correspondantes, en Mev., sont également portées en abscisses.

La fig. 2 donne la valeur de la correction $(1 + \varepsilon) \cdot (1 + \delta)$ en fonction de ϱ .

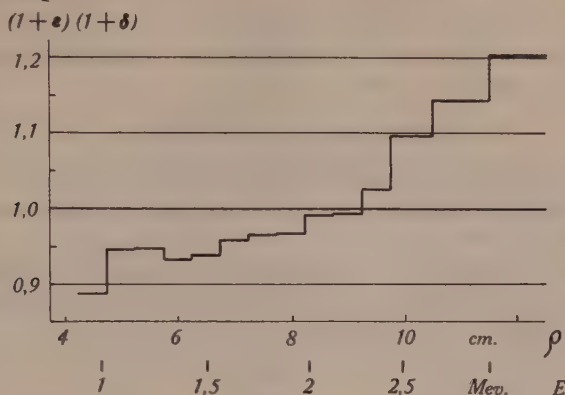


Fig. 2.

La fig. 3 montre la distribution des chocs observés en fonction de l'énergie et de l'angle de déviation Θ .

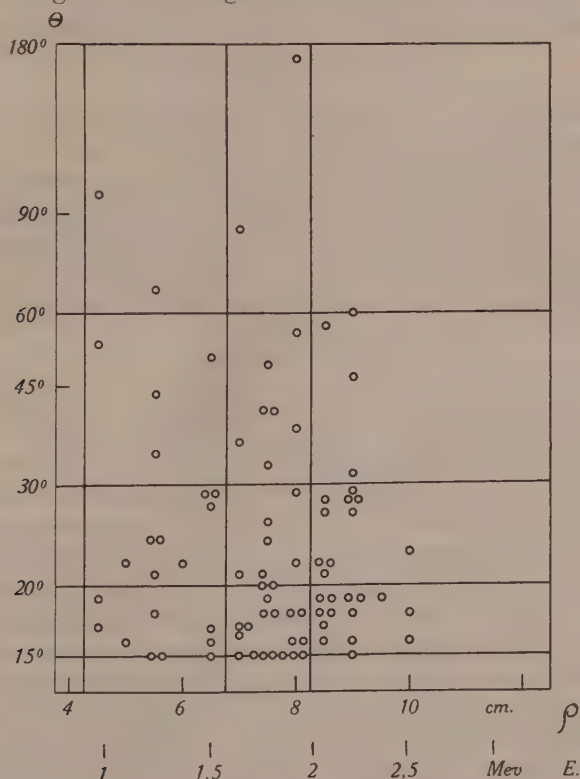


Fig. 3.

*Les erreurs.**a) Erreur statistique.*

Comme on vérifie une loi statistique, il faut tenir compte de la fluctuation dont la valeur moyenne est 11 %.

b) Erreur sur $\sum N_i Z_i^2$.

La tension de vapeur saturante du $\text{Pb}(\text{CH}_3)^4$ varie assez rapidement avec la température. Au voisinage de 20° , la variation est de 1 % pour $\frac{1}{5}$ de degré.

Le rapport d'expansion varie légèrement avec la température.

La vapeur saturante a été assimilée à un gaz parfait pour le calcul du nombre de molécules par cm^3 .

Ces diverses causes entraînent sur la valeur de $\sum N_i Z_i^2$ une erreur de l'ordre de 5 %.

c) Correction géométrique.

La profondeur de la couche éclairée est définie à 1 mm. près, ce qui entraîne sur le facteur $g(\theta)$ une erreur ne dépassant pas 3 %.

d) Champ magnétique.

L'intensité dans les bobines a été régulièrement contrôlée; en effet, l'échauffement causé par le passage du courant provoque une augmentation de la résistance qui doit être compensée par la manœuvre du rhéostat de réglage. L'erreur totale sur le champ magnétique, en comptant les erreurs d'étalonnage et les fluctuations de courant, peut être estimée à 2 %, ce qui entraîne sur le nombre théorique des chocs une erreur environ double, soit 4 %.

e) Erreurs de restitution.

Ces erreurs sont très difficiles à estimer, car des facteurs subjectifs jouent un rôle. Une première incertitude règne sur la longueur des traces. En effet, parmi les traces visibles, un certain nombre sont rejetées comme ne présentant pas une qualité suffisante, ce qui implique un choix pour lequel on ne dispose d'aucun critère objectif. D'après des essais de BLEULER⁸), on doit attendre de ce fait une erreur d'environ 5 %.

Sur le nombre des chocs observables, l'incertitude provient surtout de la définition du plan des tangentes au point de choc. Un électron qui sort du plan horizontal décrit en effet une hélice, c'est-à-dire une courbe gauche, et la détermination de la tangente est difficile. On admettra, au voisinage de 45° , une erreur possible de $\pm 5^\circ$. La précision limitée ($\pm 1^\circ$) de la mesure de θ intervient

à la limite inférieure ($\Theta = 15^\circ$) des angles considérés. Le nombre des chocs comptés sera trop grand d'environ 1%. En comptant enfin l'incertitude sur la longueur des 2 branches de la trajectoire, on obtient une erreur moyenne de 5% sur le nombre des chocs observés.

Comme nous l'avons vu au § 3, la diffusion fausse systématiquement la mesure de l'énergie. L'erreur commise de ce fait a été compensée par la correction $(1 + \varepsilon)$. Comme la valeur d' ε n'est en moyenne que de 5 à 10%, l'erreur qui subsiste après la correction ne doit pas excéder 1 à 2%.

On a 11% d'erreur statistique et en moyenne 10% pour les autres erreurs. On peut donc admettre, pour l'ensemble des mesures, une erreur moyenne de 20%, et l'on a, pour la diffusion des électrons d'énergie comprise entre 1 et 3 Mev. sous des angles de 15° — 180° , la valeur:

$$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}} = 1,04 \pm 0,20.$$

La diffusion observée est donc, dans les limites d'erreurs, en accord avec la valeur théorique.

§ 5. Discussion.

L'accord avec la théorie est bon pour l'ensemble des mesures. La répartition en fonction, soit de l'angle, soit de l'énergie, est, dans les limites d'erreurs, celle que fait prévoir le calcul, et surtout la valeur absolue de la diffusion est correcte, contrairement aux résultats des mesures de BARBER & CHAMPION sur le mercure.

Comparaison avec les travaux antérieurs sur les éléments lourds.

Une vue d'ensemble est donnée par le tableau III.

On voit que pour tous les éléments, sauf le mercure, des mesures plus récentes n'ont pas confirmé les anomalies indiquées. Comme les éléments voisins, or et plomb, diffusent normalement, il est très improbable que le mercure ait une diffusion anormale. Il est d'autant plus vraisemblable que l'anomalie indiquée par BARBER & CHAMPION²⁰⁾ doive être attribuée à des erreurs d'expérience que l'anomalie signalée par les mêmes auteurs pour l'iode n'a pas été confirmée non plus.

On peut donc conclure, en tenant compte des dernières mesures, que la diffusion des électrons par les éléments lourds comme par les éléments légers est normale. Il n'est donc pas nécessaire

d'introduire d'interaction supplémentaire entre électron et noyau, et la force de Coulomb suffit, à la précision des expériences actuelles, à expliquer la diffusion observée.

Tableau III.

Elément Z	Auteurs		Année	Angles	Energie Mev.	$\frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}}$
Kr 36	9	Klarmann & B. . .	1936	40—180°	0,5—2,6	0,17
	12	Randels, Ch. . . .	1940		1,9—9,5	1,5
I 53	10	Champion & B. . .	1939	11—180°	0,7—1,2	0,4
	13	Sigrist	1943	15—180°	1—3	1,04
Xe 54	9	Klarmann & B. . .	1936	40—180°	0,5—2,6	0,2
	11	Sen Gupta	1939		2	1
	12	Randels,	1940		1,5—11,5	1,5
Au 79	21	Neher	1931	95—173°	0,056—0,145	1,2
	22	Cox & Chase . . .	1937	90°	0,08	1
	23	Alichanov,	1939	90°	0,85—2,06	0,75
Hg 80	20	Barber & Ch. . .	1938	20—180°	0,4—1,6	0,15
Pb 82	24	Fowler & O. . . .	1938	15—180°	5—17	~ 1
	—	ce travail	1944	15—180°	1—3	1,04

Les chiffres à gauche des noms d'auteurs se rapportent à la liste des références.

Comparaison entre les diverses théories.

Sur la fig. 4, on a dessiné la courbe $f(\Theta)$ de MASSEY et les courbes calculées par les formules de MOTT et d'URBAN pour le plomb et pour la même énergie de 1,7 Mev. Jusqu'à 60°, les diverses théories diffèrent peu et l'accord avec l'expérience est bon. Au-delà de 60°, la distribution angulaire varie notablement d'une théorie à l'autre. On a par exemple:

Tableau IV.

Angles	Massey	Urban	Mott	Expérience
15—20°	32,85	35,41	34,7	35,5
20—30°	24,24	25,63	25,3	25
30—60°	15,78	15,42	14,8	14,5
60—180°	3,69	4,23	2,87	4,5
15—180°	76,56	80,69	77,7	79,5
60—90°	2,73	2,71	2,2	2,5
90—180°	0,96	1,52	0,67	2
150—180°	0,024	0,128	0,009	

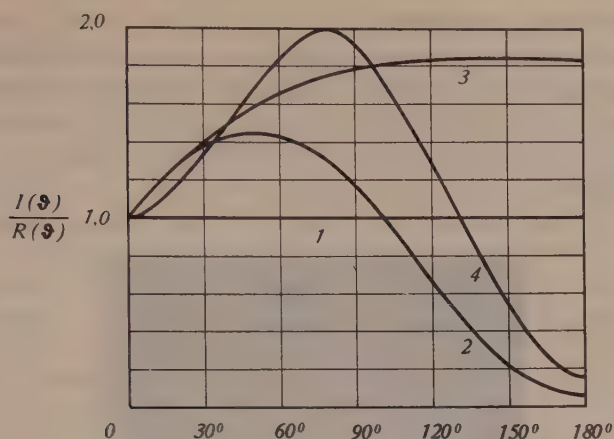


Fig. 4.

1 = distribution de RUTHERFORD. 2 = formule de MOTT.
 3 = formule d'URBAN. 4 = calcul numérique de MASSEY.

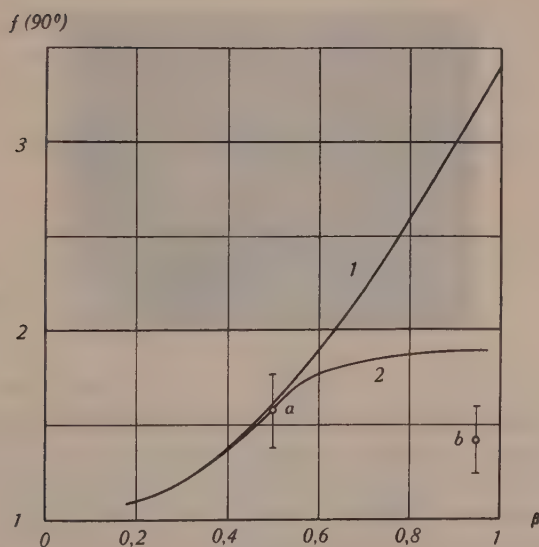


Fig. 5.

1 = calcul de MOTT. 2 = calcul de BARTLETT & WATSON.
 a = mesures de COX & CHASE. b = mesures d'ALICHANOV.

Il ressort de ce tableau :

- 1^o que les formules de MOTT ou URBAN représentent l'ensemble du phénomène avec une précision meilleure qu'on ne l'aurait pensé, malgré la valeur élevée de Z , au moins si l'on se borne à considérer des domaines angulaires assez larges (5 premières lignes du tableau);



Fig. 6.



Fig. 7.

- 2^o qu'une étude plus détaillée de la répartition des angles de plus de 60° serait intéressante, mais que la méthode de la chambre de Wilson ne convient pas bien pour ce travail, à cause du très grand nombre de clichés qu'il faudrait prendre pour avoir une précision statistique suffisante. On aurait, par exemple, par le calcul de MASSEY, dans l'intervalle $150-180^\circ$, en moyenne un choc pour 100 000 clichés. Il faudrait donc environ 1 000 000 de clichés pour avoir une précision raisonnable. Ces mesures se

feraient d'une manière plus rationnelle au moyen de rayons cathodiques très durs, en étudiant la diffusion par une lame mince avec des compteurs ou une chambre d'ionisation.

Le cas de la diffusion à 90° est intéressant à cause du calcul de MOTT¹⁶⁾. Sur la fig. 5, on a $f(90^\circ)$ en fonction de β d'après MOTT et d'après BARTLETT & WATSON¹⁷⁾. Les deux courbes coïncident sensiblement jusqu'à $\beta = 0,5$ et s'écartent ensuite notablement. Les expériences de COX & CHASE²²⁾, pour $\beta = 0,5$, sont en accord avec l'une ou l'autre des théories. Par contre les mesures d'ALICHANOV, ALICHANIAN & KOZODAEV²³⁾ sont beaucoup mieux explicables en prenant les valeurs de BARTLETT & WATSON, et semblent indiquer que l'accroissement de $f(90^\circ)$ avec β est trop fort dans le calcul de MOTT.

La fig. 6 représente un choc avec déviation de 12° sur une trace de 9 cm. de rayon

Sur la fig. 7, on voit une déviation de 17° sur une trace de 8,5 cm. de rayon.

En terminant, je tiens à exprimer mes remerciements au professeur Dr. SCHERRER qui m'a proposé le sujet de ce travail et m'a aidé de ses conseils dans maintes difficultés. Je remercie également le professeur Dr. GUYER et Monsieur JACOBI qui m'ont préparé à plusieurs reprises le plomb tétraméthyl. Enfin le fonds de l'Aluminium, Neuhausen, a fourni des moyens matériels pour lesquels nous lui exprimons ici notre reconnaissance.

Zurich, Institut de Physique de l'E.P.F.

Références.

- ¹⁾ BARTLETT & WELTON, Phys. Rev. **59**, 281 (1941).
- ²⁾ SKOBELZYN & STEPANOWA, Nature **137**, 456 (1936).
- ³⁾ JAUCH, Helv. Phys. Acta **13**, 451 (1940).
- ⁴⁾ CHAMPION, Proc. Roy. Soc. **153**, 353 (1936).
- ⁵⁾ BORISOV, BRAILOVSKI & LEIPUNSKI, C. R. Moscou **26**, 142 (1940).
- ⁶⁾ BOSSHARD & SCHERRER, Helv. Phys. Act. **14**, 85 (1941).
- ⁷⁾ SCHERRER & ZÜNTLI, Helv. Phys. Acta **14**, 111 (1941).
- ⁸⁾ BLEULER, Helv. Phys. Acta **15**, 613 (1942).
- ⁹⁾ KLARMANN & BOTHE, Zschr. f. Phys. **101**, 489 (1936).
- ¹⁰⁾ CHAMPION & BARBER, Phys. Rev. **55**, 111 (1939).
- ¹¹⁾ SEN GUPTA, Proc. Phys. Soc. (London) **51**, 355 (1939); cité dans Phys. Ber. **20**, 1605 (1939).
- ¹²⁾ RANDELS, CHAO & CRANE, Phys. Rev. **58**, 201 (1940).
- ¹³⁾ SIGRIST, Helv. Phys. Acta **16**, 471 (1943).

- ¹⁴⁾ MOTT, Proc. Roy. Soc. **124**, 425 (1929).
 - ¹⁵⁾ URBAN, Zschr. f. Phys. **119**, 67 (1942).
 - ¹⁶⁾ MOTT, Proc. Roy. Soc. **135**, 429 (1932).
 - ¹⁷⁾ BARTLETT & WATSON, Phys. Rev. **55**, 235 (1939); **56**, 612 (1939).
 - ¹⁸⁾ MASSEY, Proc. Roy. Soc. **181**, 14 (1942).
 - ¹⁹⁾ WILLIAMS, Proc. Roy. Soc. **169**, 531 (1939); Phys. Rev. **58**, 292 (1940).
 - ²⁰⁾ BARBER & CHAMPION, Proc. Roy. Soc. **168**, 159 (1938).
 - ²¹⁾ NEHER, Phys. Rev. **38**, 1321 (1931).
 - ²²⁾ COX & CHASE, Phys. Rev. **51**, 140 (1937).
 - ²³⁾ ALICHANOV, ALICHANIAN & KOZODAEV, C. R. Moscou **24**, 525 (1939).
 - ²⁴⁾ FOWLER & OPPENHEIMER, Phys. Rev. **54**, 320 (1938).
-

Eigenfrequenzen des *E*-Typus eines kapazitätsbelasteten zylindrischen Hohlraumes

von F. Lüdi.

(Brown, Boveri & Cie., Baden.)

(18. VIII. 1944.)

Inhalt: Es erfolgt die ausführliche Rechnung und Spezialisierung der bereits mitgeteilten Frequenzgleichung¹⁾²⁾³⁾. Die Berechnung geschah im Hinblick auf die Verwendung eines kapazitätsbelasteten Hohlraumresonators für Magnetfeldgeneratoren zur Erzeugung von Mikrowellen⁴⁾. Als Kapazitätsbelastung werden die axial angeordneten Segmente betrachtet (Fig. 1). Benachbarte Segmente befinden sich auf Wechspotential und die Ausgleichströme fließen über die innere Mantelfläche des ringförmigen Resonators, an dem die Segmente befestigt sind. Die abgeleiteten Gleichungen sind aber auch für den allgemeinen Fall einer zentral-angeordneten Kapazität gültig. Solche in der Mitte eingedrückte Resonatoren finden bei Klystrons Verwendung.

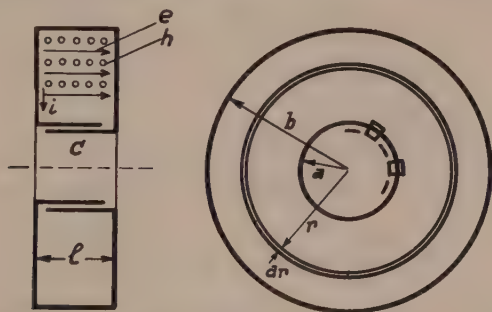


Fig. 1.

§ 1. Die Differentialgleichung mit den Randbedingungen und ihre Lösung.

Die Voraussetzungen sind:

1. Die Feldverteilung ist prinzipiell gleich wie beim kreiszylindrischen Hohlraum, es existieren nur e (axiale Pfeile in Fig. 1) und h (kleine Kreise).

2. Randbedingung: Für $r = b$ ist $e = 0$; für $r = a$ ist der Strom i und die Spannung u durch die Kapazität C verknüpft, gemäss

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (C = \text{totale Kapazität}).$$

Bezeichnungen (vgl. Fig. 1 für das folgende):

$$\text{elektrisches Feld} \quad e = E_z e^{j\omega t}$$

$$\text{magnetisches Feld} \quad h = H_\varphi e^{j\omega t}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Spannung} & \left\{ \begin{array}{l} u = el = U e^{j\omega t} \\ U = E_z \cdot l \end{array} \right. \\ \text{Strom} & i_r = I_r e^{j\omega t} \quad (\text{totaler radialer Strom}) \end{array}$$

Die Differentialgleichung für E_z heisst in Zylinderkoordinaten (vgl. F. BORGNIS)⁵⁾:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + k^2 E_z = 0, \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_e} \quad (1)$$

wo λ_e die dem Eigenwert k entsprechende Eigenwelle des Resonanzsystems ist. Die allgemeine Lösung lautet:

$$E_z = A J_0(kr) + B N_0(kr) = Z_0(kr) \quad (2)$$

$Z_0(kr)$ ist die allgemeine Zylinderfunktion, eine lineare Kombination der Besselfunktion und Neumannfunktion 0-ter Ordnung. Die Besselfunktion allein genügt nicht, weil diese gegen das Zentrum nicht abnimmt; bei unendlicher Kapazität (Kurzschluss) muss aber das Feld an der inneren Begrenzung a Null werden. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{array}{ll} \text{für } r = a & C \frac{du}{dt} = Cl \frac{\partial e}{\partial t} = Cl j \omega E_z e^{j\omega t} = I_r e^{j\omega t} \\ \text{für } r = b & E_z = 0 \end{array} \quad (3)$$

Berechnung von I für $r = a$.

Aus der Divergenzgleichung folgt für die Änderung des radialen Stromes durch den Verschiebungsstrom $\frac{\partial e}{\partial t}$ zwischen den beiden Seitenflächen

$$\frac{\partial i_r}{\partial r} dr = \varepsilon 2\pi r dr \frac{\partial e}{\partial t}$$

allgemeine Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 0,0886 pF$

oder für die Amplituden

$$dI_r = \varepsilon 2\pi r dr j \omega E_z$$

und integriert

$$I_r = \varepsilon j 2\pi \omega \int E_z(r) \cdot r dr + c$$

Dies in die Randbedingung (3) eingesetzt, gibt

$$E_z = \frac{\varepsilon 2\pi}{Cl} \int E_z(r) r dr.$$

Die Integrationskonstante ist Null, weil im Spannungsbauch $I = 0$ sein muss.

Wenn von den Rechenregeln für Zylinderfunktionen (JAHNKE-EMDE, S. 166) mit der Setzung $kr = y$, $dr = \frac{dy}{k}$,

$$\int y Z_0(y) dy = y Z_1(y).$$

Gebrauch gemacht wird (Z_1 Zylinderfunktion 1. Ordnung), so heissen die beiden Randbedingungen explizit in geordneter Form:

$$\begin{aligned} r = a \quad & A \left[J_0(ka) - \frac{\varepsilon 2 \pi a}{Clk} J_1(ka) \right] + B \left[N_0(ka) - \frac{\varepsilon 2 \pi a}{Clk} N_1(ka) \right] = 0 \\ r = b \quad & A J_0(kb) + B N_0(kb) = 0. \end{aligned}$$

Dieses homogene Gleichungssystem dient zur Bestimmung des Eigenwertes k (Eigenwelle λ_e) ohne Kenntnis der Konstanten A, B durch Nullsetzen der Determinante der Koeffizienten von A und B . Mit der weiteren Substitution

$$ka = x, \quad kb = x \frac{b}{a}$$

wird also die Frequenzgleichung

$$\Delta(x) = [N_0(xb/a)J_0(x) - J_0(xb/a)N_0(x)] - \frac{2\pi a^2}{1/\varepsilon Cl} \frac{1}{x} [N_0(xb/a)J_1(x) - J_0(xb/a)N_1(x)] = 0. \quad (4)$$

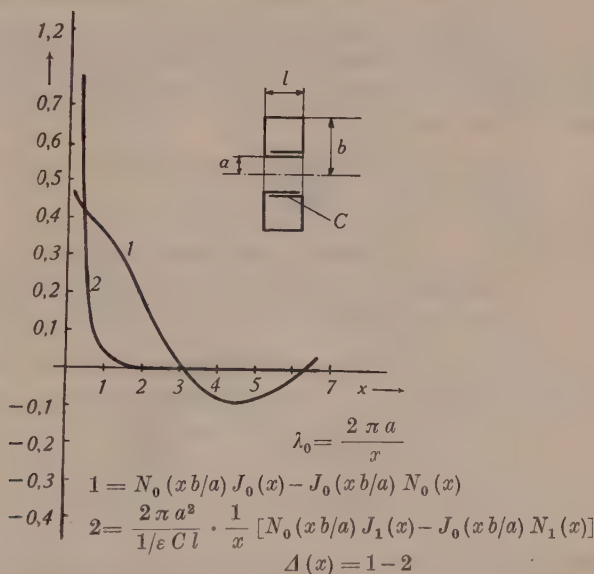


Fig. 2.

Für $C = \infty$ geht der Ausdruck in denjenigen von BORGNIS⁶⁾ für den ringförmigen Resonator über. In vorliegender Form ist der Eigenwert x resp. k nicht analytisch auszurechnen und muss graphisch gefunden werden. Fig. 2 zeigt eine solche Auswertung für das Beispiel

$$a = 0,6 \text{ cm} \quad b = 1,2 \text{ cm} \quad l = 1,2 \text{ cm} \quad C = 1,5 \text{ pF}$$

Die genaue Bestimmung von C ist nicht einfach. Einen Näherungswert erhält man, wenn man sich die Segmente in ihrem mittleren Abstand parallel gegenübergestellt denkt und die Kapazität als diejenige eines n -paarigen Plattenkondensators berechnet. Der erste Schnittpunkt der beiden Kurven in Fig. 2 gibt für $x = 0,41$, woraus sich die Grundwelle

$$\lambda_e = \frac{2\pi a}{x} = 9,3 \text{ cm}$$

berechnet; die gemessene selbsterregte Welle eines solchen Magnetfeldgenerators war etwa 10,1 cm, also sicher keine schlechte Übereinstimmung mit der Theorie, die vor allem zeigt, dass das physikalische Bild der Erregung richtig ist.

§ 2. Näherungslösungen.

Es kommt weniger darauf an, die Eigenwelle exakt zu bestimmen, als vielmehr ihre Abhängigkeit von der Konstruktionsart. Einen guten analytischen Einblick bekommt man in zwei Grenzfällen, nämlich für kleine x ($x \rightarrow 0$) und grosse x ($x \rightarrow \infty$), d. h. für kleines a und für $b/a \rightarrow 1$.

1. $x \rightarrow 0$. Nach JAHNKE-EMDE gilt für die Entwicklung von $N_0(x)$, $N_1(x)$ für kleine Argumente

$$N_0(x) = J_0(x) \ln x + \mathfrak{P}_1(x)$$

$$N_1(x) = J_1(x) \ln x - \frac{1}{x} J_0(x) + \mathfrak{P}_2(x)$$

wo $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ Polynome der folgenden Form sind:

$$\mathfrak{P}_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

$$\mathfrak{P}_2(x) = -\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

Setzt man dies in (4) ein, so erhält man mit den Abkürzungen

$$x = b/a \quad K = \frac{2\pi a^2}{1/\epsilon Cl}$$

$$\begin{aligned} & J_0(\alpha x) J_0(x) \ln \alpha + \mathfrak{P}_1(\alpha x) J_0(x) - \mathfrak{P}_1(x) J_0(\alpha x) = \\ & = \frac{K}{x} \left[J_0(\alpha x) J_1(x) \ln \alpha + \mathfrak{P}_1(\alpha x) J_1(x) + \frac{J_0(\alpha x) J_0(x)}{x} - J_0(\alpha x) \mathfrak{P}_2(x) \right] \end{aligned}$$

Mit den weiteren Entwicklungsformeln für J_0 und J_1

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}$$

bekommt man, wenn für $J_0(\alpha x)$, $J_1(\alpha x)$ in der Entwicklung x durch αx ersetzt wird und die Werte für die Polynome eingesetzt und höhere Glieder als quadratische vernachlässigt werden, eine biquadratische Gleichung

$$x^2 \left[-\frac{\alpha^2 + 1}{4} \ln \alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + 1 - \frac{K}{x^2} = 0$$

daraus

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \alpha' K}}{2 \alpha'} = + K$$

und schliesslich

$$x = \sqrt{K}$$

wenn zur Abkürzung die eckige Klammer mit α' bezeichnet und die Wurzel entwickelt wird.

Damit erhält man für die Eigenwelle

$$\lambda_e = \frac{2 \pi a}{\sqrt{K}} = 8 \cdot 4 \sqrt{Cl} \text{ cm}$$

Hierbei ist die Kapazität C in Picofarad und die Axiallänge l des Resonators in cm auszudrücken. Man erkennt, dass die Wellenlänge in diesem Fall praktisch nur von der Belastungskapazität abhängt! Für dasselbe Beispiel der Fig. 2 erhält man für

$$\lambda_e = 11,2 \text{ cm}$$

2. Für grosse x gelten ebenfalls nach JAHNKE-EMDE die Näherungsformeln

$$J_0(x) = \frac{\cos(x - \pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}} \quad N_0(x) = \frac{\sin(x - \pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}$$

$$J_1(x) = \frac{\sin(x - \pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}} \quad N_1(x) = \frac{-\cos(x - \pi/4)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}$$

Setzt man diese Werte in die Frequenzgleichung (4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1/\varepsilon C}{2 \pi a} \frac{l}{a} x = \\ & = \frac{\sin(xb/a - \pi/4) \sin(x - \pi/4) + \cos(xb/a - \pi/4) \cos(x - \pi/4)}{\sin(xb/a - \pi/4) \cos(x - \pi/4) - \cos(xb/a - \pi/4) \sin(x - \pi/4)} \end{aligned}$$

Wird für $x = ak$ eingesetzt und $b - a$ durch den Abstand d der beiden kreisförmigen Begrenzungen nach Fig. 1 ausgedrückt, so folgt nach trigonometrischer Umformung

$$\frac{1/\varepsilon C}{2\pi a} lk = \cotg dk$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für den Eigenwert k und damit für die Eigenwelle λ_e des kapazitätsbelasteten ringförmigen Resonators. Sie hat eine grosse Ähnlichkeit mit derjenigen eines kapazitätsbelasteten Lechersystems. Es ist bemerkenswert, dass als frequenzbestimmende Grössen nur die Dimension des Ringquerschnittes (d, l) und die Kapazität pro cm Umfang eingehen. Man kann also einen solchen Resonator beliebig vergrössern, ohne die Eigenwelle zu verändern. Diese Schlussfolgerung wurde durch eine entsprechende Bauart des Resonators mit grossem Innendurchmesser experimentell verifiziert.

§ 3. Der Verlustwiderstand

Im Anschluss an BORGNIS⁵⁾ berechnen wir diesen aus einem Ersatzparallelwiderstand R_p , bezogen auf die Wechselspannung für $r = a$, also an den Segmenten, wo die Einwirkung auf die Elektronen stattfindet. Danach ist

$$R_p = \frac{(U_{\text{eff}}^2)_{r=a}}{Q} \quad (5)$$

wo

$$U_{\text{eff}} = \frac{E_z \cdot l}{\sqrt{2}} \Bigg|_{r=a} = \frac{Z_0 \cdot l}{\sqrt{2}} \Bigg|_{r=a}$$

die effektive Spannung an der Stelle $r = a$ ist. Wir setzen sie gleich derjenigen zwischen den Segmenten, vernachlässigen also die Spannungsänderung längs der Segmente. Der Unterschied ist nur, dass das Feld zwischen den Segmenten tangential verläuft statt axial wie im Resonator; dies ist durch die Konstruktion bedingt.

\bar{Q} ist der Joule'sche Verlust an der Innenfläche des Resonators durch Skineffekt hervorgerufen und bestimmt sich aus

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \pi_2}{2\sigma}} \int_{\text{Oberfläche}} (H H^*) df$$

mit

$$\begin{aligned} \pi_2 &= 4\pi \cdot 10^{-9} \\ \sigma &= 57 \cdot 10^4 \text{ (Kupfer)} \\ \omega &= \frac{2\pi v}{\lambda_e} \end{aligned}$$

d. h. das Magnetfeld unmittelbar an der Oberfläche auf der Vakuumseite ist mit dem Absolutquadrat des Oberflächenstromes im Leiter durch HH^* verknüpft, wodurch die Verluste aus der Feldverteilung berechenbar sind. Für das Magnetfeld gilt nach der Maxwell'schen Gleichung $h = \text{rot } \frac{\partial e}{\partial t}$

$$H_\varphi = -\frac{j}{k\mathfrak{B}_0} \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{j}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial Z_0}{\partial(kr)} = \frac{j}{\mathfrak{B}_0} Z_1(kr)$$

$\mathfrak{B}_0 = 377 \, \Omega$ Wellenwiderstand des Vakuums.

Damit wird \bar{Q}

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\pi_2}{2\sigma}} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \left[\underbrace{Z_1^2(kb) 2\pi bl}_{\text{äussere Zylinderfläche}} + \underbrace{Z_1^2(ka) 2\pi al}_{\text{innere Zylinderfläche}} + \underbrace{2 \int_a^b Z_1^2(kr) 2\pi r dr}_{\text{beide Seitenflächen}} \right]$$

Das Integral ist:

$$2\pi [b^2 Z_1^2(kb) - a^2 Z_1^2(ka) - b^2 Z_0(kb) Z_2(kb) + a^2 Z_0(ka) Z_2(ka)]$$

Für $Z_1 = J_1(kr)$ und $a = 0$, $J_0(kb) = 0$ erhält man daraus den Wert von BORGNIS für die Seitenflächen des kreiszylindrischen Resonators.

$$2\pi b^2 A^2 J_1^2(kb)$$

Z_2 ist analog Z_1 .

$$Z_2 = A J_2(kr) + B N_2(kr)$$

dabei ist berücksichtigt, dass $Z_0(kr)$ für $r = b$ die Randbedingung erfüllt. Benützt man jetzt Gl. 5 zur Ausrechnung von R_p , so entsteht ein Quotient aus Zylinderfunktionen, wo Zähler und Nenner noch die Konstanten A, B der linearen Kombination von J und N enthalten. Werden dann Zähler und Nenner mit $A \cdot B$ dividiert, so entstehen Faktoren $\frac{A}{B}$ und $\frac{B}{A}$. Weiter ist $\frac{A}{B}$ aus der Randbedingung für $E_z = 0$ bei $r = b$ zu bestimmen

$$\frac{A}{B} = -\frac{N_0(kb)}{J_0(kb)}$$

und in der Gleichung für R_p einzusetzen. Indem noch

$$ka = x \quad \text{und} \quad kb = x \frac{b}{a}$$

gesetzt wird, so erhält man für R_p die etwas umständliche Form

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \pi_2}{2 \sigma}} \frac{2 \pi}{\mathfrak{S}_0^2} \frac{1}{l^2/2} \left[-\frac{N_0(xb/a)}{J_0(xb/a)} \cdot J_0^2(x) + 2 J_0(x) N_0(x) - \frac{J_0(xb/a)}{N_0(xb/a)} N_0^2(x) \right] + \left\{ (bl + b^2) \left[-\frac{N_0(xb/a)}{J_0(xb/a)} J_1^2(xb/a) + 2 J_1(xb/a) N_1(xb/a) - \frac{J_0(xb/a)}{N_0(xb/a)} N_1^2(xb/a) \right] + (al - a^2) \left[-\frac{N_0(xb/a)}{J_0(xb/a)} J_1^2(x) + 2 J_1(x) N_1(x) - \frac{J_0(xb/a)}{N_0(xb/a)} N_1^2(x) \right] + a^2 \left[-\frac{N_0(xb/a)}{J_0(xb/a)} J_0(x) J_2(x) + J_0(x) N_2(x) + N_0(x) J_2(x) - \frac{J_0(xb/a)}{N_0(xb/a)} N_0(x) J_2(x) \right] \right\}}.$$

Diese Gleichung wurde benützt, um den Ersatzwiderstand der Dämpfung für das Beispiel der Fig. 2 mit $a = 0,6$ cm, $b/a = 2$, $l = 1,2$ cm, $C = 1,5$ pF, d. h. also $x = 0,41$ auszurechnen. Man erhält

$$R_p = 17000 \, \Omega.$$

Für die erste Oberwelle ($x = 3,15$) hat man dagegen für R_p nahezu den Wert Null, d. h. praktisch Kurzschluss, so dass man sagen kann, dass sich nur die Grundwelle des Systems erregt. Experimentell wurde auch nie eine andere beobachtet.

Die Dämpfung ist bei diesem Generator nicht entscheidend wie etwa beim Kylstron, weil infolge des anderen Elektronenmechanismus die Wechselwirkung der Elektronenpakete mit dem Resonator nicht nur beim einmaligen Durchtritt vorhanden ist, sondern sich an den kreisförmig angeordneten Segmentpaaren beliebig oft wiederholt, weswegen man die kleinen Anschwingströme beobachtet.

Literatur

¹⁾ F. LÜDI, Helv. Physica Acta, Vol. XIV, Fasc. Quint. et Sextus 1941. Vgl. die inzwischen erschienenen Publikationen über einen ähnlichen Gegenstand ²⁾ und ³⁾.

²⁾ H. MEINKE, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **60**, 29 (1942).

³⁾ W. DÄLLENBACH, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **61**, 129 (1943).

⁴⁾ F. LÜDI, Brown, Boveri-Mitteilungen, Sonderheft „HF-Technik“, XXVIII. Jahrg., Dez. 1941.

⁵⁾ F. BORGNIS, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **54**, 121 (1939).

⁶⁾ F. BORGNIS, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **56**, 47 (1940).

Ein neuer Feuchtigkeitsmesser: das Diffusionshygrometer

von H. Greinacher.

(15. IX. 1944.)

Grundlage.

Die neue Methode basiert auf dem Unterschied der Diffusion von Luft und Wasserdampf. Sie sei an Hand der einfachen, in Fig. 2A erkenntlichen Anordnung erläutert. Auf dem seitlichen Ansatz des Glasgefässes *G*, in dem sich etwas Wasser befindet, ist ein Tonplättchen *P* aufgekittet. Das Gefäss ist mittelst eines doppelt durchbohrten Gummizapfens *Z* verschlossen. Die eine Durchbohrung dient zur Verbindung mit einem Flüssigkeitsmanometer *M*, die andere zum Verschliessen nach der Zusammensetzung. Setzt man zu diesem Zwecke den Stopfen *S* auf, so bildet sich allmählich ein Überdruck von 10—20 mm Flüssigkeitssäule aus. Dieser ist um so beträchtlicher, je grösser der Unterschied der Feuchtigkeit in der umgebenden Luft und im Innern, wo Dampfsättigung herrscht, ist. Es liegt daher nahe, den Druckeffekt zur Messung der Luftfeuchtigkeit heranzuziehen. Bei der Einfachheit des Prinzips und der Anordnung schien es verwunderlich, dass in der Literatur nichts über ein solches *Diffusionshygrometer* bekannt geworden ist. Indessen stellte es sich heraus, dass die „hygrometrische Diffusion“ in der Tat schon vor 70 Jahren von M. L. DUFOUR¹⁾ entdeckt und in zwei Arbeiten eingehend untersucht worden ist. Eine Erklärung der Erscheinung findet sich dort allerdings noch nicht. Eine solche verdanken wir erst A. KUNDT²⁾. Wir wollen diese in etwas modifizierter Darstellung hier wiedergeben.

Nehmen wir der Einfachheit halber zunächst an, die umgebende Luft sei vollkommen trocken. Im Moment des Abschliessens mit dem Stopfen *S* herrscht innen und aussen derselbe Druck. Innen setzt er sich aber zusammen aus dem Druck des Luftinhaltes

¹⁾ M. L. DUFOUR: Arch. Genève, **49**, 316, 1874 und **53**, 177, 1875.

²⁾ A. KUNDT: Wied. Ann. **2**, 17, 1877.

und dem des Wasserdampfes. Da der Druck der Luft aussen also grösser ist, diffundiert Luft ins Gefäss hinein. Falls die Tonplatte in dem Sinne semipermeabel wäre, dass Wasserdampf nicht diffundieren könnte, so würde der Luftdruck innen schliesslich gleich dem im Aussenraum werden. Es entstünde also am Manometer ein Überdruck gleich dem Dampfdruck des Wassers. Ähnlich würde im allgemeinen Fall, wo der Partialdruck des Wasserdampfes im Aussenraum irgend einen Wert p besitzt, das Manometer den Druckunterschied $p_s - p$ anzeigen, wo p_s den Sättigungsdruck bei der betreffenden Temperatur bedeutet. Dieser Idealfall einer porösen, für Wasserdampf undurchlässigen Schicht wird sich kaum verwirklichen lassen. Auch bei der verwendeten Tonplatte diffundiert dauernd Wasserdampf von innen nach aussen. Demzufolge bildet sich ein entsprechend kleinerer Überdruck aus. Grössenordnungsmässig wurde er zu etwa $\frac{1}{10}$ des Wertes im Idealfall gefunden. Auch hier ist anzunehmen, dass der Überdruck ein Mass für das Sättigungsdefizit der Aussenluft abgibt und dass, sofern das Gefäss nicht mit Wasser, sondern mit einem vollkommenen Trockenmittel beschickt wird, das Manometer die absolute Feuchtigkeit anzeigt. Voraussetzung für eine einfache Handhabung ist indessen, dass der gemessene Druckunterschied Δp proportional der Differenz des Wasserdampfpartialdruckes zwischen Innen- und Aussenraum ist.

So grosses Interesse seinerzeit die Versuche von DUFOUR auch hervorgerufen haben¹⁾, so wenig ist von einer Anwendung der hygrometrischen Diffusion bekannt geworden. Dies ist um so auffälliger, als sich hier die Möglichkeit bietet, ein einfaches Instrument herzustellen, das gegenüber andern Hygrometern wesentliche Vorteile bietet. Während bisher die Luftfeuchtigkeit durch Versuche (Psychrometer, Taupunkthygrometer) oder indirekt (Haarhygrometer) ermittelt werden musste, zeigt das Diffusionshygrometer unmittelbar den Wasserdampfdruck in der Luft an. Wenn diese Anwendung nicht gemacht wurde, so ist dies möglicherweise in dem Umstand begründet, dass die Versuchsergebnisse als zu wenig gut reproduzierbar befunden wurden, oder dass die Messung der relativ kleinen Drucke hinderlich war, oder aber, dass der Zusammenhang zwischen Δp und p zu wenig geklärt schien. Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass sich sehr wohl Hygrometer nach dem Diffusionsprinzip herstellen lassen und dass sich das Verfahren auch theoretisch begründen lässt.

¹⁾ Siehe z. B. F. SCHIDLowsKY: Beiblätter Wied. Ann. **11**, 618, 1887.

I. Versuche.

1. Modelle und Prüfverfahren.

Es wurden im Verlaufe der Entwicklung 4 Modelle hergestellt. Als poröse Schichten dienten Tonplättchen von 5 mm Dicke, die aus grösseren, von der Firma Haldenwanger, Berlin, stammenden Platten herausgeschnitten wurden. Das Aufkitten geschah mit Chatterton-Compound. Bei Modell I (Fig. 1) wurden die Glas-

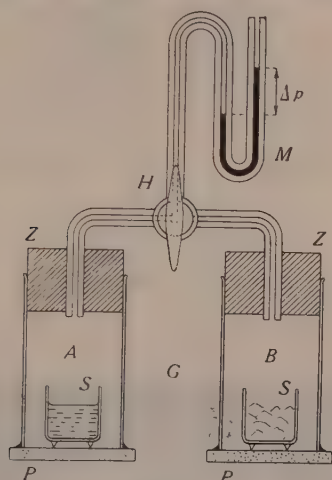


Fig. 1.

zylinder G von $\varnothing = 4$ cm auf Tonplättchen P von 5×5 cm² aufgekittet, und sie wurden mit leicht eingefetteten Gummizapfen Z verschlossen. Für beide Hygrometerteile A und B wurde dasselbe Manometer M mit Paraffinöl-Füllung verwendet, das mittelst eines Dreiweghahns H wechselweise mit letzteren verbunden werden konnte. A enthielt ein Schälchen mit H_2O , in das zur besseren Verdampfung ein Stückchen Filtrierpapier eintauchte, B als Trockenmittel ein Schälchen mit KOH fus¹⁾. Bei einem zweiten gleich gebauten Modell II wurden die Glaszylinder auf einer gemeinsamen Tonplatte von 10×5 cm² aufgekittet, und war sowohl A als B

¹⁾ Diese Substanz erwies sich sowohl in Bezug auf Grad als Dauer der Trockenwirkung als besonders vorteilhaft. Nach Crit. Tabl. 3. S. 385 beträgt der Wassergehalt über

	mg H_2O /Liter
P_2O_5	0,000
KOH fus.	0,002
H_2SO_4 conc.	0,003
$NaOH$ fus.	0,16
$CaCl_2$ gran.	0,14—0,25

mit einem Manometer versehen, so dass die Ablesungen gleichzeitig erfolgen konnten. Bei Modell III (Fig. 2) ist das Tonplättchen von $2,5 \times$

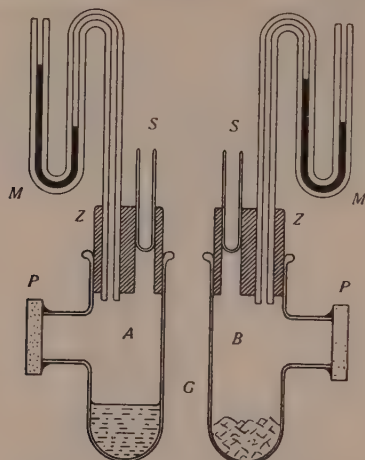


Fig. 2.

$2,5 \text{ cm}^2$ an einem seitlichen Rohransatz ($\varnothing = 1,5 \text{ cm}$) angebracht, und der Gummizapfen ist doppelt durchbohrt, damit das Gefäß nach dem



Fig. 3.

Zusammensetzen durch den Glasstopfen *S* verschlossen werden kann. Besondere Schälchen sind hier nicht notwendig. Modell IV, in Fig. 3 abgebildet, ist gleich wie Model III gebaut, jedoch ganz

aus Glas hergestellt. Der Verschluss und das Einfüllen der hygrometrischen Substanzen geschieht hier von unten durch Glasschliffe.

Um das Diffusionshygrometer auf seine Brauchbarkeit zu prüfen, wurden Versuche über die Reproduzierbarkeit, die Beständigkeit und die Einstellgeschwindigkeit des Diffusionsdruckes ausgeführt. Ferner wurden die sich ergebenden Messresultate auf ihre Richtigkeit geprüft. Dieses geschah durch Vergleich 1. der Modelle unter sich, 2. mit den Angaben anderer Hygrometer, 3. der an den Teilen *A* und *B* gewonnenen Ergebnisse.

Zu 3. ist folgendes zu bemerken. Unter der stets gemachten Voraussetzung, dass die Diffusionsdrucke proportional dem Unterschied des Dampfdruckes im Innen- und Aussenraum sind, hat man einerseits

$$\Delta p_A = k(p_s - p) \quad (1)$$

und andererseits

$$\Delta p_B = kp$$

Dabei können die Δp in mm Öl und die p in mm Hg angegeben sein. Ist die Apparatkonstante k bekannt, so kann somit sowohl Teil *A* als Teil *B* allein als Hygrometer verwendet werden. Aus Δp_B folgt die absolute Feuchtigkeit p direkt, aus Δp_A indirekt unter Benützung einer Dampfdrucktabelle für p_s . Will man die relative Feuchtigkeit $100 \cdot \frac{p}{p_s}$ angeben, so ist in beiden Fällen eine solche Tabelle erforderlich. Die Verwendung von *Doppelinstrumenten* bietet nun den Vorteil, dass zur Bestimmung der relativen Feuchtigkeit weder die Kenntnis der Apparatkonstanten noch eine Dampfdrucktabelle notwendig ist, denn durch Addition von Δp_A und Δp_B ergibt sich

$$\Delta p_A + \Delta p_B = kp_s \quad (2)$$

und für die relative Feuchtigkeit folgt

$$100 \frac{p}{p_s} = \frac{100 \Delta p_B}{\Delta p_A + \Delta p_B} \quad (3)$$

Ferner kann zur Angabe der absoluten Feuchtigkeit p und des Sättigungsdefizites $p_s - p$ die Konstante k aus (2) in (1) eingesetzt werden, und man erhält

$$p = p_s \frac{\Delta p_B}{\Delta p_A + \Delta p_B} \quad \text{bzw.} \quad p_s - p = p_s \frac{\Delta p_A}{\Delta p_A + \Delta p_B} \quad (4)$$

Beziehung (2) erlaubt, wie unten noch gezeigt wird, ausserdem die unter 3. erwähnte Prüfung des Hygrometers durch Vergleich von Δp_A und Δp_B .

2. Wirksamkeit der porösen Schichten.

Die sich einstellende Druckdifferenz hängt nicht nur vom Material, sondern auch von der Dicke und Grösse der porösen Schicht ab. So erhielt man beispielsweise mit einem Jenaer Glasfilter oder gebranntem rotem Ton praktisch keinen Druckunterschied, und auch Tonzylinder aus galvanischen Elementen ergaben geringere Drucke als die verwendeten Tonplättchen. Die Druckdifferenz kann durch Verkleinerung der Flächen etwas erhöht werden. Doch sind dem durch Vergrößerung der Einstelldauer gewisse Grenzen gesetzt. Das verwendete Material erwies sich als recht gleichmässig in seiner Wirkung. Nur unter dieser Voraussetzung konnte auch der Proportionalitätsfaktor für die Hygrometerteile *A* und *B* als gleich gross angenommen werden. Inwieweit dies zutraf, wurde noch besonders geprüft. Zu diesem Zwecke brachte man sowohl in *A* als *B* etwas Wasser und beobachtete die sich einstellenden Drucke. Solche Messungen, die bei jedem Modell zumeist an verschiedenen Tagen ausgeführt wurden, seien in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Modell	Temp.	<i>A</i> mm	<i>B</i> mm	Mittel <i>A/B</i>
I	19,1	15,2	15,2	1,00 ₀
	17,3	12,7	12,7	
II	15,9	11,2	10,5	1,06 ₆
	16,1	11,9	11,2	
	15,65	10,9	10,2	
III	19,5	17,9	17,3	1,03 ₈
	20,2	19,2	18,5	
	15,2	12,3	11,8	
IV	19,1	12,5	12,3	1,01 ₃
	19,2	12,8	12,6	
	19,2	12,3	12,2	

Man erkennt, dass die Einstellungen an *A* und *B* teils vollständig, teils bis auf wenige Prozente genau übereinstimmen. Dabei sei erwähnt, dass die Tonplättchen für beide Teile jeweils aus demselben Stück geschnitten waren. Die Ablesegenauigkeit kann mit $\pm 0,1$ mm bewertet werden, da die Ablesungen mittelst Millimeterpapier und Lupe erfolgten. Die Unterschiede erwiesen sich als zeitlich konstant. Sie können daher bei den Feuchtigkeitsmes-

sungen in der Weise berücksichtigt werden, dass man zu den Ablesungen an B entsprechend Prozente hinzuzählt. Im folgenden wurde indessen von einer solchen Reduktion Umgang genommen. Denn die kleinen Abweichungen in den Angaben beeinflussen die Messresultate nur in vernachlässigbar geringem Masse. Beträgt nämlich die Korrektion an $B + q\%$, so ergibt sich für den Unterschied in der Angabe der relativen Feuchtigkeit ohne und mit Korrektion

$$\Delta = \frac{100 B}{A + B} - \frac{100 (B + q/\frac{100}{100} B)}{A + B + q/\frac{100}{100} B} \asymp -q \frac{AB}{(A + B)^2} \%$$

Dieser Fehler ist, wie leicht einzusehen, bei $A = B$, d. h. 50% Feuchtigkeit am grössten und beträgt dann $\frac{q}{4}\%$, also im schlimmsten Falle, wenn $q = 6\%$, $\Delta = 1,5\%$ Feuchtigkeit.

Für Modell I wurde die Prüfung auf gleiche Wirkung der beiden Tonplättchen auch in folgender Weise vorgenommen. Man gab einmal in A Wasser und in B KOH und führte dann auch eine Messung mit vertauschten Substanzen aus. Es ergab sich

	A mm	B mm
In $A \rightarrow \text{H}_2\text{O}$. . .	12,8	6,8
In $A \rightarrow \text{KOH}$. . .	7,2	14,0

Man erhält für die relative Feuchtigkeit im einen Falle

$$\frac{100 \cdot 6,8}{19,6} = 34,7\%$$

und im andern

$$\frac{100 \cdot 7,2}{21,2} = 34,0\%,$$

also eine gute Übereinstimmung. Die Absolutwerte für A und B wurden im zweiten Falle etwas höher gefunden, da vor der Ablesung wieder der stationäre Zustand abgewartet werden musste und sich dabei die Raumtemperatur etwas erhöht hatte.

3. Vergleich der Modelle unter sich.

Im folgenden seien nun vergleichende Versuche über die Angaben der verschiedenen Modelle mitgeteilt. Einmal sollten die Manometerdrucke selbst, dann aber namentlich die Resultate für die relative Feuchtigkeit verglichen werden. Aus der Tabelle I können solche Vergleiche nicht gezogen werden, da die Messungen zu verschiedenen Zeiten bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden ausgeführt wurden. Es sollen daher besondere Vergleichsmessungen,

die sich jeweils auf den gleichen Zeitpunkt beziehen, in Tabelle II zusammengestellt werden. Der Vollständigkeit halber sind hier wie auch im folgenden für die relative Feuchtigkeit noch die Zehntel angegeben, obschon hierfür die Messgenauigkeit nicht ausreichend war.

Tabelle IIa.

Modell	Temp.	A mm	B mm	Feuchtigkeit %	
				ber.	Hydrogr. Häni
I	19,0°	15,2	4,8	24,0	25
II		14,9	4,1	21,6	
III		18,5	4,8	20,6	
I	18,0°	13,0	6,2	32,3	32
II		12,4	5,9	32,2	
III		15,5	6,8	30,5	
I	19,9°	11,2	10,4	48,2	48
II		11,8	9,0	43,3	
III		14,6	11,1	43,2	

Etwa 1½ Monate später, nachdem die Modelle mit neuer Füllung versehen und auch die Tonplatten von Modell I und II im Verlauf der Versuche ausgewechselt worden waren, ergaben sich folgende Werte:

Tabelle IIb.

Modell	Temp.	A mm	B mm	Feuchtigkeit %	
				ber.	Hydrogr. Häni
I	17,7°	12,7	5,1	28,6	36 ½
II		12,3	6,0	32,8	
III		14,8	6,9	31,8	
I	18,4°	12,8	6,7	34,4	38
II		13,4	6,3	32,0	
III		15,0	7,9	34,5	
I	14,6°	10,1	3,8	27,4	36 ½
II		10,2	4,1	28,7	
III		12,0	4,7	28,1	

Die Übereinstimmung der bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden und Temperaturen gefundenen Werte ist eine befriedigende und bleibt über einen längeren Zeitraum erhalten. Die Unterschiede zwischen den beiden (verschieden dimensionierten) Modellen II und

III betragen maximal nur 2,5% Feuchtigkeit. Etwas grösser sind die Abweichungen bei Modell I (bis zu 5% Feuchtigkeit). Doch war in diesem besonderen Falle die Vermutung begründet, dass die Manometereinstellung infolge einer geringen Verunreinigung der Kapillaren beim Einfüllen der Flüssigkeit leicht gestört war, was zu etwas unsicheren Werten führte. Auch Vergleichsmessungen an Modell III und IV, die an verschiedenen Tagen ausgeführt wurden, seien hier angeführt.

Modell III . . .	38,7	39,7	35,8	35,6	37,6%
Modell IV . . .	41,2	41,2	38,2	38,4	40,3%
Temperatur . . .	18,2°	18,0°	18,3°	18,0°	19,0°

Die Übereinstimmung ist auch hier eine befriedigende. Jedoch zeigt Modell IV dauernd um etwa 2½% mehr Feuchtigkeit an. Eine Erklärung kann in dem Umstand gesucht werden, dass Modell IV frisch mit KOH beschickt war, während bei III die Füllung schon 3 Wochen zurücklag. Die KOH-Stangen wiesen hier einen feinen braunen Überzug auf, der sich offenbar infolge Verdampfung des Gummistopfens (Ersatz) gebildet hatte.

4. Vergleiche mit anderen Hygrometern.

Ein erster Vergleich der Angaben des Diffusionshygrometers mit andern Hygrometern ergibt sich bereits aus Tabelle II, wo die gleichzeitigen Ablesungen an einem Hygrographen Hänni vermerkt sind. Vermutlich zeigte letzterer allerdings um einige Prozente zu hoch, da Ablesungen an einem Hygrographen Lambrecht im betreffenden Messbereich 3—4% weniger ergaben. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes kann die Übereinstimmung als eine gute bezeichnet werden. Ähnliche Ergebnisse lieferten Vergleichsmessungen mit einem Assmannschen Aspirationshygrometer vereinfachter Ausführung.

Tabelle III.

Modell	Feuchtigkeit in %			Temperatur
	Diffus.-Hygrom.	Psychrometer		
I	29,3	31,9	(26,8)	19,0 ⁰
	38,5	39,4	(34,5)	14,2 ⁰
	40,4	43,1	(38,8)	18,2 ⁰
II	32,5	38,5	(33,8)	17,2 ⁰
	25,3	31,6*	(26,7)	20,4 ⁰

* Hygrometer Hänni zeigte 29%.

Die Psychrometerwerte sind mit der Konstanten 0,00066 berechnet, die eingeklammerten Zahlen wurden einer von der Meteorologischen Zentralanstalt in Zürich stammenden Psychrometertabelle entnommen. Leider muss auch heute noch immer mit einer gewissen Unsicherheit der Psychrometerkonstanten gerechnet werden¹⁾, so dass selbst bei diesen für besonders genau geltenden Instrumenten die Werte nicht völlig verbürgt sind. Aus den Vergleichsmessungen lässt sich daher nur entnehmen, dass die Angaben des Diffusionshygrometers durchwegs um einige % niedriger sind als den Psychrometerwerten der 1. Kolonne entspricht, dass aber die Übereinstimmung angesichts der eingeklammerten Werte als befriedigend angesehen werden darf. Andererseits zeigen die Versuche, dass ein Vergleich der Angaben verschiedener Hygrometer nur bedingten Wert besitzt. Demgemäss wurde auch von der Mitteilung weiterer Ergebnisse Umgang genommen.

5. Konstanz des Druckverhältnisses $\frac{\Delta p}{p}$.

Geeigneter zur Prüfung der Angaben des Diffusionshygrometers erwies sich ein Vergleich der an den Teilen *A* und *B* ausgeführten Messungen. Die oben angegebene Beziehung $\Delta p_A + \Delta p_B = kp_s$ kann auf zweierlei Weise verifiziert werden: 1. durch die Feststellung, dass die Summe $\Delta p_A + \Delta p_B$ bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden der umgebenden Luft unverändert bleibt, sofern die Temperatur konstant ist; 2. dass die Summe (Σ), als Funktion der Temperatur (bei einer im übrigen variablen Feuchtigkeit der Umgebung) aufgetragen, parallel mit der tabellarischen Sättigungskurve verläuft, d. h. dass der Verhältnissfaktor Diffusionsdruck/Sättigungsdruck ein konstanter ist.

Zu 1. seien folgende Messungen mitgeteilt:

Tabelle IVa.

	Modell II				Modell III				Temp.
	<i>A</i> mm	<i>B</i> mm	Σ	relat. Feucht. %	<i>A</i> mm	<i>B</i> mm	Σ	relat. Feucht. %	
Zu Beginn	13,5	6,0	19,5	30,8	16,9	7,4	24,3	30,5	19,5°
Nach Verdampfen von H ₂ O im geschlossenen Raum	11,8	9,0	20,8	43,3	14,6	11,1	25,7	43,2	19,9°
Anderen Tags bei wieder normaler Feuchtigkeit	14,0	5,2	19,2	27,2	17,5	6,8	24,3	28,0	19,1°

¹⁾ Siehe z. B. M. ROBITZSCH: Meteorol. ZS. 59, 344, 1942; B. J. BIRKELAND: Meteorol. ZS. 59, 274, 1942.

Abgesehen von einer leichten Zunahme infolge des Temperaturanstieges auf $19,9^{\circ}$ sind die Werte für Σ innerhalb der Feuchtigkeitsgrenzen von 27—43% konstant. Um grössere Feuchtigkeitsunterschiede zu erhalten, wurde ein zweiter Versuch so ausgeführt, dass man Modell III unter eine Glasglocke mit einer Wasserschale setzte. Es wurden folgende Werte gefunden:

Tabelle IVb.

	A mm	B mm	Σ	relat. Feucht. %	Temp.
Modell III unter Glasglocke	6,0	14,8	20,8	71,2	$17,4^{\circ}$
Modell III in freier Luft	15,8	5,7	21,5	26,5	$17,7^{\circ}$

Auch dieser Befund darf als eine Bestätigung der gemachten Voraussetzungen gelten.

Σ als Funktion der Temperatur wurde an Modell III, das in verschiedenen temperierte Räume gebracht wurde, aufgenommen. Es erwies sich als günstig, um eine Streuung der Versuchswerte zu vermeiden, die Messungen alle am selben Tage auszuführen. Eine solche Versuchsreihe sei in Fig. 4 graphisch wiedergegeben. Da-

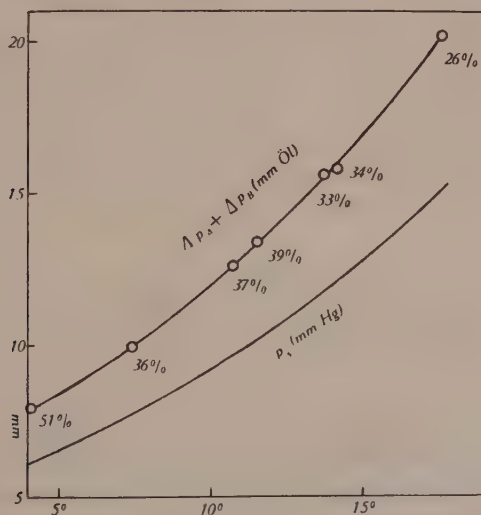


Fig. 4.

neben ist die aus KOHLRAUSCH, Praktische Physik, entnommene Sättigungskurve eingezeichnet. Man erkennt, dass die Kurven durchaus parallel verlaufen. Auch das Verhältnis der Werte Mano-

meterdruck in mm Öl: Sättigungsdruck in mm Hg erweist sich als ungefähr gleichbleibend zu 1,29—1,34. Der Vollständigkeit halber sind noch die relativen Feuchtigkeiten für die einzelnen Messpunkte angegeben.

6. Einstellungsgeschwindigkeit.

In die Frage nach der Brauchbarkeit des neuen Instrumentes musste auch die nach der Einstellungsgeschwindigkeit einbezogen werden. Diese hängt ausser vom Material der porösen Schicht weitgehend von deren Dicke und Fläche, aber ausserdem auch vom Volumen des Instrumentes ab. Für eine kurze Einstelldauer ist ein kleines Gefäss günstig. Auch eine grosse Tonplatte wäre vorzuziehen, wenn dies nicht mit einem kleineren Diffusionsdruck und namentlich einer zu starken Wasserdampfdiffusion verbunden wäre, was eine häufige Auswechslung der Hygrometerfüllung bedingen würde. Der zeitliche Verlauf der Einstellung bei Modell II und III

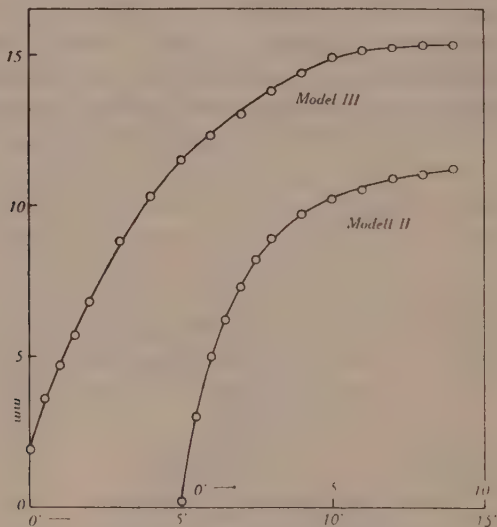


Fig. 5.

ist in Fig. 5 wiedergegeben. Die Modelle wurden einige Zeit unter eine Glasglocke mit Wasser gesetzt und dann in die freie Atmosphäre herausgenommen. Es wurde der Druckanstieg am Teil A (Wasserfüllung) gemessen. Während bei Modell II die Einstellung bis auf 10% in ca. 5 Minuten erreicht ist, braucht dies bei Modell III 8—9 Minuten. Bei II beträgt die Tonfläche 12,5 cm², bei III aber nur 1,75 cm². Es wurde festgestellt, dass eine Verdoppelung der Dicke die Einstelldauer entsprechend noch weiter hinaufsetzt.

Dass mit der kleineren Tonfläche bei Modell III eine geringere Wasserdampfdiffusion verbunden ist, wurde noch besonders festgestellt. Die mit Wasser beschickten Gefässe der Modelle II und III wurden gewogen. Dabei ergab sich für II (A) ein Gewichtsverlust von 218 mg pro Tag, für III (A) aber nur 35 mg. Die Verdunstung erfolgte hier also etwa 6mal langsamer. Dies entspricht ziemlich genau dem Flächenverhältnis der Tonplatten, das etwa 7 betrug. Die geringe Verdunstung bei Modell III bzw. IV bewirkte, dass diese Modelle über lange Zeit hin ohne Erneuerung des Inhaltes funktionierten. Ferner war hier die Voraussetzung, dass trotz des Diffusionsstromes durch die Tonplatte vollkommene Sättigung bzw. Trocknung im Innern vorhanden war, wohl besser erfüllt. Die Funktion der Modelle wurde auch $\frac{1}{4}$ Jahr nach der Füllung als noch völlig in Ordnung befunden.

7. Einfluss der Temperatur und der Luftverhältnisse.

Der Einfluss der Temperatur auf die Instrumente machte sich in verschiedener Weise bemerkbar. Ein Temperaturanstieg bewirkt eine Druckzunahme, die, soll die Ablesung stimmen, erst durch Diffusion ausgeglichen sein muss. Dabei aber muss sich auch immer wieder der neue stationäre Verdampfungszustand einstellen. Dies bewirkt, dass in Wirklichkeit die Einstelldauer von diesen beiden Faktoren abhängt. Eine starke und rasche Temperatursenkung kann Kondensationserscheinungen hervorrufen, die ebenfalls auf die Einstelldauer einwirken. Allgemein ist zu beachten, dass während einer Temperaturzunahme der Druck an A leicht zu gross, an B zu klein ausfällt, die relative Feuchtigkeit also zu gering und umgekehrt während einer Temperaturabnahme zu gross befunden wird.

Auch bei starken Luftbewegungen wurden Änderungen in der Manometereinstellung beobachtet. Es wurde indessen nicht näher untersucht, ob dies mit einer Beeinflussung des Diffusionsvorganges oder einfach mit Ungleichmässigkeiten der Luftfeuchtigkeit im Messraum zusammenhing. Auch bei Ausschaltung dieser Faktoren konnten im Laufe von Tagen noch kleinere Schwankungen des Σ -Wertes für eine gegebene Temperatur festgestellt werden. Vielleicht geben hier Versuche über einen möglichen Einfluss des Luftdruckes auf den sich einstellenden Diffusionsdruck Aufschluss. In einem solchen Falle wäre die Apparatkonstante k nicht ganz unabhängig vom Barometerdruck, was hingegen keinen Einfluss auf das die relative Feuchtigkeit bestimmende Verhältnis $\frac{\Delta p_B}{\Delta p_A + \Delta p_B}$ hätte.

Zu beachten ist der Umstand, dass bei niedrigen Temperaturen die Manometerdrucke recht klein werden, was sich ungünstig auf die Messgenauigkeit auswirkt. Die Drucke sind an und für sich nicht gross und betragen nur einen kleinen Bruchteil des zu messenden Wasserdampfdruckes, der sich etwa in den Grenzen von 0—20 mm Hg bewegt. So findet man z. B. für Modell III unter Berücksichtigung des sich aus Fig. 4 ergebenden Zahlenverhältnisses (im Mittel 1,32) und der Dichte der Manometerflüssigkeit (0,88) folgenden Wert für diesen Bruchteil:

$$= \frac{0,88 \cdot 1,32}{13,6} = 0,0854 \approx \frac{1}{12}.$$

Das Diffusionshygrometer benötigt daher empfindliche Manometer. Die benützten Flüssigkeitsmanometer erwiesen sich hier zwar als durchaus brauchbar, zumal sie Volumen und Masse des Apparates nicht wesentlich vermehrten. Auch können sie durch Schrägstellung des U-Rohres noch empfindlicher gemacht werden. Indessen dürfte doch ein aus festem Material bestehendes Manometer für die technische Ausführung des Instrumentes vorzuziehen sein.

8. Weiterentwicklung des Hygrometers.

Ein brauchbares Zeigerinstrument wurde erhalten unter Verwendung zweier „Feindruck-Manometer“, Fabrikat Hänni, Jegenstorf. Das eine zeigte Unterdrucke an von 0—20 mm H₂O, das andere Überdrucke von 0—30 mm H₂O. Mittelst einer Schraubvorrichtung wurde an jedes Instrument ein Hygrometergefäss nach Art und Grösse der bei Modell IV verwendeten angeschlossen, wobei das eine mit Wasser, das andere mit KOH beschickt war. Die beiden Manometer wurden in die Vorderseite eines grösseren Holzkastens eingelassen (Fig. 6), dessen Rückseite offen gelassen wurde. Zufälligerweise erwies sich das Verhältnis zwischen dem sich einstellenden zu dem zu messenden Druck etwa wie 1 : 13,6, so dass die Skala, die in mm H₂O eingeteilt war, direkt die Wasserdampfdrucke in mm Hg ergab. Das Manometer links (A), das mit dem Trockengefäss verbunden war, zeigt somit die absolute Feuchtigkeit in mm Hg, das rechts (B) das Sättigungsdefizit in gleichem Masse an. A + B ergibt den Sättigungsdruck bei der Temperatur, die sich an dem zwischen den Skalen angebrachten Thermometer ablesen lässt, während sich die relative Feuchtigkeit aus $100 \frac{A}{A+B}$ berechnet. Diese Angaben finden sich in den 4 ober- und unterhalb der Skalen angebrachten Rähmchen vermerkt. Um jede Rechnung

zu vermeiden, ist dem Apparat noch eine Tabelle beigegeben, welche die relative Feuchtigkeit aus den Werten A und B direkt



Fig. 6.

zu entnehmen erlaubt. Das Hygrometer arbeitet nun schon mehrere Monate ohne neue Füllung befriedigend. Die Ablesungen lassen

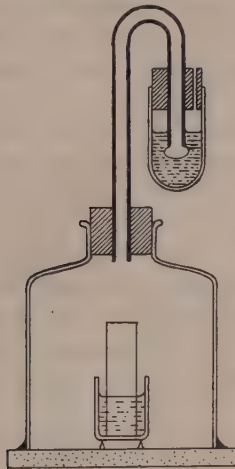


Fig. 7.

sich an der grossen Skala bequem und genau ausführen. Selbst in der kleinen Abbildung 6 kann ohne weiteres abgelesen werden $A = 9,9$ mm, $B = 11,0$ mm, was einer Feuchtigkeit von 47,3% ent-

spricht. Leider bedingt die Verwendung der erwähnten Feindruckmanometer einen ziemlich hohen Preis. Auch ist die Einstelldauer infolge der grossen Metallmassen merklich erhöht. Man wird daher darauf tendieren, die Manometer durch kleinere Anzeigeinstrumente zu ersetzen.

Der Vollständigkeit halber sei noch darauf hingewiesen, dass das Diffusionsprinzip auch noch in anderer Form verwendet werden kann. Statt des stationär sich einstellenden Diffusionsdruckes kann auch die durch die Tonplatte hindurch diffundierende Luftmenge gemessen werden. Lässt man aus einem Gasentbindungsrohr, etwa nach Anordnung Fig. 7, Luft in ein Gefäss mit Flüssigkeit austreten, so gibt die Zahl der pro Zeiteinheit austretenden Blasen ebenfalls ein Mass für das Sättigungsdefizit. Es ist bemerkenswert, dass diese Anordnung gleichzeitig das Prinzip eines von selbst und fortdauernd funktionierenden *Diffusionsmotors* darstellt. Es ist das Modell eines scheinbaren *Perpetuum mobile II. Art*, das ohne Temperaturdifferenz Arbeit unter gleichzeitiger Abkühlung leistet. In Wirklichkeit ist dies aber ebensowenig ein *Perpetuum mobile*, wie etwa eine Stahlflasche mit flüssiger CO_2 , aus der man das Gas unter Arbeitsleistung und gleichzeitiger Abkühlung ausströmen lässt.

II. Theoretisches.

Zum Schlusse soll versucht werden, unter Annahme einfacher Voraussetzungen zu einer quantitativen Beziehung zwischen Diffusionsdruck und Wasserdampfdruck zu gelangen, bzw. die oben verwendete Beziehung theoretisch zu begründen. Wir betrachten die Diffusion durch 1 cm^2 Querschnitt einer porösen Schicht P (siehe etwa Fig. 2A). $n_1 n_1'$ sei die Zahl der Luftmoleküle pro 1 cm^3 links und rechts und $n_2 n_2'$ die entsprechende Zahl Wasserdampfmoleküle. Zu Beginn sei der Gesamtdruck auf beiden Seiten gleich gross, d. h. $n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$. Ist nun z. B. $n_2' > n_2$, so setzt eine Diffusion der Luft von links nach rechts ein. Hierbei ist, wenn sich links die freie Atmosphäre befindet, n_1 und n_2 konstant. Ferner sei auch die Feuchtigkeit im Inneren des Hygrometers, d. h. n_2' konstant. Für die Zunahme von n_1' kann man dann folgenden Ansatz machen:

$$dn_1' = [c_1 v_1 (n_1 - n_1') - c_2 v_2 (n_2' - n_2) \cdot f(n_1)] dt. \quad (1)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Diffusion proportional der Diffusionsgeschwindigkeit der Luftmoleküle v_1 und proportional der Konzentrationsdifferenz $(n_1 - n_1')$ sei; ferner, dass diesem Diffusionsstrom entgegenwirkt ein nach links gerichteter Diffusionsstrom

von Dampfmolekülen. Dies bedingt eine Schwächung der Luftdiffusion nach rechts proportional der Diffusionsgeschwindigkeit des Wasserdampfes v_2 ; ferner dem Unterschied der Dampfkonzentration $(n_2' - n_2)$, und ist um so grösser, je mehr Luftmoleküle die von rechts nach links diffundierenden Dampfmoleküle begegnen. Diesem Umstand ist durch den Faktor $f(n_1)$, der mit n_1 zunimmt, Rechnung getragen.

Aus (1) kann der zeitliche Anstieg von n_1' berechnet werden. Uns interessiert vor allem der stationäre Endzustand, wo $dn_1' = 0$. Bezeichnen wir die sich einstellende Molekülzahl mit N_1' , so haben wir nach (1)

$$c_1 v_1 (n_1 - N_1') = c_2 v_2 (n_2' - n_2) \cdot f(n_1)$$

oder abkürzungsweise

$$n_1 - N_1' = \lambda (n_2' - n_2) \cdot f(n_1) \quad (2)$$

Da v_1 und v_2 in gleicher Weise mit der Temperatur zunehmen, ist λ von dieser unabhängig. Der am Manometer sich einstellende Druck ist proportional $N_1' + n_2' - (n_1 + n_2)$, d. h.

$$\Delta p = C(N_1' - n_1 + n_2' - n_2) \quad (3)$$

Dies ergibt unter Berücksichtigung von (2)

$$\Delta p = C(n_2' - n_2)(1 - \lambda \cdot f(n_1))$$

Da

$$p_2 = C n_2 \quad \text{und} \quad p_2' = C n_2'$$

erhalten wir schliesslich

$$\Delta p = (p_2' - p_2)(1 - \lambda \cdot f(n_1)) \quad (4)$$

Durch eine analoge Betrachtung unter der Annahme, dass $n_2 > n_2'$, gelangt man zum Ausdruck

$$-\Delta p = (p_2 - p_2')(1 - \lambda \cdot f(N_1')) \quad (5)$$

(4) und (5) auf die beiden Manometer des Hygrometers angewendet, ergeben, wenn man für das Gefäss B $p_2' = 0$ und für das Gefäss A $p_2' = p_s$ (Sättigung) ansetzt:

$$-\Delta p_B = p_2 (1 - \lambda \cdot f(N_1')) \quad (5a)$$

$$\Delta p_A = (p_s - p_2)(1 - \lambda \cdot f(n_1)) \quad (4a)$$

Da die Δp nur etwa $1/12$ der p betragen, sind die Subtrahenden $\lambda f(N_1')$ bzw. $\lambda f(n_1)$ relativ gross. Es ist daher der Verlauf der Funktion $f(n_1)$ für die Grösse des Verhältnissfaktors $\frac{\Delta p}{p}$ massgebend.

Darüber kann folgendes gesagt werden. Die Einwirkung der Luftmoleküle auf die Diffusion des Wasserdampfes verschwindet bei $n_1 = 0$, so dass dann $f(n_1) = 0$ wird. Die gemessenen Drucke $|\Delta p_B|$ und $|\Delta p_A|$ werden in diesem Fall gemäss (4a) und (5a), wie es sein muss, direkt gleich p_2 bzw. $p_s - p_2 \cdot f(n_1)$ wird mit n_1 zunehmen, aber nicht linear, da sonst bei $n_1 = \infty$ das Vorzeichen des Verhältnissfaktors sich umkehren würde. $f(n_1)$ wird einem Maximum zustreben, wobei der Verhältnissfaktor seinen kleinsten Wert, ev. den Wert 0 erreicht. Für $n_1 = \infty$ wäre dann $f(n_1) = 1/\lambda$. Da bei den hygrometrischen Verhältnissen $n_1 \gg n_2$, so wird der Anstieg von $f(n_1)$ bei gewöhnlichem Atmosphärendruck schon klein sein. Es wird dann praktisch $f(N_1') = f(n_1)$ gesetzt werden dürfen, dies um so mehr, als im Hinblick auf die Kleinheit der Δp N_1' nahezu gleich n_1 ist. Man wird also (5a) schreiben dürfen:

$$-\Delta p_B = p_2(1 - \lambda \cdot f(n_1)) \quad (5b)$$

Aus (4a) und (5b) folgt für die relative Feuchtigkeit

$$100 \frac{p_2}{p_s} = 100 \frac{|\Delta p_B|}{|\Delta p_A| + |\Delta p_B|} \quad (6)$$

Dies ist aber die oben verwendete Formel.

Der Ausdruck ist unabhängig von n_1 , d. h. dem Barometerstand. Dies ist im Prinzip nicht der Fall für die Diffusionsdrucke Δp_A und Δp_B selbst. Es sind hingegen nur kleine Änderungen des Verhältnissfaktors $1 - \lambda \cdot f(n_1)$ zu erwarten, da der Barometerdruck und damit n_1 prozentual nur wenig variiert und in dem betreffenden Druckgebiet bereits ein recht flacher Verlauf der Funktion $f(n_1)$ anzunehmen ist. Inwieweit indessen ein Barometereinfluss beim Diffusionshygrometer zu berücksichtigen ist, muss erst noch durch besondere, unter Variation der Druckverhältnisse ausgeführte Versuche festgestellt werden.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.

Berechnung von Hilfsfunktionen für gerade Empfangsantennen beliebiger Höhe

von Josef Müller-Strobel und J. Patry, Zürich

(10. VII. 1944)

Inhalt: Für die Berechnung des Stromes am Fusspunkt einer geraden Empfangsantenne von beliebiger Höhe, werden die nötigen Hilfsfunktionen bekanntgegeben.

1. Einleitung.

Gleichungen für die Berechnung des Antennenstromes am Fusspunkt von geraden verlustlosen Antennen mit linearem und quadratischem Verlauf der Feldstärke des einfallenden Feldes, wenn ihre Abmessungen klein gegenüber der Wellenlänge λ sind, wurden in einer orientierenden Mitteilung¹⁾ und in einer eingehenden, demnächst erscheinenden Untersuchung²⁾ für $l \neq \lambda/4(2n+1)$ abgeleitet. Es besteht nun ein praktisches Bedürfnis, die Näherungstheorie auf Antennen, deren Länge l gegenüber der Wellenlänge der einfallenden Strahlung praktisch beliebig gross ist, zu erweitern. Diese Erweiterung ist in der vorliegenden Arbeit durch die Bekanntgabe der Hilfsfunktionen Q, G_0 vorgenommen. Eine Einschränkung besteht darin, dass nur ein konstanter Feldstärkeverlauf längs der Antenne berücksichtigt ist. Alle Grundgleichungen sind der Arbeit 1) entnommen, deren Ableitungen nebst Beweisen in 2) nachgeschlagen werden müssen. Um den Ursprung der verwendeten Gleichung zu kennzeichnen, sind sie mit dem Lit.-Vermerk entsprechend ihrer Herkunft versehen.

Möchte man der Berechnung einen quadratischen Feldstärkeverlauf zugrunde legen, so müssten nach Gl. (2) die zwei weiteren Hilfsfunktionen G_1 und G_2 , die vom ähnlichen Typus wie G_0 sind, entsprechend der Mehrzahl von Gliedern der Ausgangsgleichung (Gl. (16), (20), (26) in (1)), die bei quadratischem Feldstärkeverlauf auftreten, berechnet werden. Von einer Auswertung dieser Funktionen G_1 und G_2 ist abgesehen. Im Bedarfsfall kann man G_1 nach Gl. (20)¹⁾ oder Gl. (93), (94)²⁾, G_2 nach Gl. (101), (106)²⁾ numerisch auswerten.

2. Allgemeine Gleichungen.

Die allgemeine Schlussformel für den Strom an der Antennenbasis nach Gl. (16)¹⁾ für $\cos L \neq 0$ bzw. $l \neq \lambda/4$ ($2n+1$) im Bereiche

$$\Omega = 2 \ln \left(\frac{2l}{\varrho} \right) \geq 12 \quad (1)$$

lautet für einen quadratischen Feldstärkeverlauf längs der Antenne, $E_x = E_0 + E_1 X + E_2 X^2$ (Gl. 12 in (1)) und ohne Berücksichtigung der jouleschen Verluste,

$$\Im(0) = \frac{c}{\kappa \Omega}$$

$$\frac{E_0 \left(\frac{1 - \cos L}{\cos L} + \frac{G_0(L)}{\Omega} \right) + E_1 \left(\frac{L - \sin L}{\cos L} + \frac{G_1(L)}{\Omega} \right) + E_2 \left(\frac{L^2}{12} + \frac{G_2(L)}{\Omega} \right)}{1 + j \frac{c \cdot \Re_e}{2 \Omega} \cdot \operatorname{tg} L - Q(L) j \frac{c \cdot \Re_e}{2 \Omega^2}} \quad (2)$$

$$\text{mit } L = \kappa l \quad (3)$$

$$\text{und Wellenparameter} \quad \kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4)$$

Bei konstanter Feldstärke $E_x = E_0$ des äussern Feldes wird Gl. (2)

$$\Im(0) = j \frac{c}{\kappa \cdot \Omega} \cdot \frac{E_0 \left[\left(\frac{1 - \cos L}{\cos L} \right) + \frac{G_0(L)}{\Omega} \right]}{1 + j \frac{c \cdot \Re_e}{2 \Omega} \left(\operatorname{tg} L - \frac{Q(L)}{\Omega} \right)} \quad (5)$$

Es sind: nach Gl. 19¹⁾

$$G_0(L) = 4M \left(\frac{L}{2} \right) - 4 \frac{M(L)}{\cos L} + \frac{M(2L)}{\cos L} + j \cdot \operatorname{tg} L \cdot \frac{M(2L)}{\cos L} \quad (6)$$

Gl. 18¹⁾

$$Q(L) = [4M(L) - 2M(2L) - j \cdot \operatorname{tg} L \cdot M(2L) - 2 \ln 2] \operatorname{tg} L + j M(2L) + 4j M(L) \quad (7)$$

Gl. 13¹⁾

$$M(y) = -\frac{1}{2} (\ln(2\gamma y) - Ci(2y) + j Si(2y)) \quad (8)$$

mit

$$y = x; X; l; L; 2L$$

Der Verlauf von 8 stellt Fig. 1 dar. Gl. (5) lässt sich nach dem

Zerlegen der Funktionen $G_0(L)$, $Q(L)$ in die Realteile G'_0 , $Q'(L)$ und Imaginärteile $G''_0(L)$, $Q''(L)$ für $l \pm \lambda/4 (2n+1)$ schreiben,

$$\mathfrak{I}(0) = \frac{2 E_0}{x \Re_e} \cdot \frac{\Omega \left(\frac{1 - \cos L}{\cos L} \right) + G'_0 + j G''_0}{\Omega \operatorname{tg} L - Q' - j Q'' - j \frac{2 \Omega^2}{\Re_e \cdot c}} \quad (9)$$

Um die numerische Rechnung einfacher durchführen zu können, ist es vorteilhaft, einen Leitwertparameter \mathfrak{Z}_e und die Funktionen d_1 , d_2 einzuführen. Es ist

$$\mathfrak{Z}_e = \mathfrak{Z}'_e + j \mathfrak{Z}''_e = \frac{2 \Omega^2}{c \cdot \Re_e} \quad (10)$$

$$d_1 = \Omega \frac{1 - \cos L}{\cos L} + G'_0 + j G''_0 \quad (11)$$

$$d_2 = \Omega \cdot \operatorname{tg} L - Q' + \mathfrak{Z}''_e - j (Q'' + \mathfrak{Z}'_e) \quad (12)$$

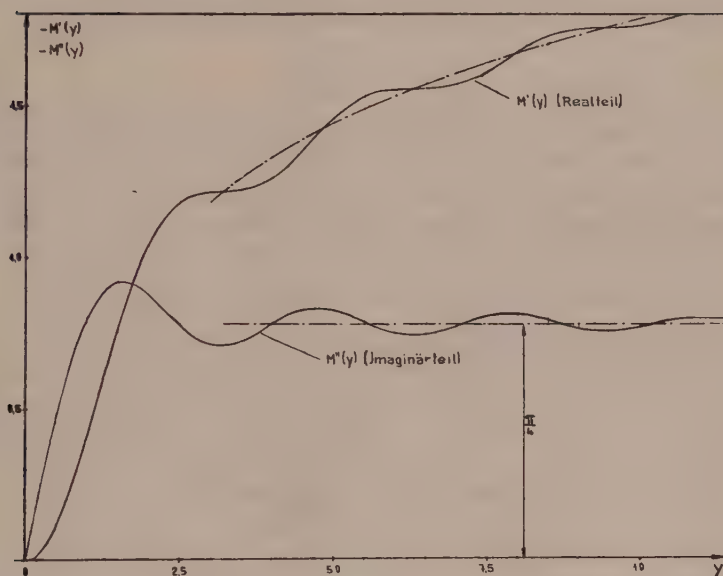


Fig. 1.

Funktion $M(y)$ mit Realteil M' und Imaginärteil M'' .

Der absolute Betrag des Antennenstromes mit der Empfängerimpedanz \Re_e wird

$$|\mathfrak{I}(0)| = \frac{2 E_0}{x |\Re_e|} \cdot \frac{|d_1|}{|d_2|} \quad (13)$$

Unbekannt sind in den Gl. (11) und (12) die Funktionen G'_0 , G''_0 , Q' , Q'' .

3. Berechnung der Funktionen $G_0(L)$, $Q(L)$ und $M(y)$,

$G_0(L)$ und $Q(L)$ setzen sich in der Hauptsache aus der Hilfsfunktion $M(y)$ Gl. (4), die mittels Funktionentafeln³⁾ berechnet werden kann, zusammen. Für bestimmte Verhältnisse l/λ der Wellenlänge λ der einfallenden Strahlung und der Antennenlänge l strebt die in Fig. 1 dargestellte Funktion $M(y)$ näherungsweise einem Grenzwert zu. Der Realteil nähert sich asymptotisch der Kurve des Logarithmus, während der Imaginärteil einen konstanten Wert annimmt. Demzufolge lassen sich zwei Bereiche mit verschiedenen Werten von G_0 und Q unterscheiden.

a) Bereich kleiner Antennenlängen.

Gilt die Ungleichung

$$0 < L \leq \sim 12 \quad (14)$$

aus der eine solche für die Antennenlänge l hervorgeht

$$0 \leq l \leq \frac{12}{2\pi} \lambda \quad (15)$$

so ist die Herleitung einer Näherungsgleichung für $M(y)$ nicht möglich. Man berechnet $M(y)$ mit Hilfe der Funktionentafeln³⁾. Die so ermittelten Werte in die Gl. 6, 7 eingesetzt, ergeben den Verlauf des Realteiles G_0' und des Imaginärteiles G_0'' nach Fig. 2.

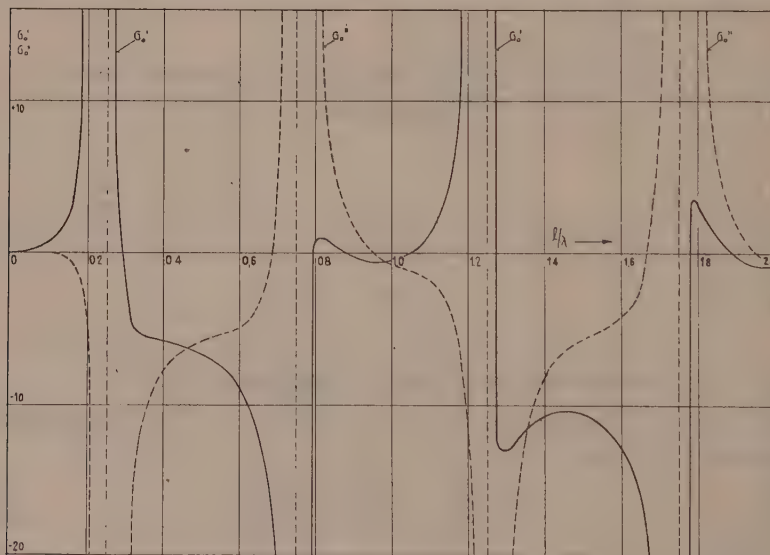


Fig. 2.

Verlauf von G_0' (Strichkurve), G_0'' (Strichpunktirt) in Funktion von l/λ .

Der Gang der Realteile Q' und der Imaginärteile Q'' sind in Fig. 3 dargestellt. $G_0(L)$ ist angenähert periodisch in 2π , $Q(L)$ in π . Nach Ungl. (15) ist die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches gegeben durch

$$\frac{l}{\lambda} \leq \sim 1,9 \quad (16)$$

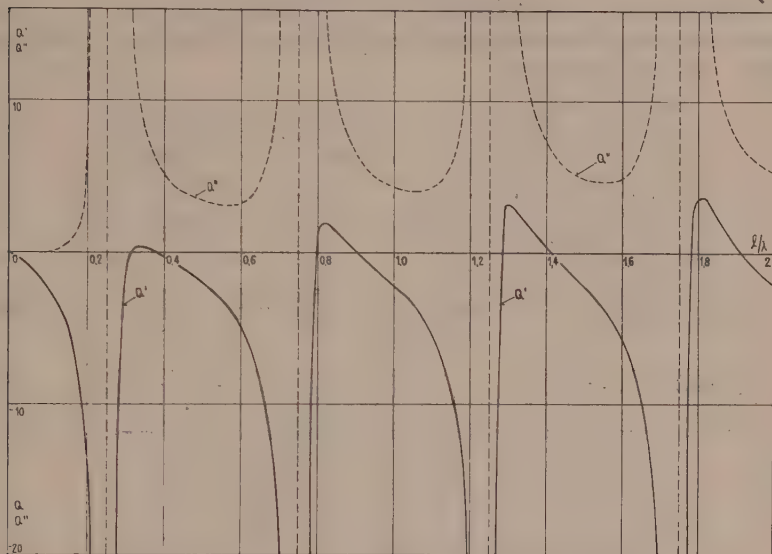


Fig. 3.

Verlauf von Q' , Q'' (punktiert) in Abhängigkeit von l/λ .

Der Strom $\mathfrak{J}(0)$ am Fusspunkt der Antenne in Abhängigkeit der Antennenlänge l bei gegebenem λ nach Gl. (9) lässt sich nach dem Einsetzen der aus den Kurven der Bilder 2, 3 abgelesenen Funktionswerte berechnen.

b) *Bereich grosser Antennenlängen.*

Ist

$$L > 10 \quad (17)$$

bzw. die Antennenlänge

$$l > \frac{10}{2\pi} \cdot \lambda \quad (18)$$

so kann die Hilfsfunktion $M(y)$ mit $y = L$, wie sie in Bild 1 dargestellt ist, durch die Näherungsgleichung

$$M(y) = -\frac{1}{2} \ln(2\gamma y) - j \frac{\pi}{4} \quad (19)$$

ersetzt werden. Für $y = L > 10$ strebt der Imaginärteil $Im(M(L))$

dem Grenzwert $\pi/4$ zu, während der Realteil in die logarithmische Funktion $\ln(2\gamma y)$ übergeht. Die maximalen Fehler $\Delta\delta_m$ bei Anwendung der Gl. (19) sind für:

$$L \sim 8; \Delta\delta_m < 3,2\%$$

$$L \sim 11; \Delta\delta_m < 2,3\%$$

$$L \sim 15; \Delta\delta_m < 1,0\%$$

Setzt man den Näherungswert Gl. (19) in die Gl. (6), (7) ein, entstehen die Beziehungen

$$G_0' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} L}{\cos L} + \ln \gamma L \left(\frac{3}{2 \cos L} - 2 \right) + \frac{0,6931}{\cos L} \quad (20)$$

$$G_0'' = \left(\frac{3}{4 \cos L} - 2 \right) \pi - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} L}{\cos L} \cdot \ln(4\gamma L) \quad (21)$$

$$Q' = -\operatorname{tg} L \cdot \ln(4\gamma L) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 L}{2} + \frac{3}{2} \right) \quad (22)$$

$$Q'' = 0,6931 + 1,5 \cdot \ln(\gamma L) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 L \cdot \ln(4\gamma L) - \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} L \quad (23)$$

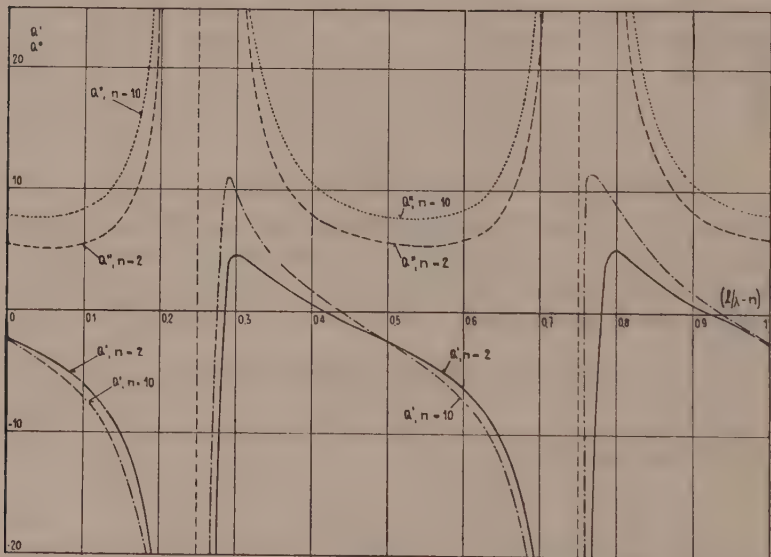


Fig. 4.

Verlauf von Q_0' , Q_0'' in Abhängigkeit von $l/\lambda - n$ mit dem Parameter $n = 2, 10$.

Der Gang des Realteiles G_0' und des Imaginärteiles G_0'' ist in Fig. 5, derjenige von Q' und Q'' in Fig. 4 dargestellt. In den Figuren 4, 5 ist der Abszissenmasstab komprimiert, indem man die Grösse n ,

welche eine ganze Zahl ist als Parameter einführt, die entsprechend der Bedingung, Gl. (18) der Ungleichung

$$n \geq 2 \quad (24)$$

gehört. Wie unter a), so sind die G_0 in 2π , die Q_0 in π periodisch. Die Werte zwischen $n = 2$ und 10 erhält man durch Interpolation. Ausgerechnete Kurven für $n = 4, 6, 8$ sind im Besitze der Autoren.

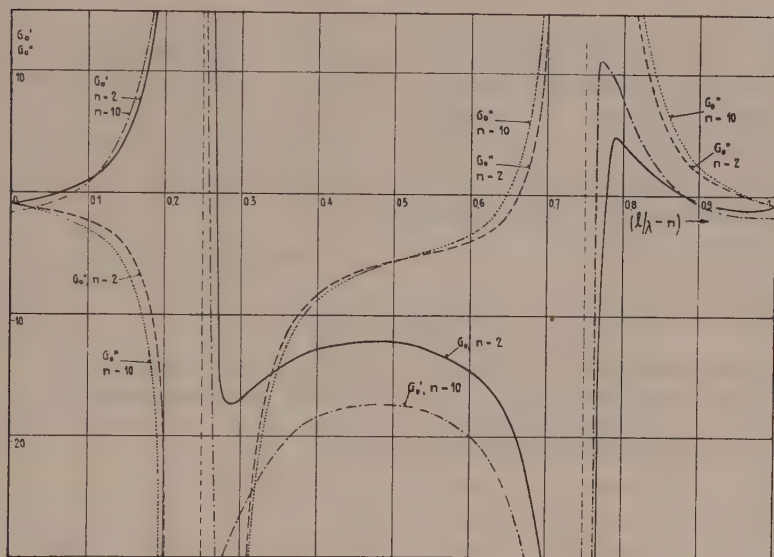


Fig. 5.

Verlauf von G_0' , G_0'' in Abhängigkeit von $l/\lambda - n$ mit dem Parameter $n = 2, 10$.

4. Antennenstrom.

Nachdem die Funktionen G und Q bekannt sind, ist es möglich geworden, den Strom $\mathfrak{J}(0)$ bei konstanter Längsfeldstärke zu berechnen, indem die Funktionen G_0 und Q bei einem gegebenen Verhältnis l/λ in die Gl. 9 bzw. 13 eingesetzt werden.

Den optimalen Antennenstrom wird man erhalten, wenn in Gl. 9 der Zähler gross und der Nenner klein wird. Eine exakte analytische Berechnung des Optimum ist nicht vorgenommen. Dagegen wird es nach Schätzungen im Bereiche

$$0,4 \leq (l/\lambda - n) \leq 0,6 \quad (25)$$

auftreten. Im Gebiet der Singularitäten bzw. Unendlichkeitsstellen

$$-0,1 \leq (l/\lambda - n) \leq +0,1 \quad (26)$$

ist die Funktion $\mathfrak{J}(0)$ unbestimmt, denn die Theorie ist in dieser Zone nicht oder nur grob genährt.

5. Zusammenfassung.

Es ist eine Formel für den Antennenstrom am Fusspunkt einer geraden Empfangsantenne entwickelt. Diese Antenne kann eine praktisch beliebige Länge gegenüber der Wellenlänge λ der einfallenden Strahlung besitzen. Die äussere Feldstärke längs der Antenne, also die des einfallenden Feldes, ist als konstant angenommen. Wollte man von dieser letzteren Einschränkung absehen, müssten nach Gl. 2 noch weitere Funktionen G_1, G_2 , die gleicher Art wie die bekanntgegebenen sind, berechnet werden.

Albiswerk Zürich A.G.

Literatur

- ¹⁾ J. MÜLLER-STROBEL, J. PATRY, *Helv. phys. acta* XVII (1944), S. 128.
- ²⁾ J. MÜLLER-STROBEL, J. PATRY, *TFT.* erscheint demnächst (1944).
- ³⁾ JANKE-EMDE, *Funktionentafeln*, Teubner 1938, S. 6. — *Brit. Assoc. Adv. Sc., Mathematical tables*, vol. I, London 1931.

Les lois expérimentales du nouvel effet mécanothersmoélectrique transversal¹⁾

par Alb. Perrier et A. A. Azad.

(22. IX. 1944.)

Sommaire. Etude expérimentale quantitative sur l'effet mécanoélectrique transversal prévu et découvert par l'un des auteurs.

On entretient dans des tubes de nickel et de fer un gradient thermique axial; lorsque ces tubes sont tordus, ils deviennent le siège de courants électriques dont les lignes d'écoulement sont normales aux génératrices du cylindre. Ces courants sont donc formés dans les cylindres mêmes. — Description des méthodes de mesure de leurs intensités qui atteignent l'ordre de $1/10$ Amp./cm² degré.

Ces courants (ou les forces électromotrices fictives auxquelles ils peuvent être attribués) se renversent avec la différence de température et avec le sens de la contrainte; les phénomènes sont réversibles pour autant que les déformations demeurent dans le domaine élastique. — La contrainte s'accroissant, leur intensité s'élève à la manière de l'aimantation ferromagnétique en fonction d'un champ; en particulier, elle tend vers une valeur limite (saturation).

Propriétés diverses, en particulier *thermoaimantation*; justification de l'origine magnétique supposée de l'effet.

§ 1. Le problème expérimental.

Dans des publications antérieures, l'un de nous²⁾ a fait prévoir qu'une série d'effets électriques doivent apparaître dans les conducteurs métalliques, lorsqu'on les soumet à des contraintes mécaniques en présence de gradients de potentiel, comme aussi de température.

Les phénomènes sont particulièrement intéressants dans les milieux ferromagnétiques; leur intensité doit y être d'ailleurs d'un ordre de grandeur beaucoup plus considérable et ils doivent s'y

¹⁾ La publication du présent mémoire a été considérablement retardée du fait de circonstances nées de la guerre. Les mesures relatées ici étaient terminées en 1940; un extrait de ces résultats a été exposé à Locarno devant la Société Suisse de Physique, le 29 septembre 1940. L'ensemble a fait l'objet d'une conférence à la Société Vaudoise des Sciences naturelles et au colloque de Physique de Lausanne en octobre 1943. On trouvera enfin plus de détails techniques dans une thèse de doctorat de A. A. Azad (Lausanne 1940).

²⁾ ALB. PERRIER: Groupe de phénomènes électriques et thermiques liés aux déformations élastiques et plastiques. Soc. Suisse de Physique 4, V. 1935 (Lausanne); H.P.A. v. VIII, p. 329. — *idem*: Observation de nouveaux effets translationnels des déformations sur la conduction métallique. Soc. Suisse de Physique 18, VIII, 1935 (Einsiedeln); H.P.A. v. VIII. 495.

manifeste même en l'absence de toute aimantation observable (aimantation au sens usuel du mot).

Une première investigation avait vérifié qualitativement les conséquences de la théorie (loc. cit. 1935) et des mesures systématiques étaient projetées dès cette époque; le présent travail relate une série de ces expériences quantitatives et les lois phénoménologiques qui les condensent. Une prochaine publication discutera ces résultats à la lumière de la théorie, les questions qu'ils lui posent et les rattachera à d'autres phénomènes (v. note ¹) p. 474).

Soit un corps assujéti à une contrainte uniforme descriptible dans un plan; si à la déformation l'on superpose des gradients soit de potentiel, soit de température (ou, si l'on veut, des nappes de courant d'électricité ou de chaleur) il doit donc apparaître des forces électromotrices dont les directions et sens varient avec les positions relatives des contraintes et des vecteurs.

Exp. 1. Les extrémités d'un fil rectiligne ferromagnétique (complètement désaimanté et en l'absence de tout champ) sont maintenues à des températures différentes; toute traction ou compression longitudinale entraîne une modification du pouvoir thermoélectrique qui *dure autant que la contrainte*.

Exp. 2. Les extrémités d'un cylindre droit à paroi mince de même matière et dans les mêmes conditions que sous 1 sont également maintenues à des températures différentes. Une torsion y fait apparaître simultanément et aussi longtemps qu'elle subsiste:

- a) une modification du pouvoir thermoélectrique axial (« effet longitudinal »);
- b) une force électromotrice normale aux génératrices, laquelle se manifeste par une nappe permanente de courant qui transforme le cylindre entier en un solénoïde (« effet transversal »).

Des phénomènes corrélatifs s'observent si l'on remplace dans les deux expériences le courant longitudinal de chaleur par un courant électrique, la température de l'éprouvette pouvant alors être uniforme.

Pour les effets transversaux, le mode d'observation sera analogue à celui des effets connus de HALL et de NERNST et v. ETTINGSHAUSEN; mais l'origine et les caractères de ces groupes de phénomènes diffèrent essentiellement, il importe de le souligner.

On s'en rend compte aisément en observant que les agents causes, ici la contrainte mécanique et les gradients, et les effets (manifestations électriques) sont tous parallèles à un même plan,

alors qu'en matière de magnétogalvanisme¹⁾, les causes, champs et gradients et les effets forment un trièdre, le plus souvent trirectangle.

Ainsi, ces systèmes physiques s'écartent par leur symétrie générale: on reconnaît dans les phénomènes magnétogalvaniques et magnétothermoélectriques des *aspects rotationnels*, tandis que ceux qui nous occupent ici sont essentiellement *translationnels*.

Le présent travail est consacré exclusivement aux forces électromotrices que l'on peut observer *normalement* à un gradient thermique formant un angle de 45° avec les directions principales d'extension et de compression d'une lame. Nous verrons plus loin pourquoi il nous paraît le plus caractéristique et le plus intéressant.

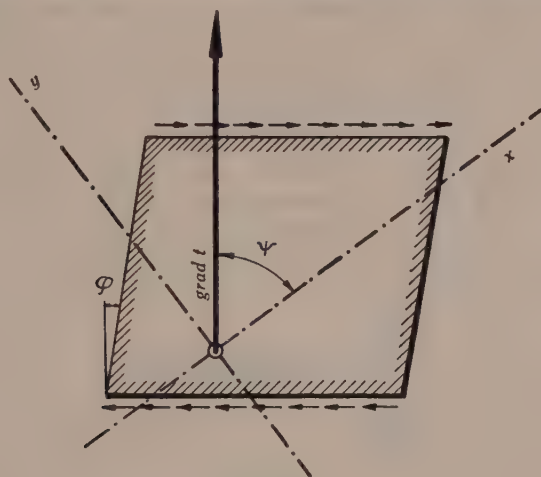


Fig. 1.

§ 2. Méthodes d'observation.

Le plus simple en principe serait d'appliquer à une plaque rectangulaire (fig. 1) un couple représenté par des forces égales et inverses agissant respectivement sur deux de ses bords opposés et parallèlement à eux, de maintenir de plus entre ces deux bords ou les deux autres des températures différentes. L'observation consisterait alors à déterminer à l'aide de sondes les différences de potentiel apparaissant entre des points situés sur une même ligne isotherme. cf. 2 b ci-dessus.

Nous avons préféré un tout autre procédé pour cette série de mesures. D'abord parce qu'il réalise et sépare d'une manière plus

¹⁾ Terme différent mais de formation plus correcte que celle des qualificatifs usuels « galvanomagnétique » et « thermomagnétique ».

pure les phénomènes élémentaires, ensuite parce que la mesure de la contrainte y est notablement plus aisée, et enfin parce qu'il conduit du même coup à la mise en évidence d'une thermoaimantation; phénomène qui, pour être subsidiaire, est intéressant par son caractère inattendu autant que par l'illustration des lois générales de symétrie qu'il représente, et dont l'existence avait été prévue dès les premières publications précitées.

La méthode mise en œuvre diffère de la première en trois points essentiels: d'une part en ce qu'au lieu d'une lame rectangulaire, on se sert d'un cylindre circulaire sollicité par un couple de torsion de moment coaxial, et de l'autre parce que l'on *n'observe pas une différence de potentiel* mais une *intensité de courant*, dont les lignes coïncident avec celles d'égale température. En effet, s'il subsiste bien entendu un gradient de potentiel axial, fonction lui aussi de la contrainte et du gradient thermique, tout gradient de potentiel transversal est exclu par nécessité de symétrie.

Et enfin, la mesure des potentiels par sondes est remplacée par l'observation électromagnétique des courants annulaires; cette mesure est confiée à un circuit *fluxmétrique* comprenant un balistique et une bobine installée coaxialement à l'intérieur du cylindre étudié. Chaque changement de torsion se manifeste alors au galvanomètre par une *élongation proportionnelle à l'intensité des courants recherchés*.

§ 3. Dispositifs.

Le choix des dimensions de l'échantillon à contraindre est imposé en première ligne par la condition *d'uniformité des déformations* si l'on veut déceler nettement les lois des phénomènes; ce qui implique une épaisseur de paroi faible devant le rayon des tubes. Tenant compte aussi des possibilités de mise en œuvre, on s'est arrêté à des tubes de 1 mm. d'épaisseur et de 25 mm. de \varnothing moyen. L'un et l'autre des bouts de ces tubes est rendu, par soudure, rigidement solidaire de deux forts boîtiers en laiton (fig. 2: B_1 , B_2) dont l'intérieur est aménagé thermostatiquement. Il s'agit en effet de maintenir les extrémités à des températures différentes et fixes; ce que l'on réalise par circulation de liquides: huile pour le côté chaud, eau pour le côté froid.

Dans chacune des boîtes, le fluide parcourt d'abord les quelques tours d'un serpentин métallique pour jaillir ensuite axialement contre une cloison C fermant le tube à quelque 2 cm. de son extrémité; après quoi, le liquide se répand d'abord dans une seconde enceinte intérieure, puis dans la première et sort enfin pour regagner le thermostat de réglage.

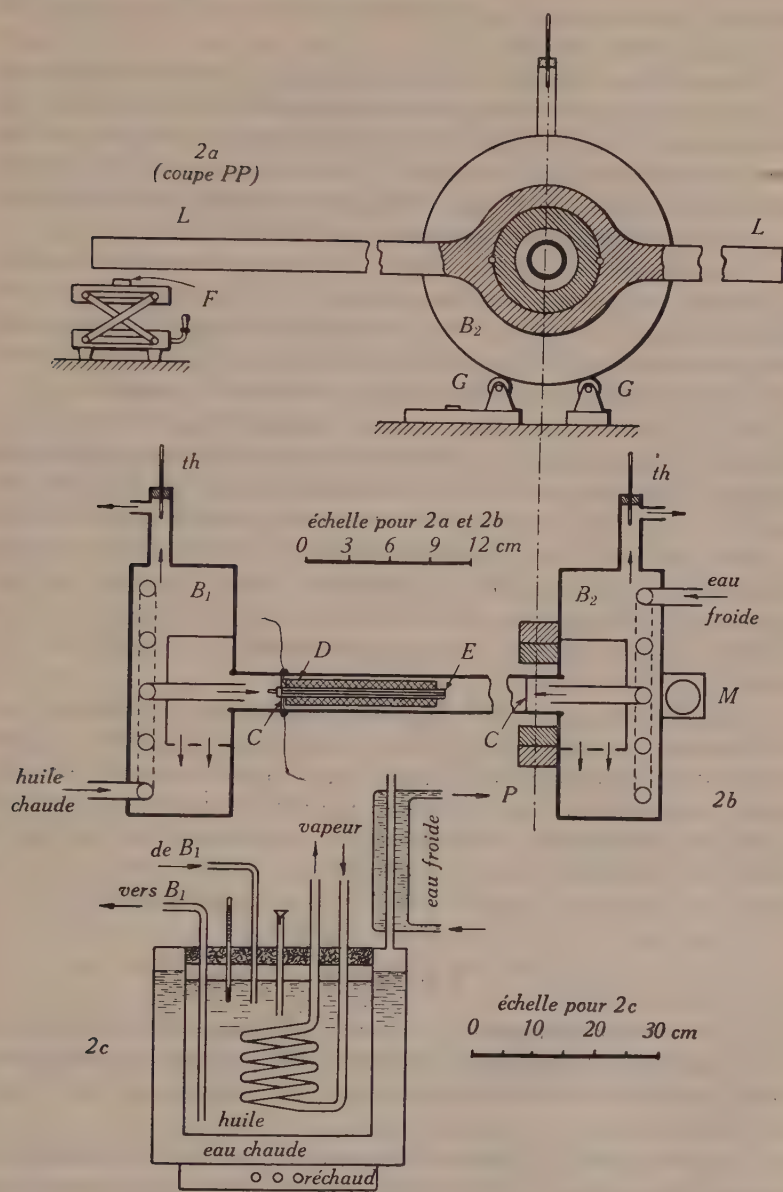


Fig. 2.

On reconnaît dans ce dispositif le principe des échangeurs à contre-courant; comme le volume des boîtiers est assez considérable, on gagne l'avantage très appréciable d'amortir les fluctuations thermiques de courte durée.

Mais à côté de leur fonction thermique, les deux boîtiers ont simultanément aussi celle d'*organes de contrainte*. A cette fin, l'un d'entre eux (côté chaud B_1) est amarré solidement à un fort plateau servant de socle à tout l'appareil; l'autre, B_2 porte deux bras de levier $L_1 L_2$ de quelque 80 cm. de longueur, opposés diamétralement et à l'aide desquels on commande les torsions.

Il est indispensable à la clarté des phénomènes que la matière ne subisse que ce type de contrainte, à l'exclusion de toute autre, de *flexion* singulièrement. C'est pourquoi le boîtier tout entier est assujéti à exécuter seulement des rotations autour de l'axe commun par roulement sur 4 galets G.G. solidaires du socle.

On appliquait les efforts sur les bras de levier directement à la main, les amplitudes angulaires étaient délimitées pour chaque mesure par des butoirs réglés micrométriquement. La grandeur des angles se lisait sur une échelle à 2 mètres, à l'aide d'un spot que projetait un miroir M solidaire du boîtier tournant. L'huile chaude parcourait un circuit fermé comprenant outre le boîtier B_1 , une pompe et un thermostat à vapeur d'eau avec chauffage électrique complémentaire; la fig. 2c nous dispensera de description plus détaillée.

L'eau froide, extrémité B_2 , était empruntée directement à la distribution générale du bâtiment. Pour la fixer rapidement à une température constante de $1/10$ de degré près et cela durant plusieurs heures, il suffisait d'ouvrir d'autres robinets encore. Pour l'huile, les fluctuations de température ne dépassaient pas $2/10$ de degré. Eu égard aux autres incertitudes, il était superflu de faire appel des réglages plus perfectionnés et partant, plus délicats.

§ 4. Mesures.

a) *L'effet proprement dit.* — Sa détermination se ramène ici à celle des champs magnétiques axiaux créés à l'intérieur de l'échantillon dont nous avons remarqué que les courants de l'effet font un solénoïde.

Les évaluations théoriques appuyées par les premières expériences montraient que nos champs ne dépasseraient guère le $1/10$ d'OERSTED; les conditions sont donc assez sévères de leur mesure par induction. Aussi avons-nous fait usage d'un balistique perfec-

tionné, construit au laboratoire même pour des recherches antérieures par M. J. GILBERT¹⁾.

La bobine induite de son côté a été constituée de 11.310 tours répartis en 26 couches sur une longueur de 12 cm. entre des diamètres de 8,0 et 21,3 mm. De plus, la sensibilité a été considérablement élevée encore en garnissant l'espace cylindrique libre à l'intérieur par un faisceau de fils de *permalloy*.

L'échelle du galvanomètre a été étalonnée en intensités par unité de longueur du cylindre d'essais, ce qui veut dire en chiffres exprimant directement le phénomène mécano-thermoélectrique lui-même que l'on étudiait.

Cet étalonnement s'effectue ainsi: une couche de spires a été bobinée ad hoc sur l'extérieur de l'échantillon; elle constitue ainsi un solénoïde dont le nombre de tours par centimètre a été soigneusement déterminé. Parcourue par un courant connu, elle établit dans la bobine d'exploration un champ magnétique que l'on substitue à volonté et en tout temps à celui des courants mécano-thermoélectriques: l'intensité par cm. de ceux-ci est alors rapportée sans intermédiaire autre que celui du galvanomètre à la grandeur correspondante connue du solénoïde extérieur.

b) *Parasites*. — Il convient d'observer qu'il entre dans l'étalonnement comme dans la mesure proprement dite le champ des bouts des tubes (champ démagnétisant des pôles annulaires); or, ces pôles ne sont pas identiques pour le courant d'étalonnement et pour le courant effet; le premier, entièrement extérieur, agit en plein sur toute l'épaisseur du tube, le second, réparti uniformément dans cette épaisseur, n'agit en plein qu'à la face intérieure. Nous avons évalué que l'incertitude absolue introduite dans l'étalonnement par la différence de ces deux modes d'action n'atteint pas $\frac{1}{2}\%$, ce qui est nettement en-dessous de la précision que les expériences permettent.

D'autre part, s'il subsiste dans les tubes en essai une *aimantation observable*, quelle que soit d'ailleurs son origine, toute déformation la modifie et provoque de ce fait des forces électromotrices *magnétothermoélectriques*, lesquelles agissent sur le circuit fluxmétrique de la même manière que l'effet cherché et pourraient ainsi en fausser complètement même l'ordre de grandeur.

Pour parer aux erreurs considérables qui pourraient ainsi être commises, il est indispensable de désaimanter les échantillons avec un soin minutieux et avant chaque mesure. Au degré qu'il est

¹⁾ J. GILBERT: Méthode rapide pour l'étude des galvanomètres balistiques en circuit fermé. H.P.A., v. XI (1937), p. 106.

nécessaire d'atteindre, cette opération est malaisée. Elle s'exécute à l'aide de courants alternatifs dont on fait décroître l'intensité très progressivement et à plusieurs reprises jusqu'à des valeurs extrêmement faibles. L'équipement très pratique utilisé à ces fins est d'usage courant ici et a été décrit ailleurs¹⁾.

L'action parasite du champ terrestre peut aussi être considérable. On l'a réduite à une mesure inoffensive en installant les tubes en permanence normalement au méridien magnétique du lieu. On pouvait d'ailleurs contrôler en tout temps le degré d'extinction des parasites magnétiques. Ce, en procédant à des expériences à blanc, à température uniforme et à l'aide de la bobine d'étalonnage comme bobine induite. La coïncidence des résultats obtenus après intercalation de nouvelles désaimantations était d'ailleurs elle-même aussi une garantie.

c) *Les échantillons.* Les expériences rapportées ici ne concernent que deux échantillons: du nickel Mond (à 99% environ) et du fer Armco (très pur). Tous deux ont été amenés par tournage et alésage à la forme de cylindres de diamètres extérieur et intérieur 26 et 24 mm. de longueur 400 mm. On est parti pour le nickel de tôle plane enroulée et soudée à l'autogène; le fer était reçu directement en tube du fournisseur. La dernière taille a été précédée de recuits prolongés. D'autres essais ont été exécutés préalablement avec des échantillons divers; ils corroborent les présents résultats dans les limites de leur certitude.

§ 5. Mode opératoire et limites de certitude.

Voici la marche normale d'une série de mesures. L'échantillon étant encore encore à température uniforme, il est désaimanté. Puis on observe des élongations apparaissant au balistique lors de torsions, d'amplitudes égales à celles des mesures proprement dites et dans les deux sens. Ces élongations, de l'ordre du $\frac{1}{100}$ au plus de celles de l'effet, c'est-à-dire très faibles ont été notées et l'on en a corrigé les lectures subséquentes.

Ensuite on met en marche les circulations thermostatiques et on attend jusqu'à l'établissement d'un gradient thermique fixe (durée de l'ordre de 30 min.).

Pour chaque angle choisi, on observe les élongations correspondant à l'ordre suivant: torsion, détente, torsion inverse, détente; le même cycle est répété une dizaine de fois.

¹⁾ T. KOUSMINE: Forces électromotrices thermoélectriques dues à l'aimantation. H.P.A., v. VII (1934), p. 746.

Pour ne pas détériorer les échantillons les mieux étudiés, les contraintes ont été pour eux *limitées au domaine élastique* (cf. § 7b). Une petite étude jusqu'aux déformations plastiques avait été faite préalablement sur des échantillons sacrifiés. La constatation systématique de l'identité numérique des effets de la torsion et de la détente était le meilleur des contrôles de la réversibilité des déformations.

Des fluctuations appréciables se manifestaient d'un groupe de lectures à l'autre, mais toutefois sans aucun aspect systématique. Avec le fer, nous avons relevé une dissymétrie systématique entre la gauche et la droite; nous y reviendrons plus loin.

Nous évaluons la précision moyenne atteinte à 1% pour le nickel, 2 à 3% pour le fer dans lequel les phénomènes sont notablement plus faibles.

§ 6. Résultats.

L'essentiel en est consigné aux Tableaux I et 2 et représenté par les courbes fig. 3 et 4.

Pour les lire, on se reportera à la légende suivante:

α = torsion réelle en radians par cm. de longueur du cylindre.
 φ = angle de glissement correspondant, soit déformation angulaire.

I = intensité entretenue normalement aux génératrices, rapportée au centimètre de longueur axiale.

t.g. = pour torsion à gauche.

t.d. = pour torsion à droite.

g.d. = valeur moyenne de gauche et droite.

E = force électromotrice correspondante (calculée).

J = densité de courant normale aux génératrices, rapportée à l'unité de gradient thermique.

\mathcal{E} = Champ normal aux génératrices qui entretiendrait cette densité de courant, soit f.e.m. par cm. périphérique, rapportée à l'unité de gradient thermique.

Pour interpréter tableaux et courbes, il importe de ne pas perdre de vue que le phénomène immédiat, l'effet réel, est une nappe de courants circulaires et que sa mesure directe est celle de leur intensité moyenne par unité de longueur axiale, le nI classique des solénoïdes, soit leur force magnétomotrice par unité de longueur. On en tire le vecteur densité moyenne J en divisant par l'épaisseur de la pellicule de courant qui est celle même de la paroi du cylindre. De là, on a calculé la » force électromotrice « par centimètre de circuit périphérique moyen du cylindre, en multipliant par la ré-

Tableau.

α rad/cm	φ		I en A/cm.			E Volt	J A/cm ² degré	\mathcal{E} V/dégré
	en radians	en minutes	t. g.	t. d.	g. d.			
<i>1. Fer</i>								
2,50·10 ⁻⁴	3,15·10 ⁻⁴	1,10	1,94·10 ⁻³	2,02·10 ⁻³	1,97·10 ⁻³	1,55·10 ⁻⁶	0,99·10 ⁻²	0,99·10 ⁻⁷
3,75	4,70·10 ⁻⁴	1,60	2,74·10 ⁻³	3,60·10 ⁻³	3,17·10 ⁻³	2,49	1,58	1,58
5,60	7,00	2,40	3,82·10 ⁻³	5,77	4,79	3,76	2,39	2,39
7,50	9,40	3,25	4,61	6,35	5,48	4,30	2,74	2,74
10,00	12,50	4,30	5,18	7,56	6,34	4,98	3,17	3,17
12,50	15,60	5,35	5,40	7,98	6,70	5,26	3,35	3,35
17,00	21,30	7,35	5,62	8,48	7,06	5,54	3,53	3,53
21,00	26,30	9,05	5,62	8,48	7,06	5,54	3,53	3,53
24,00·10 ⁻⁴	30,00·10 ⁻⁴	10,35	5,63·10 ⁻⁴	8,48·10 ⁻³	7,06·10 ⁻³	5,54·10 ⁻⁶	3,53·10 ⁻²	3,53
<i>2. Nickel</i>								
0,70·10 ⁻⁴	0,90·10 ⁻⁴	0,30	1,6·10 ⁻³	1,2·10 ⁻³	1,4·10 ⁻³	0,86·10 ⁻⁶	0,69·10 ⁻²	0,54·10 ⁻⁷
1,25	1,65	0,55	5,5	6,35	5,9	3,64	2,93	2,32
1,75	2,20	0,75	7,95	8,5	8,2	5,04	4,07	3,17
2,25	2,80	0,96	10,65	10,75	10,7	6,57	5,28	4,12
3,50	4,40	1,50	14,7	14,4	14,5	8,92	7,18	5,60
4,50	5,65	1,95	16,0	16,5	16,2	9,94	8,00	6,25
6,25	7,80	2,70	18,7	18,7	18,7	11,46	9,24	7,20
7,50	9,40	3,25	19,7	19,8	19,7	12,10	9,73	7,60
8,75	10,95	3,75	20,4	20,8	20,6	12,60	10,16	7,92
10,00	12,55	4,30	20,7	20,1	20,8	12,84	10,33	8,06
11,20	14,00	4,80	20,8	21,2	20,9	12,85	10,34	8,07
12,50·10 ⁻⁴	15,65·10 ⁻⁴	5,35	20,8·10 ⁻³	21,2·10 ⁻³	20,9	12,85	10,34·10 ⁻²	8,07·10 ⁻⁷

sistivité et on a ramené enfin cette force électromotrice à ce qu'elle serait avec un gradient thermique axial de 1 degré/cm.

Cette dernière grandeur (\mathcal{E}) qui n'est pas dimensionnellement un champ électrique a été consignée dans la dernière colonne des tableaux aux fins de traduire nos résultats dans la terminologie classique et de faciliter ainsi les comparaisons.

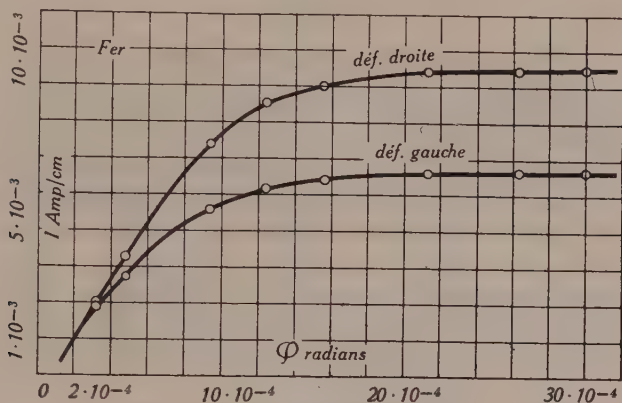


Fig. 3 (Fer).

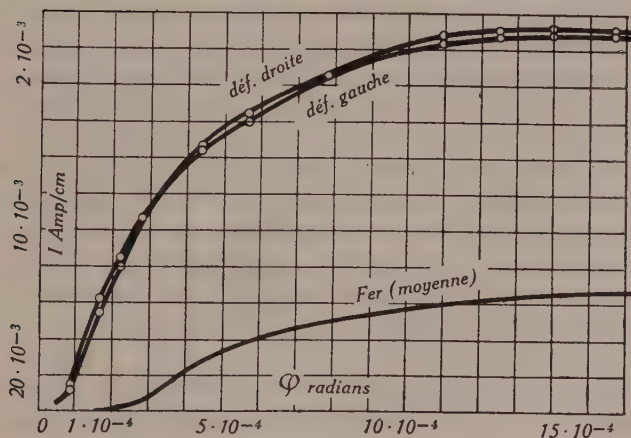


Fig. 4 (Nickel).

Mais nous tenons à relever expressément que le passage de J , qui symbolise sans ambiguïté un phénomène réel, à la force électromotrice qui en serait la cause comporte une part considérable de convention.

Il n'existe en effet tout au long des lignes de courant circulaires ni champ électrique, ni corrélativement de différence de potentiel, le champ électrique calculé est celui qui entretiendrait la même densité de courant dans un milieu isotrope et à température uniforme, il est donc fictif. L'un de nous a introduit et développé autrefois ces conceptions à propos notamment de magnétogalvanisme, et il y reviendra dans un prochain article¹⁾.

§ 7. Sens général des effets.

Règle qualitative générale. Des raisons de symétrie imposent de toute évidence que les courants mécano-thermoélectriques, quelles que soient d'ailleurs leurs lois quantitatives, doivent se renverser tant avec la contrainte mécanique qu'avec le gradient de température, si en l'absence de toute contrainte le milieu est homogène et isotrope.

Expérimentalement, le sens se fixe aisément en même temps que l'on étalonne à l'aide du solénoïde auxiliaire; nous avons vérifié ce sens à maintes reprises; voici la règle très simple qui le régit, et qui s'applique au nickel comme au fer.

Pour discriminer sans ambiguïté le sens des contraintes, lions-les aux hélices (vis) que dessinent les fibres de plus grande extension; et nous parlerons de *torsions à droite* si ces fibres figurent une vis à droite, de *torsions à gauche* dans le cas inverse. Référons de plus le gradient thermique parallèle à l'axe ou aux génératrices du cylindre au sens de *translation* arbitraire de chacune des vis; on constate alors que: *les courants qui accompagnent la déformation hélicoïdale élastique ont, dans tous les cas le sens de la rotation qui ferait avancer la vis dans le sens du gradient thermique*, donc des températures ascendantes. La règle est bien entendu la même pour les forces électromotrices fictives qui entretiendraient de tels courants. Elle est illustrée par la fig. 5. On pourrait aisément l'adapter aussi au phénomène élémentaire provoqué dans un rectangle déformé; on verra dans le travail annoncé qu'elle est conforme à ce que la théorie fait prévoir.

Pour le *nickel*, on constate sur le tableau et les courbes que le renversement de la torsion implique le renversement de l'effet à peu près dans les limites de précision et pour toutes les contraintes atteintes. Il n'en est pas de même dans le *fer* où se manifeste une dyssymétrie très sensible, mais toutefois dans la même proportion sur l'intervalle entier des contraintes fortes.

¹⁾ A. PERRIER: Interprétation et liaison des effets électriques de déformation et d'aimantation. Dans un prochain fascicule de ce recueil.

Règle quantitative générale. — Variations avec l'intensité de la contrainte et mécanisme du phénomène. On se convainc du premier coup d'œil donné aux courbes que la dépendance entre la contrainte (ou la déformation pour autant que la loi de Hooke est applicable) et l'intensité des phénomènes (J ou \mathcal{E}) est *très loin d'être une loi de proportionnalité*.

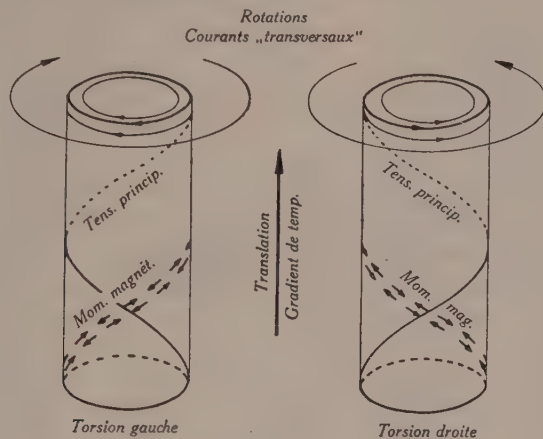


Fig. 5.

Abstraction faite même de toutes vues théoriques, il ne peut donc s'agir ici d'un phénomène lié de manière immédiate au tenseur de déformation. Ces courbes affirment d'emblée une remarquable parenté avec *celles de l'aimantation ferromagnétique*. Un de leurs caractères essentiels, la tendance vers la saturation, s'y accuse même avec une particulière netteté.

Nous avons remarqué d'ailleurs que des déformations pourraient provoquer des effets du même type général mais qui leur seraient proportionnels. Il en serait sans doute ainsi dans des métaux non ferromagnétiques; ce pourrait être aussi le cas de ces derniers mais sous des contraintes assez fortes pour dépasser la « saturation ». Toutefois l'ordre de grandeur numérique serait, dans ces circonstances, incomparablement plus faible, et en tout cas hors des possibilités d'observation de l'équipement utilisé ici.

Au surplus, on ne dispose pas, tant s'en faut, dans le domaine des actions mécaniques, de la latitude de variation des causes qui est propre au magnétisme. On est étroitement bridé par *les limites d'élasticité*. Voici à ce sujet quelques données relatives à nos expériences sur le fer et le nickel. Des essais préalables ont été effectués pour fixer la limite des efforts ne produisant pas de déformation rémanente et nous n'avons jamais dépassé cette limite sur les éprou-

vettes auxquelles se rapportent nos tableaux. Cela est, bien entendu, nécessaire si l'on veut pouvoir répéter les expériences avec des corps demeurant identiques à eux-mêmes.

Les limites, qui correspondent à peu près aux torsions maximums des tableaux sont, σ_c et σ_e désignant respectivement les tensions principales de cisaillement et d'extension:

Nickel	$\sigma_c < \underline{\hspace{1cm}}$	12 kg. par mm ²
	$\sigma_e < \underline{\hspace{1cm}}$	15 kg. par mm ²
Fer	$\sigma_c < \underline{\hspace{1cm}}$	24 kg. par mm ²
	$\sigma_e < \underline{\hspace{1cm}}$	30 kg. par mm ²

Dans le domaine des *déformations rémanentes*, des phénomènes du même type se manifestent et sont alors eux-mêmes, cela va de soi, persistants. Nous l'avions vérifié il y a longtemps déjà par des expériences qualitatives. Mais ils sont évidemment beaucoup plus complexes et nous n'en avons pas poursuivi l'étude jusqu'ici; notre but étant d'établir avant tout des lois *réversibles*, dont l'interprétation théorique soit accessible et fructueuse. C'est ce qui sera examiné dans le prochain article de ce recueil, où l'origine proprement magnétique de ces phénomènes sera mise en relief. Relevons cependant ici déjà quelques particularités purement expérimentales qui justifient de façon indubitable l'hypothèse de cette origine ferromagnétique.

1. A côté de la parenté avec les courbes d'aimentation déjà relevée plus haut, l'ordre de grandeur numérique lui-même des forces électromotrices observées est le même que celui des forces électromotrices d'aimantation.

2. *En tentant ces mêmes expériences en présence d'un champ magnétique extérieur parallèle à l'axe des tubes et suffisamment intense, on n'observe plus rien, les déformations n'ont plus d'effet.*

Observons enfin que nos résultats établissent du même coup la réalité du phénomène de la *thermoaimantation*. En effet, le noyau de permalloy, auxiliaire de la mesure, s'aimante lorsqu'on tord le tube échantillon, et le tube lui-même doit le faire dans la mesure où sa susceptibilité initiale le lui permet. Il en ressort donc tout aussi bien qu'un barreau compact de nickel par exemple que l'on aura tordu au delà de sa limite d'élasticité *s'aimantera spontanément chaque fois que l'on chauffera l'un de ses bouts* et que cette aimantation dont le sens est fixé une fois pour toutes par celui de la déformation se renversera lorsqu'on chauffera l'autre bout.

Laboratoire de physique de l'Université de Lausanne.



M. Wehrli.

PROF. DR. MAX WEHRLI

30. Juni 1896 bis 31. August 1944

Prof. Max Wehrli hat kaum je an den Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft gefehlt, meist hat er selber durch ein Referat oder ein lebhaftes Votum zur Diskussion beigetragen. So steht seine Gestalt uns noch in naher Erinnerung und wir empfinden grossen Schmerz, ihn nun ganz plötzlich zu den Toten zählen zu müssen. Wenn schon die *Helvetica Physica Acta* selbst ein lebendiges Zeugnis für sein Wirken bilden — fehlen doch in keinem der bisherigen Bände Arbeiten von seiner Hand —, so wird es doch am Platze sein, auch einige biographische Notizen darin aufzunehmen, die die Forschungsarbeit und das Lebenswerk zusammenfassen, dabei aber auch den Forscher selbst und sein Leben zu zeichnen versuchen.

Wehrli's Arbeiten waren zwei Spezialgebieten der Physik gewidmet, dem elektrischen Lichtbogen und der Molekülspektroskopie. Schon seine 1922 in den *Ann. d. Phys.* erschienene Zürcher Dissertation „Funkentpotentiale im transversalen Magnetfelde“ behandelte eine Frage der Gasentladungen, die dem Problemkreis seines Lehrers Prof. Edg. Meyer entstammte. Von 1923 an, dem Jahre, in dem sein Wirken an der Physikalischen Anstalt der Basler Universität beginnt, finden wir eine lange Reihe von Publikationen, zuerst in der *Zeitschr. f. Phys.*, dann mit deren Gründung in den *Helv. Phys. Acta*, welche alle experimentelle Untersuchungen oder theoretische Abhandlungen zum elektrischen Lichtbogen bilden. Im Anschluß an Arbeiten von Prof. A. Hagenbach und teilweise auch in Zusammenarbeit mit ihm befassen sie sich zunächst mit den verschiedenen Formen des offenen Kohlebogens. Erst der Übergang zum Wolfram-Stickstoff-Bogen schaffte saubere, reproduzierbare Verhältnisse, indem

in einer extrem reinen Stickstoffatmosphäre weder die Elektroden aus Wolfram noch das Gas durch den Betrieb des Lichtbogens eine Veränderung erleiden. So gelang es Wehrli vollständige Charakteristiken aufzunehmen, die Glimm- und Bogenentladung einschlossen; er konnte mittels Wolframsonden im Innern des Bogens Raumpotentiale messen und die Struktur der Elektronengruppen feststellen. Exakte Temperaturmessungen, darunter solche der Temperaturverteilung auf den Elektroden gestatteten die Prüfung von Energiebilanzen, welche aus eingehenden Theorien der Vorgänge an Anode und Kathode erhalten wurden. Diese Arbeiten, die zum Teil mit Mitarbeitern, insbesondere P. Bächtiger und mit Doktoranden ausgeführt wurden, dauerten bis ins Jahr 1932 und haben in den neueren monographischen Darstellungen, so z. B. bei Seeliger im Hdb. d. Exp. Phys. volle Würdigung gefunden.

Im Jahre 1932 wandte sich das Interesse Wehrlis der Spektroskopie zu, einem Gebiete, das seit Balmers Entdeckung in Basel gepflegt worden ist, und für das A. Hagenbach ein schönes Instrumentarium geschaffen hatte. Es war zu jener Zeit eine kleine Anzahl Basler Physiker in das neue große Institut zurückgekehrt, angezogen von dem allzeit unternehmungslustigen Wehrli, der damals auf dem Höhepunkt seiner Schaffenskraft stand. Die erste Frucht gemeinsam begonnener Arbeiten waren Untersuchungen zu den Bandenspektren zweiatomiger Moleküle, der Halogenide von Gallium und Indium, die eine systematische Bearbeitung erfuhren. Neben manchen neuartigen Zügen in den, bis in die Einzelheiten einer theoretischen Deutung zugänglichen Erscheinungen der Bandenspektren wurde das bisher unbekannte Indium-Isotop 113 auf optischem Wege gefunden. In den folgenden Jahren dehnte Wehrli seine Untersuchungen auf die Spektren mehratomiger Moleküle aus, er suchte nach den recht seltenen, diskreten scharfen Bandenspektren und fand in den Dämpfen von TeCl_2 und HgCl_2 Beispiele, die er gründlich untersuchte und mit den theoretischen Forderungen verglich. Er baute für diesen Zweck einen grossen Vakuum-spektrographen, der dann auch in einer, unter Wehrlis Leitung entstandenen Doktorarbeit zu einer interessanten Ausdehnung der Problemstellung auf die Mischmoleküle der Quecksilberhalogenide benützt wurde.

Es waren weiterhin spezielle Fragen der chemischen Bindung, die Wehrli zu Messungen auch im ultraroten Spektralgebiet veranlassten, so der Nachweis von Kettenschwingungen der C-Gerüste in Dikarbonsäuren im festen Zustande. Seine letzte grössere Arbeit ist in den *Helv. Chim. Acta* erschienen und befasst sich mit der modellmässigen Deutung der Dissoziationsprozesse.

Den beiden hier kurz skizzierten Problemkreisen sind auch die zahlreichen Themata entnommen, die als Dissertationen von Schülern Wehrlis erschienen sind.

Die äusseren Lebensdaten Wehrlis sind die folgenden: Er wurde geboren am 30. Juni 1896 als Sohn des Staatsschreibers J. Wehrli-Huber in seiner Heimatstadt Frauenfeld, durchlief daselbst die Schulen, studierte dann 1916 Maschineningenieur an der ETH. und von 1919 an Physik an der Zürcher Universität, wo er auch 1922 doktorierte. Noch im selben Jahre kam er als Assistent von Prof. Hagenbach nach Basel an die Physikalische Anstalt. 1924/25 verbrachte er ein Jahr in Pasadena im Laboratorium Prof. Millikans. Im Jahre 1928 erfolgte seine Habilitation in Basel, 1934 wurde er zum ausserordentlichen, 1942 zum ordentlichen Professor befördert, gleichzeitig erhielt er in der Physikalischen Anstalt eine eigene Abteilung für Spektralphysik. Die Schweizerische Physikalische Gesellschaft wählte ihn für die Periode 1938—1940 zu ihrem Präsidenten. Im Jahre 1934 verheiratete er sich mit Margrit Lutz aufs glücklichste, seinen Söhnen war er ein liebevoller Vater. Eine schwere Erkrankung suchte ihn im Jahre 1938 heim, von der er sich zwar erholte, deren Schatten aber bis zu seinem Tode nicht mehr von ihm wichen.

Wehrli war ein unermüdlicher und hochstrebender Forscher, eine tiefe Liebe zur Physik war ihm eigen, er war gleichermassen interessiert an den wenigen grossen Problemen der Theorie wie an den tausend Künsten der Laboratoriumspraxis. Es war ihm ein Bedürfnis, Ordnung in allen Dingen, auch im Denken zu halten. Er hielt am Glauben an einen systematischen Aufbau und an eine ebensolche Entwicklung der Physik fest, er schlug gerne eine neue Erkenntnis zum festen Wissensbestand und erhoffte viel vom Fortschritt für die Wissenschaft und für sich selber. So ist

er von jugendlichem Geiste geblieben, unternehmungslustig und damit auch anregend für seine Schüler und Freunde. Er diskutierte gern und vertrat seine Ansichten in Fachfragen zuweilen mit Leidenschaft, doch verlangte er auch von den andern eine feste Stellungnahme; er war begierig, Geister zu finden, die ihm in Problemen, die er selber nicht meistern konnte, helfen sollten.

Wehrli hat zur Entwicklung der Basler Physikalischen Anstalt Entscheidendes beigetragen. Er wäre dazu berufen gewesen, die Spektroskopie, die immer mehr Eingang auch in die Industriebetriebe findet, weiterhin zu fördern; er war im Begriffe, seine Abteilung auszubauen und reiche Mittel standen ihm zur Verfügung. Sein plötzlicher Tod im Alter von erst 48 Jahren hat diese Aussichten zerstört.

Wer Wehrli näher kannte, hat hinter einer manchmal spröden Schale einen lautereren, fröhlichen Charakter gefunden. Wehrli hatte manche originelle, aber auch so viele menschliche Züge in seinem Wesen, so dass seine Freunde und Schüler stark an ihm hingen und ihn auch noch lange betrauern werden.

E. Miescher.

Innere Spannungen in Aluminium-Legierungen.

Von R. Fichter.

(25. IX. 1944).

Eine Veröffentlichung über diesen Gegenstand stammt von A. v. ZEERLEDER¹⁾. Sie entstand auf Grund von Untersuchungen, die er in den Jahren 1935—1938 zusammen mit M. BOSSHARD und E. HÄNSLER durchgeführt hatte. Damals wurde hauptsächlich über den Einfluss der Aushärtungsbedingungen auf die inneren Spannungen in der Aluminiumlegierung Avional²⁾ berichtet. Es wurde die Abkühlzeit nach dem Glühen, die Art und die Temperatur des Abschreckmittels variiert. In der vorliegenden Arbeit wurden diese Versuche weitergeführt und ausgebaut und bei der Auswertung als Mass des Spannungszustands die Formänderungsarbeit eingeführt. Zur Berechnung der Spannungen werden Abänderungen der bekannten Verfahren angegeben³⁾.

1. Wesen der inneren Spannungen.

Innere Spannungen — auch Eigenspannungen genannt — treten insbesondere nach inhomogener Verformung eines festen Körpers auf. Die Verformung kann dabei mechanisch (z. B. Biegung) oder auf andere Weise (z. B. verschieden starke Abkühlung der einzelnen Partien eines Körpers) erfolgt sein.

Wird ein Werkstück durch eine Spannung ungleichmässig belastet, so dass das Material nicht nur elastisch, sondern darüber hinaus plastisch beansprucht wird, so erscheint nach der Entlastung derjenige Teil der Spannung, der durch die plastische Verformung kompensiert wurde, mit umgekehrten Vorzeichen als Eigenspannung. Die Belastung und die Verformung müssen also *inhomogen* sein, damit die gewöhnlichen Eigenspannungen „erster Art“ (s. u.) auftreten können. Bei *homogener* Beanspruchung würden sich alle Spannungen ausgleichen, sofern der betrachtete Körper eine homogene Struktur besitzt.

¹⁾ Journ. Inst. Metals **67**, 87 (1941).

²⁾ Geschützte Wortmarke.

³⁾ Vorbericht s. FICHTER, Helv. Phys. Acta **16**, 422 (1943).

Da bei einem vielkristallinen Stück auch bei homogener äusserer Beanspruchung im Innern ungleichmässige Spannungen auftreten können und da ein solches Stück u. U. nicht überall gleich gut verformbar ist (s. Reckspannungen), gibt es praktisch stets innere Spannungen.

Nach der Grösse der Bereiche, in welchen sie sich nicht merklich ändern, kann man die Eigenspannungen einteilen¹⁾:

Spannungen erster Art oder grobelastische Spannungen sind über Gebiete von der Grössenordnung 1 mm oder darüber konstant. Als Ursachen sind Volumenänderungen beim Abschrecken (Abschreckspannungen), Verspannung beim Strecken („Voreilen“) (Reckspannungen) und Schwindung beim Giessen (Gussspannungen) zu nennen. Als Folge der (homogenen) Reckung erwartet man eigentlich keine Eigenspannungen. Dass solche auftreten, ist bekannt, und wir konnten dies auch in unseren Versuchen bestätigen (s. Abschnitt 4f.).

Spannungen zweiter Art besitzen in makroskopischen Gebieten den Mittelwert Null und sind nur noch in mikroskopisch nicht mehr auflösbaren Bereichen konstant. Sie gehen hauptsächlich auf Biegegleitung des Werkstoffs zurück.

Spannungen dritter Art sind bereits in submikroskopischen Gebieten stark veränderlich. Nach DEHLINGER¹⁾ ist ihre Ursache hauptsächlich in der Korngrenzenbehinderung zu suchen.

Die Eigenspannungen zweiter und dritter Art fasst man zusammen unter dem Namen „Verborgene elastische Spannungen“, da sie mit den mechanischen Bestimmungsmethoden (s. unten) nicht, sondern nur in Röntgen-Strukturaufnahmen nachgewiesen werden können. Während die grobelastischen Eigenspannungen eine Verschiebung der Röntgenlinien (resp. -Reflexe) bewirken infolge Gitteraufweitung oder -Kontraktion, zeigen sich die verborgenen elastischen Spannungen durch eine Verbreiterung der Röntgenlinien an. DEHLINGER¹⁾ vermutet, dass sich die Spannungen dritter Art von der zweiten Art durch eine Intensitätsänderung der Röntgenlinien auszeichnen. Es ist jedoch u. W. bis heute nicht gelungen, diese beiden Arten von Eigenspannungen experimentell voneinander zu unterscheiden.

Als vierte Art von inneren Spannungen sind hier eigentlich diejenigen zu erwähnen, die infolge der *Versetzungen* entstehen. Darunter versteht man die Erscheinung, dass im Gitter z. B. den

¹⁾ DEHLINGER, Z. Metallk. **34**, 197 (1942). — MASING, Z. Metallk. **35**, 56 (1943). — KOCHENDÖRFER, „Plast. Eigenschaften von Kristallen etc.“, Berlin 1941.

n Atomen einer Gittergeraden $n \pm 1$ Atome der benachbarten Gittergeraden entsprechen. Dementsprechend sind die daraus resultierenden inneren Spannungen nur in sehr kleinen submikroskopischen Bereichen vorhanden, aber trotzdem relativ hoch.

Die Eigenspannungen erster und dritter Art erscheinen nach DEHLINGER (l.c.) nur bei polykristallinem Material, solange die Beanspruchung makroskopisch homogen ist, während Eigenspannungen zweiter Art auch beim homogenen Ziehen eines Einkristalls auftreten. Im Gegensatz dazu werden Versetzungsspannungen bei jeder Art von Verformung auch in Einkristallen erzeugt, da in diesem Fall die Beanspruchung nicht inhomogen zu sein braucht.

Wenn die Eigenspannungen zu gross werden, können sie zu Rissen im Material (s. z. B. v. ZEERLEDER, l. c.) oder zu Verkrümmungen usw. führen. Sie sind deshalb nicht erwünscht und man ist bestrebt, sie durch eine geeignete Glüh- oder Reckbehandlung wieder aus dem Material herauszubringen, wenn sie einmal entstanden sind. Eine weitere unangenehme Eigenschaft ist die, dass sie unter Umständen auch korrosionsfördernd wirken können.

Es ist ferner bekannt, dass die inneren Spannungen auf die Verfestigung des Materials einen grossen Einfluss haben. Hier spielen die Spannungen dritter Art und die Versetzungsspannungen die Hauptrolle. Auch mit der Rekristallisation stehen sie im Zusammenhang, denn diese gleicht die durch die Verformung entstandenen Eigenspannungen aus.

2. Messung der inneren Spannungen.

a) Die verschiedenen Möglichkeiten.

Die wichtigsten sind die rein mechanischen *Abdreh-* und *Ausbohrverfahren*. Sie sind mit einfacheren Hilfsmitteln durchzuführen und werden deshalb vorwiegend angewendet. Sie liefern Kenntnis von den Eigenspannungen erster Art. Die beiden wichtigsten von HEYN und BAUER und von SACHS werden in den folgenden Abschnitten kurz erläutert und die uns daran zweckmässig erscheinenden Abänderungen und das von uns benutzte Mess- und Rechenverfahren beschrieben.

Wie schon erwähnt, können die Eigenspannungen zweiter und dritter Art nur mit *Röntgenstrukturaufnahmen* ermittelt werden. Auch die Spannungen erster Art äussern sich in diesen Aufnahmen, und zwar als Linienverschiebung. Der grosse Nachteil dieser Untersuchungsmethode ist der, dass nur die Spannungen in der Oberflächenschicht bestimmt werden können, da bei den zur Messung

der Gitterkonstantenänderung benützten Rückstrahlverfahren die Röntgenstrahlen nur sehr wenig in das Material eindringen¹⁾.

Bei ferromagnetischen Werkstoffen können die Spannungen im Innern mit Hilfe von Induktionsmessungen auf indirektem Weg gemessen werden²⁾.

Grundsätzlich besteht ausserdem die Möglichkeit, aus Widerstandsänderungen auf die Anwesenheit von inneren Spannungen zu schliessen. Da sich jedoch dieser Effekt den Wirkungen der Aushärtung überlagert, ist es schwierig, die beiden Anteile voneinander zu trennen³⁾.

Eine relativ einfache — mehr nur qualitative — Methode, um sich ein Bild über die inneren Spannungen in gewissen Fällen zu machen, besteht ferner darin, dass ein Stab auf einem Gestell zwischen 3 Zapfen in gebogener Lage eingespannt wird. Damit ist er inhomogen verformt und das Auftreten von Eigenspannungen ermöglicht. Wird er nun bei verschiedenen Temperaturen geglüht und der verbleibende Krümmungsradius gemessen, so gewinnt man eine Vorstellung vom innern Spannungszustand⁴⁾.

Um die beim Giessen entstehenden Spannungen zu messen, kann man ein sogenanntes Spannungsgitter giessen. Das Spannungsgitter besteht aus 2 dünneren und einem dickeren (mittleren) Stab, die an jedem Ende durch ein Joch starr verbunden sind. Beim Aufsägen des mittleren Stabes klaffen die Ränder voneinander und dieses Auseinandergehen wird als Mass für die Gussspannungen benützt^{4) 5) 6)}.

b) Verfahren von Heyn und Bauer⁷⁾.

Diese Methode ist schon lange bekannt. *Rundstangen* werden abgedreht und die Längenänderungen gemessen. Die Rechnung geht

¹⁾ Lit. s. z. B. HENGSTENBERG und MARK, Z. Physik **61**, 435 (1930). — WASSERMANN, Mitt. Kaiser Wilhelm Inst. Eisenforsch. Düsseldorf **17**, 167 (1935). — MÖLLER, Mitt. Kaiser Wilhelm Inst. Eisenforsch. Düsseldorf **21**, 295 (1935).

²⁾ FÖRSTER & STAMBEKE, Z. Metallk. **33**, 97 und 104 (1941). — KERSTEN, Z. Physik **71**, 553 (1931); **76**, 505 (1932); **82**, 723 (1933); **85**, 708 (1933).

³⁾ HARTNAGEL, Z. Metallk. **30**, 81 (1938); AUER & SIEMENS, Z. Metallk. **30**, 86 (1938).

⁴⁾ S. z. B. COLLAUD, Mitt. v. ROLL **3**, (1944).

⁵⁾ v. STEIGER, Diss. Zürich 1918, s. Stahl und Eisen **33**, 1442 (1913). — SCHNEIDER, Aluminium **20**, 188 (1938). — GRASSMANN & LEGE, Giesserei **28**, 345 (1941); **29**, 230 (1942). — ROTH & SEUMEL, Giesserei **30**, 153 (1943). — Über den Unterschied zwischen so gemessenen Gussspannungen und den eigentlichen Eigenspannungen s. ZEERLEDER und FICHTER, Giesserei **28**, 456 (1941).

⁶⁾ Über weitere einfache Verfahren s. z. B. SACHS, „Praktische Metallkunde“ II, Berlin 1934.

⁷⁾ HEYN und BAUER, Int. Z. Metallographie **1**, 16 (1911) und viele andere Literaturstellen.

stufenweise vor und wird desto ungenauer, je dickere Schichten jedesmal abgedreht werden. Die Spannungen in der Längsrichtung des Stabes werden durch sukzessive Summation berechnet. Dabei wird angenommen, in jeder abgedrehten Zone sei die Spannung gleichmässig über den ganzen Querschnitt verteilt. Zur Beurteilung der Messungen ist es vorteilhaft, die Gesamtverlängerung Δl^1) als Funktion des noch vorhandenen Querschnitts F graphisch aufzutragen. Ungenauigkeiten werden damit sofort sichtbar und man kann die Messresultate, wenn nötig, graphisch ausgleichen.

Das Verfahren ist etwas grob und zu sehr von den Messstufen abhängig. Bedeutend eleganter wird die Rechnung, wenn man kontinuierlich rechnet (Differenzieren statt Differenz bilden), s. Abschnitt c.

c) Modifiziertes Heyn-Bauer-Verfahren.

Auf Grund einer Bemerkung von SACHS²⁾) haben wir die kontinuierlichen Gleichungen für das Heyn-Bauer-Verfahren abgeleitet. Die Messung geschieht genau gleich: man dreht einen Zylinder ab und misst die Längenänderungen. Daraus erhält man dann die Längsspannungen.

Die Längsspannung s^1) einer bestimmten Schicht von der Dicke $d\varrho$ mit dem Radius ϱ setzt sich aus 2 Bestandteilen zusammen: aus der durch das Abdrehen anderer Schichten beseitigten Spannung s' und der der Schicht eigenen Spannung s'' .

$$s = s' + s'' \quad (1)$$

Aus den bekannten Definitionsgleichungen ergibt sich nun:

$$ds_0 F = -E \frac{dl}{l_0} F = -E d\lambda F \quad (2)$$

$$ds_0 = -E d\lambda \quad (3)$$

dl = Längenänderung bei Entfernung einer Schicht.

ds_0 = die durch Entfernung der Schicht im übrigbleibenden Querschnitt F beseitigte Spannung.

Setzt man die Kräfte in der Schicht und im übrigbleibenden Querschnitt einander gleich, so wird:

$$s'' dF = ds_0 F \quad (4)$$

Daraus wird:

$$s'' = -EF \frac{d\lambda}{df} = -EF \frac{d\lambda}{dF} \quad (5)$$

¹⁾ Bezeichnungen s. Tabelle 1.

²⁾ SACHS, Z. Metallk. 19, 354 (1927).

Die durch Entfernung einer beliebigen Schicht vom Radius ϱ^* an der Stelle ϱ entstehende Spannung ds' berechnet sich ähnlich wie ds_0 :

$$ds' = E d\lambda \quad (6)$$

und daraus die *beseitigte* Spannung:

$$s' = - \int_{l_0}^l ds' = \frac{-E}{l_0} (l - l_0) = -E\lambda \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (1), (5) und (7) ergibt sich für die Längsspannung:

$$s = -E \left(F \frac{d\lambda}{df} + \lambda \right), \quad F = f \quad dF = df \quad (8)$$

Damit ist die kontinuierliche Gleichung für das modifizierte Heyn-Bauer-Verfahren abgeleitet.

Zur Rechnung wird Δl als Funktion von f oder F aufgezeichnet und für geeignete (ganzzahlige, damit die nachfolgende Rechnung einfach wird) Werte von F die Grösse $\frac{d\lambda}{df}$ aus dem Diagramm entnommen. So kann die ganze Auswertung kurz und praktisch gestaltet werden. Die meisten unserer Versuche wurden nach diesem Verfahren ausgewertet.

d) Einfaches Ausbohr-Verfahren.

Da beim weiter unten beschriebenen, komplizierteren Sachs'schen Verfahren der Zylinder *ausgebohrt* — statt *abgedreht* — wird, lag es nahe, die obigen Betrachtungen auch auf den Fall des Ausbohrens auszudehnen. Nun ändert sich die Gleichung (4), denn jetzt ist $df = -dF$, da $F = f_0 - f$. Sie wird

$$-s'' df = ds_0 F \quad (9)$$

wo F — übrigbleibender Querschnitt — $f_0 - f$ und entsprechend

$$s'' = EF \frac{d\lambda}{df} \quad (10)$$

Daraus ergibt sich dann analog dem modifizierten Heyn-Bauer-Verfahren für die Längsspannung:

$$s = E \left(F \frac{d\lambda}{df} - \lambda \right), \quad F = f_0 - f \quad (11)$$

Diese Gleichung ist bei SACHS (l. c., Anm. 5) enthalten und geht als Vereinfachung aus dem Sachs'schen Verfahren hervor. Sie

gilt mit diesen Vorzeichen jedoch *nur* für Ausbohrversuche. Beim Abdrehen ergibt sich Gleichung (8)¹).

e) *Verfahren von Sachs (Ausbohren).*

Das Verfahren ist in der unter Anmerkung 5 genannten Arbeit von SACHS ausführlich beschrieben abgeleitet und mit Beispielen belegt worden. — Man bohrt einen Zylinder oder ein Rohr sukzessive aus und misst die entstehenden Längenänderungen und die Durchmesseränderungen an der Aussenhaut. Daraus werden die Längs-, Tangential- (Ring-) und Radialspannungen errechnet und zwar mit kontinuierlichen Gleichungen.

Bei der numerischen Berechnung der Spannungen ist am besten so vorzugehen: Man zeichnet auf Grund der Messwerte Δ und Θ ²) als Funktion von f oder F auf und bestimmt zur Vereinfachung des weiteren Ganges die Werte von Δ und Θ und von $\frac{d\Delta}{df}$ und $\frac{d\Theta}{df}$ aus dem Diagramm für besonders einfache f - resp. F -Werte (z. B. ganzzahlige). Auch die δf -Werte sind dann besonders günstig.

Die Endgleichungen für die Spannungen sind in der Tabelle 2 enthalten.

f) *Modifiziertes Sachs-Verfahren (Abdrehen eines Rohres).*

Da eine genaue Durchmesserbestimmung an einem Zylinder recht schwierig ist, probierten wir auch, den Versuch so durchzuführen, dass ein *Rohr aussen abgedreht* wurde, und massen dann die Änderungen des Innendurchmessers dieses Rohres. Eine solche Innenkalibermessung ist ziemlich genau.

Bei der Ableitung der Gleichungen ergeben sich gegenüber SACHS gewisse Änderungen:

1. Sachs geht von folgenden Gleichungen aus, die die in einem Rohr entstehenden Tangentialspannungen t und Radialspannungen r mit dem am Rohr herrschenden Innendruck p_a und Aussendruck p_b in Verbindung bringen³). Unter einem Innendruck p_a ergibt sich:

$$t = \frac{\varrho^2 + b^2}{\varrho^2(b^2 - a^2)} \cdot a^2 p_a \quad (12)$$

$$r = \frac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2(b^2 - a^2)} \cdot a^2 p_a \quad (13)$$

wo a und b Innen- und Aussenradius des Rohres bezeichnen.

¹) Die Bemerkung bei SACHS ist irreführend, da man dort den Eindruck gewinnt, die Gleichung (11) gelte für das Abdrehen.

²) Bezeichnungen s. Tabelle 1.

³) Ableitung dieser Gleichungen bei A. und L. FÖPPL: Drang und Zwang, Bd. I, Berlin und München 1920.

Unter einem Aussendruck p_b erhält man:

$$t = - \frac{\varrho^2 + a^2}{\varrho^2(b^2 - a^2)} \cdot b^2 p_b \quad (14)$$

$$r = - \frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho^2(b^2 - a^2)} \cdot b^2 p_b \quad (15)$$

2. Bei einem dünnwandigen Zylinder ist der Querschnitt:

$$\pi(b^2 - a^2) = 2\pi\varrho d\varrho \quad (16)$$

wenn $a \approx \varrho \approx b$.

Da nun für die Berechnung der Innendruck die gleiche Rolle spielt wie bei SACHS der Aussendruck, hat man bei den weiteren Betrachtungen die Gleichungspaare (12) und (13) mit (14) und (15) zu vertauschen. Steht die betrachtete dünne Schicht $d\varrho$ vom Radius ϱ unter den Spannungen s'' und t'' , so ist die Radialspannung nicht mehr unabhängig. Der Zusammenhang ergibt sich, wenn wir (16) in (12) einsetzen und berücksichtigen, dass nun $p_a = dr''$:

$$dr'' = t \frac{d\varrho}{\varrho} \quad (17)$$

(Man erhält also dieselbe Gleichung wie SACHS).

3. Die Ableitung der *Längsspannung* lautet nun folgendermaßen: Die Entfernung des Querschnitts df mit der Spannung s'' bedingt die Beseitigung von ds_a im übrigbleibenden Querschnitt F .

$$F = f - f_a = \pi(\varrho^2 - a^2) \quad (18)$$

Wie schon in Abschnitt c begründet, wird also (entsprechend Gleichung 4)

$$s'' df = ds_a(f - f_a) \quad (19)$$

oder unter Zugrundelegung der Sachs'schen Formulierung

$$s'' = - \frac{E}{1 - \mu^2} (f - f_a) \frac{d(\lambda + \mu \vartheta)}{df} \quad (20)$$

Dabei ist für ds_a ein aus der Elastizitätstheorie hervorgehender allgemeiner Ausdruck eingeführt worden¹⁾.

An der Berechnung von s' ändert sich gegenüber SACHS nichts.

4. Bei der Berechnung der *Tangentialspannung* ist wiederum von (12) statt von (14) auszugehen. Wir berechnen zunächst die

¹⁾ Bezeichnungen s. Tab. 1.

Spannung dt_a , die den durch die Entfernung der Schicht $d\rho$ mit Radius ρ erzeugten Formänderungen an der Innenwand des Rohres entspricht. Es wird also in Gleichung (12) $\rho = a$ und $p_b = dr''$ eingeführt:

$$dt_a = -\frac{2b^2}{b^2 - a^2} \cdot p_b \quad (21)$$

b ist nun Parameter und kann gleich ρ gesetzt werden:

$$dt_a = -\frac{2\rho^2}{a^2 - \rho^2} dr'' \quad (22)$$

(entsprechend der Gleichung (6) bei SACHS).

Berücksichtigt man (17) und führt wiederum den allgemeinen Spannungsausdruck ein, so ergibt sich:

$$t'' = -(f - f_a) \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{d(\vartheta + \mu\lambda)}{df} \quad (23)$$

Bei der Berechnung von t' nach SACHS ist sinngemäss b durch a und dt_b durch dt_a zu ersetzen.

Die Spannung dt' , welche die durch das Abdrehen der Schicht mit Radius ρ^* an der Stelle ρ erzeugten Formänderungen zu kompensieren imstande ist, berechnet sich aus (14):

$$dt' = -\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2(\rho^{*2} - a^2)} \rho^{*2} dr^* \quad (24)$$

dr^* = Radialspannung in der Schicht mit Radius ρ^* .

Tabelle 1.

Bedeutung der in Rechnungen und Tabellen vorkommenden Grössen.

1. Die Summationen Σ sind jeweils algebraisch durchzuführen. (Berücksichtigung des Vorzeichens).
2. Vorgestelltes d und δ sind praktisch gleichbedeutend. d gibt den Charakter eines Differentials an, δ den einer Differenz.

a = Innenradius eines Rohres.

b = Aussenradius eines Rohres.

D = Durchmesser, variabel.

D_0 = ursprünglicher Durchmesser.

D_i = Innendurchmesser eines Rohres.

D_e = Enddurchmesser.

D^* = $D_0/2$ bei Stangen.

= Mittel der Anfangsdurchmesser bei Rohren.

E = Elastizitätsmodul.

$E' = E/1 - \mu^2$.

ε = Fehler = Abweichung vom Mittelwert.

$f = \pi \varrho^2$.

$\delta f = \delta f$ = Schichtquerschnittsfläche resp. Änderung des Gesamtquerschnitts bei Entfernung einer Schicht.

f_0 = ursprünglicher Querschnitt des Zylinders oder Rohres (Fläche des Kreisrings).

f_e = Endquerschnitt, gerechnet wie f_0 .

$f_i = \pi a^2$ = Innenquerschnitt eines Rohres.

F = übrigbleibender Querschnitt beim Abdrehen oder Ausbohren (bei Röhren Kreisringfläche).

= f beim Abdrehen eines Zylinders.

= $f - f_i$ beim Abdrehen eines Rohres.

= $f_0 - f$ beim Ausbohren.

F^* = zu D^* gehöriges F .

l = Messlänge, variabel.

l_0 = ursprüngliche Messlänge.

L = volle Länge.

$\delta l = dl$ = Längenänderung beim Abdrehen oder Ausbohren einer Schicht.

$\Delta l = \Sigma \delta l = l - l_0$ = Gesamtlängenänderung.

$\lambda = \Delta l/l_0 = \Sigma \delta \lambda$ = spezifische Längenänderung.

$d\lambda = \delta \lambda = dl/l_0$ = spezifische Längenänderung beim Abdrehen oder Ausbohren einer Schicht.

$\Lambda = \lambda + \mu \vartheta$.

μ = Poisson'sche Konstante (Querkontraktion, angenommen zu 0,34).

m = mittlerer Fehler.

P = Kraft.

p_a = Innen- und Aussendruck an einem Rohr.

p_b

r = Radialspannung (r' usw. wie bei s).

ϱ = Radius der betrachteten Schicht (Hauptparameter bei allen Verfahren. Ausbohren = Innenradius, Abdrehen = Aussenradius).

$d\varrho$ = Schichtdicke am Radius gemessen.

ϱ_i = Innenradius eines Rohres.

s = Längsspannung.

s' = Längsspannung, die in der betrachteten Schicht durch die Entfernung anderer Schichten erzeugt wurde.

ds' = Spannung, die die durch das Abdrehen einer Schicht (mit Radius ϱ^*) an der Stelle ϱ erzeugten Formänderungen zu kompensieren imstande ist.

s'' = Längsspannung, die der betrachteten Schicht eignet.

ds_0 = die durch Entfernung der betrachteten Schicht im übrigbleibenden Querschnitt F beseitigte Spannung.

ds_b

t = Tangential- oder Ringspannung (t' usw. wie bei s).

ϑ = spezifische Durchmesseränderung = $D - D_0/D_0$.

$\Theta = \vartheta + \mu \lambda$.

V = abgedrehtes, resp. ausgebohrtes Volumen $(f_0 - F^*)l_0$.

W^* = Formänderungsarbeit infolge Auslösens der Spannungen.

$W = W^*/V$ = gerechnet auf 1 cm³ des abgedrehten resp. ausgebohrten Volumens V .

δW = Formänderungsarbeit bei Entfernung einer Schicht.

Entsprechend folgt aus (21):

$$dt_a = - \frac{2 \varrho^{*2}}{\varrho^{*2} - a^2} dr^* \quad (25)$$

und weiter:

$$dt' = \frac{a^2 + \varrho^2}{2 \varrho^2} dt_a \quad (26)$$

Diese Gleichung stimmt mit der entsprechenden Sachs'schen überein, wenn man b durch a ersetzt. Im Ausdruck für t' muss statt f_b nun f_a geschrieben werden.

5. Will man die *Radialspannung* ermitteln, so geht man von einer der Formel (24) analogen, aus (15) hervorgehenden Beziehung aus:

$$dr' = - \frac{\varrho^2 - a^2}{2(\varrho^{*2} - a^2)} \varrho^{*2} dr^* \quad (27)$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (25) folgendes:

$$dr' = \frac{\varrho^2 - a^2}{2 \varrho^2} dt_a \quad (28)$$

Man erhält also dieselbe Gleichung für r' resp. für r , das ja gleich r' angenommen wird, wie Sachs, wenn der Ausdruck $(f_b - f)$ durch $(f - f_a)$ ersetzt wird.

6. Zur endgültigen Aufstellung der Formeln sind nun die Spannungsanteile s' und s'' usw. zu addieren (entsprechend Gl. 1) und man findet folgende Endgleichungen:

$$\begin{aligned} s &= -E' \left(F \frac{dA}{df} + A \right) \\ t &= -E' \left(F \frac{d\Theta}{df} + \frac{f_i + f}{2f} \Theta \right) \\ r &= E' \frac{F}{2f} \Theta \\ F &= f - f_i \end{aligned} \quad (29)$$

g) *Allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Verfahren.*

Eine Zusammenstellung der Formeln, mit Hilfe welcher die Spannungen nach den hier beschriebenen Verfahren zu berechnen sind, findet sich in Tabelle 2. Bei der überwiegenden Anzahl unserer Versuche rechneten wir nach dem im Abschnitt c beschriebenen „Modifizierten Heyn- und Bauer-Verfahren“. Das Sachs'sche oder

Tabelle 2.

Die verschiedenen Rechnungsverfahren.

Name	Ab-schnitt	Messung	Rechnung ¹⁾	Glei-chung Nr.
Heyn & Bauer	2 b	Abdrehen Längenänderung	$s_n \delta f_n =$ $E/l_0 [(l_n - l_0) F_n - (l_{n-1} - l_0) F_{n-1}]$ ₂₎	—
Modifiz. Heyn und Bauer	2 c	Abdrehen Längenänderung	$S = -E \left(F \frac{d\lambda}{df} + \lambda \right)$ $F = f$	8
Einfaches Ausbohrverfahren	2 d	Ausbohren Längenänderung	$s = E \left(F \frac{d\lambda}{df} - \lambda \right)$ $F = f_0 - f$	11
Sachs	2 e	Ausbohren Längenänderung Durchmesseränderung	$s = E' \left(F \frac{d\lambda}{df} - \lambda \right)$ $t = E' \left(F \frac{d\Theta}{df} - \frac{f_0 + f}{2f} \Theta \right)$ $r = E' \frac{F}{2f} \Theta$ $F = f_0 - f$	—
Modifiz. Sachs	2 f	Abdrehen eines Rohres Längenänderung Innendurchmesseränderung	$S = -E' \left(F \frac{d\lambda}{df} + \lambda \right)$ $t = -E' \left(F \frac{d\Theta}{df} + \frac{f + f_i}{2f} \Theta \right)$ $r = E' \frac{F}{2f} \Theta$ $F = f - f_i$	29

das Modifizierte Sachs'sche Verfahren schien uns für unseren Zweck zu kompliziert zu sein, da es uns nur darauf ankam, ein Mass für den Spannungszustand nach einer bestimmten Materialbehandlung zu finden. Wie wir dieses Mass bestimmten, ist im nächsten Abschnitt beschrieben.

¹⁾ Bezeichnungen s. Tab. 1.

²⁾ Die Indices n beziehen sich auf das stufenweise Abdrehen.

h) *Berechnung der Formänderungsenergie.*

Die Rechenverfahren ergeben die inneren Spannungen und diese können dann z. B. als Funktion von ϱ graphisch aufgetragen werden. Aus diesen Diagrammen lässt sich ersehen, wie gross die Spannungen in einer bestimmten Schicht sind, aber der Gesamtspannungszustand ist damit noch nicht gekennzeichnet. Man sollte diesen zahlenmässig festlegen können, um die Resultate nachher miteinander zu vergleichen. Es ist zum Beispiel nicht günstig, als Mass für den Gesamtzustand die Spannungsspitzen, die meistens beim grössten und kleinsten Durchmesser zu finden sind, anzugeben, denn deren genaue Höhe ist durchaus zufällig und hängt von der Art des Rechnens ab. Man könnte daran denken, die Steigung der Spannungs-Radius-Kurve als Mass zu verwenden, aber auch dem stehen Schwierigkeiten entgegen, da die Kurven oft sehr stark von einer Geraden abweichen, so dass es nicht *eine* Steigung gibt, die für den ganzen Verlauf charakteristisch wäre. Es empfiehlt sich auch nicht, die Fläche, die von der Spannungs-Radiuskurve oder von der Spannungs-Querschnittskurve umschrieben wird, als Mass einzuführen, da beiden eine einfache physikalische Bedeutung fehlt.

Als Grösse, die den Spannungszustand gut charakterisiert, scheint uns die freiwerdende Spannungsenergie günstig zu sein. Sie lässt sich aus den wirksamen Kräften und den entsprechenden Längenänderungen berechnen. Nach Gleichung (4) und (9) ist die Kraft, mit der die abgedrehte Schicht den übrigbleibenden Querschnitt zusammenhielt oder auseinanderzog:

$$P = d s_0 F \quad (35)$$

wobei wieder für $d s_0$ der Ausdruck aus Gleichung (3) eingesetzt werden darf. Die beim Abdrehen einer einzigen Schicht freiwerdende Arbeit ist also

$$\delta W = -P \delta l = E F \delta \lambda \delta l \quad (31)$$

Durch Summation oder Integration könnte so die gesamte freiwerdende Arbeit errechnet werden. Da diese Zahl jedoch dann von der Abdrehstufe, d. h. von der Grösse der jeweils abgedrehten Fläche abhängig ist, muss noch eine willkürliche Festsetzung getroffen werden, damit die an den einzelnen Probestäben erhaltenen Werte vergleichbar werden. Um die Rechnung möglichst einfach zu gestalten, legten wir uns nicht auf eine bestimmte Abdrehstufe fest, sondern rechneten die Arbeit aus, die frei wird, wenn der Stab in einem Mal auf die Hälfte seines Durchmessers abgedreht resp.

ausgebohrt würde. Bei einem Rohr wählt man analog eine Ab-drehung oder Ausbohrung bis zum mittleren Durchmesser (Mittel zwischen Aussen- und Innendurchmesser). Die dem Durchmesser D^* entsprechenden Werte von F und Δl seien F^* und Δl^* . Dann wird

$$W^* = E/l_0 \cdot F^* \Delta l^{*2} \quad (32)$$

Um den Einfluss der verschiedenen Messlängen und Anfangsdurchmesser auszuschalten, dividierten wir diese Zahl jeweils noch durch das abgedrehte (resp. ausgebohrte) Volumen und bezeichneten die Grösse

$$W = W^* / V \quad (33)$$

als *spezifische Formänderungsarbeit*. Dabei ist

$$V = (f_0 - F^*) l_0 \quad (34)$$

3. Durchführung der Versuche.

a) Material.

Die meisten Versuche wurden mit der Legierung Avional M¹⁾ (Gattung Al-Cu-Mg nach VSM) durchgeführt, da diese Gattung den Prototyp der aushärtbaren Legierungen darstellt. Bei einigen Messungen verwandten wir Avional-D und -SK, Legierungen derselben Gattung, und teilweise auch Anticorodal (Gattung Al-Si-Mg nach VSM), das ebenfalls aushärtbar ist. Die Zusammensetzungen und hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Legierung sind in Tab. 3 zusammengestellt.

Tabelle 3²⁾.

Legierung 5)	Zusammensetzung (Al = Rest)					Streck- grenze ³⁾ $\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	Zug- festig- keit σ_B kg/mm ²	Deh- nung δ %
	Cu %	Si %	Mn %	Mg %	Cr %			
Avional-M	3,5-5	0-1,0	0,2-1,5	0,2-1,5	—	26-36	40-48	12-20 ⁴⁾
Avional-D	3,5-5	0-1,0	0,2-1,5	0,2-1,5	—	24-30	38-44	16-22
Avional-SK	3,5-5	0-1,0	0,2-1,5	0,2-1,5	0,1-0,5	30-42	43-50	10-22
Anticorodal (Zustand B)	—	0,5-1,5	0,5-1,0	0,5-1,0	—	27-38	32-42	8-14

¹⁾ Über die Eigenschaften dieser Legierung s. z. B. IRMANN, Schweizer Archiv 5, 48-60 (1939).

²⁾ Die mechanischen Eigenschaften sind für den ausgehärteten Zustand von Pressprodukten angegeben.

³⁾ Bezieht sich auf 0,2% Dehnung.

⁴⁾ Kann bei Stangen mit Durchmesser über 5 mm bis auf 10% heruntergehen.

⁵⁾ Geschützte Wortmarken.

Diese Legierungen wurden in der Form von gepressten Rundstangen mit meist 40 mm Durchmesser (bei den früheren Versuchen 50 mm Durchmesser) verwendet. Die Länge betrug gewöhnlich 21 cm, bei den Reckversuchen jedoch 35 bis 40 cm.

Um die Stirnflächen der Stäbe, die für die Messung vollständig eben sein müssen, während der Bearbeitung (Abdrehen usw.) zu schützen, benützten wir zum Einspannen auf der Drehbank aufschraubbare Kappen. Die Kappen besaßen aussen einen Mitnehmerstift, der von der Drehbewegung der Bank erfasst wurde. Die äussersten Partien des Probekörpers wurden nicht abgedreht, denn hier sass das Gewinde (das während der Bearbeitung unter der Kappe lag). Die Messlänge l_0 , auf die es ankommt, ist also bei allen Abdrehversuchen kleiner als die Gesamtlänge L und zwar stets ca. 19 cm.

b) Messung.

1. Die *Längenänderungen* massen wir mit einer Mikrometerschraube, die auf einem Gestell mit Gegenanschlag montiert war. Es wurden Tausendstelmmillimeter (μ) abgelesen und die Streuung betrug nur 1—2 μ . Um alle Temperatureinflüsse zu vermeiden, befand sich die ganze Messlehre in einem Thermostaten mit Temperaturschwankungen von weniger als 0,5°. Dieser Thermostat hatte ca. 5 cm dicke, mit Isolationsmaterial gefüllte Doppelwände aus Holz und wurde mit einer Kohlenfadenlampe und einem Quecksilber-Kontaktthermometer mit Relais auf einer Temperatur von 30° gehalten. Auf diese Weise wurde erreicht, dass keine Temperaturreduktion notwendig war, da alle Messungen bei derselben Temperatur vorgenommen wurden. Vor jeder Messung befanden sich Probekörper und Mass mindestens eine Stunde lang im Thermostaten. Die Mikrometerschraube wurde zur Messung von aussen her durch eine mit Tuch abgeschlossene, kleine Öffnung betätigt und durch ein Glas abgelesen.

Damit immer an denselben Stellen gemessen wurde, war die Auflagestelle markiert. Jeder Punkt wurde 3mal abgelesen und davon und dann von den Längendifferenzen, die sich bei Entfernung einer Schicht zwischen den Ablesungen in den jeweils 4 Mess-Stellungen ergaben, das Mittel genommen. (Die 4 Mess-Stellungen entsprechen den 4 Lagen, die man erhält, wenn man den Probestab 4mal um seine Achse um je 90° dreht.)

2. *Aussendurchmessermessung*: Dazu fand eine Messuhr Verwendung. Sie wurde auf ein Spezialgestell montiert, auf welches die Probekörper nach jeder Bearbeitung in immer wieder gleiche, unverrückbare Lage gelegt werden konnten. Ablesen konnte man

auf 1μ genau, aber die Streuung war eher grösser als bei der Längenmessung, nämlich etwa $2\text{--}3\mu$. Es wurde in 2 Lagen (durch eine Drehung des Probekörpers um 90° ineinander übergehend) gemessen. Die Mittelung erfolgte wie bei der Längsspannung (Mittel der Ablesungen, Mittel der Differenzen).

3. *Innendurchmesser-messung*: Den Innendurchmesser massen wir mit dem Innenkaliber „Micro-Maag“ (Messkopf 50 mm). Der Probezylinder von 80 mm Durchmesser wurde anfangs auf 50 mm ausgebohrt und die Durchmesseränderungen mit einer Ablesegenauigkeit von 2μ festgestellt. Die Streuung war auch nur 2μ . Gemittelt wurde wieder in gleicher Weise (3 Ablesungen).

Sowohl die Aussen- als auch die Innendurchmesser-Messungen sind relativ schwierig, exakt auszuführen, da es hierbei sehr viele Fehlerquellen gibt: leichte Unrundheit des Stabes, Durchmesser-Schwankungen im Rohr usw. Wir probierten deshalb die entsprechenden Verfahren (Sachs und Modifiziertes Sachs) nur in wenigen Versuchen aus.

c) Beispiele und Vergleich der Verfahren und ihre Genauigkeit.

Um das von uns *modifizierte Heyn-Bauer-Verfahren* näher zu erläutern, geben wir im folgenden ein Beispiel:

Probestab: Durchmesser ursprünglich $4,00\text{ cm} = D_0$, entsprechend $f_0 = 12,57\text{ cm}^2$

Messlänge: $l_0 = 19,0\text{ cm}$

Endquerschnitt $f_e = 0,99\text{ cm}^2$

Material: Avional-D, bei 520° während 2 h gegläht¹⁾, abgeschreckt und bei 50° während 24 h ausgehärtet.

Der Stab wurde sukzessive um je 2 mm (= Abnahme des Radius) abgedreht. Die entsprechenden Längenänderungen δl wurden summiert und diese Summe (Δl) als Funktion des jeweils noch vorhandenen Querschnitts aufgetragen (s. Fig. 1). Für die weitere Rechnung wurden nun auf dieser Kurve für einfache F -Werte, nämlich für $F = 12,57, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 1$ das zugehörige Δl und als Steigung die Grösse dl/df abgelesen. Entsprechend den angegebenen Formeln rechneten wir nun mit diesen Werten weiter und erhielten so die Spannungen s . Für den Elastizitätsmodul E , der bei dieser Rechnung gebraucht wird, setzten wir bei den ersten Versuchen stets 6800 kg/mm^2 (als Mittelwert) ein. Später bestimm-

¹⁾ Diese Temperatur ist höher als die normale Homogenisierungstemperatur ($495\text{--}500^\circ$) und wurde versuchsweise so gewählt.

ten wir E für jeden Stab (nach dem Abdrehen) und benützten diesen Wert. In Abhängigkeit von dem aus der Fläche F zurückberechneten Radius ϱ sind die Spannungswerte s in Fig. 2 aufgetragen. Man sieht daraus, dass aussen Druck- und innen Zugspannungen herrschen. Diese Erscheinung wird bei allen ausgehärteten Probestäben beobachtet und ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass die inneren Partien des Stabes, die während der Abkühlung (Abschrecken) länger warm bleiben und sich entsprechend auch länger im plastischen Gebiet befinden, mehr zusammenschrumpfen als die äusseren.

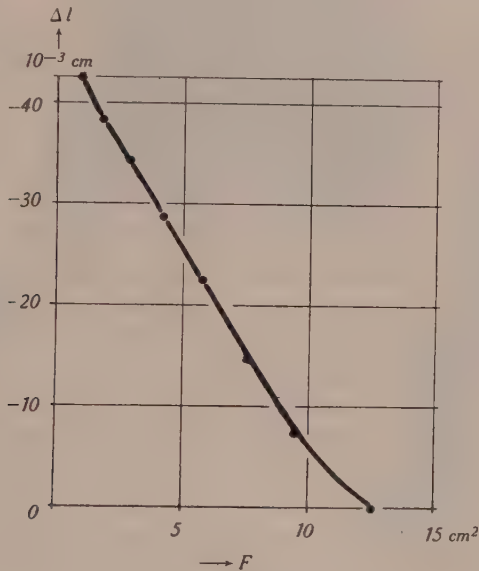


Fig. 1.

Gesamtverlängerung Δl als Funktion des noch vorhandenen Querschnitts F .

Material: Avional M, gegl. 2 h bei 520° , abgeschr. und ausgeh. 24 h, 50° .

In der Fig. 2 ist zum Vergleich die Spannungsverteilung, die man nach dem *Heyn-Bauer-Verfahren* erhält, gezeichnet (strichpunktierte Kurve). Die Abweichung der beiden Kurven ist verhältnismässig gering und geht, wie schon erwähnt, auf die etwas gröbere Rechnungsweise des gewöhnlichen Heyn- und Bauer-Verfahrens zurück. Zur Ermittlung der spezifischen Formänderungsarbeit lasen wir aus dem Diagramm der Fig. 1 die zum halben Anfangsdurchmesser D^* gehörige Verlängerung ($-33,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$) ab und errechneten nach Gleichung (32) und (33) $W = 0,69 \text{ kgcm/cm}^3$.

Zur Demonstration der *Zuverlässigkeit* der Messungen lassen wir hier noch ein Beispiel folgen, bei welchem es sich um Anticorodal handelt, das während 2 h bei 540° gegläht, abgeschreckt und während 12 h bei 160° warmgehärtet wurde. Im Spannungsverlauf zeigt sich eine ausgeprägte Kerbe beim Radius 1,75 cm (*s. Fig. 3*). Die gleiche Erscheinung wurde bei anderen Abschnitten derselben Pressstange gefunden. Wie eine nachträgliche Kornätzung der Stirnflächen ergab (*s. Fig. 4*), besaß diese Stange eine grobkristalline Zone, deren Grenzfläche der Lage des Spannungsminimums entspricht.

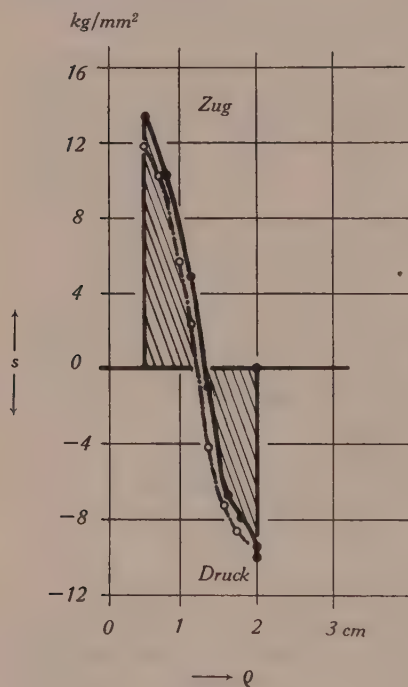


Fig. 2.

Eigenspannungen s als Funktion des Radius ρ ; Material wie bei Fig. 1.

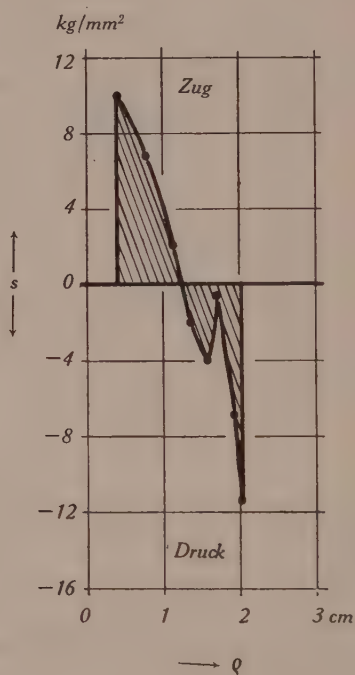


Fig. 3.

Eigenspannungen s als Funktion des Radius ρ . Stab aus Anticorodal mit grobkristalliner Randzone. Gekläht 2 h bei 540° , abgeschreckt, ausgehärtet 12 h bei 160° .

d) Genauigkeit der Ergebnisse.

Wir berechnen den mittleren Fehler der Formänderungsarbeit mit Hilfe der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. In der Tabelle 4 sind die Werte der spezifischen Form-

änderungsarbeiten W von verschiedenen ausgehärteten Probestäben und die Abweichungen ε von ihrem Mittelwert zusammengestellt. Material: Avional-M.

Alle Stäbe sind 2 h bei 495—500° gegläht und dann abgeschreckt. Mit A sind die anschliessend während 4 d bei 20° und mit B die während 24 h bei 50° ausgelagerten Proben bezeichnet.

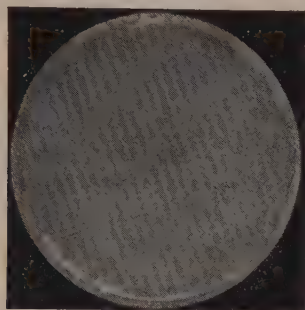


Fig. 4.

Querschliff durch den Anticorodalstab mit grobkristalliner Randzone (s. Fig. 3).

Tabelle 4.

A				B			
Nr.	W kgcm/cm ³	$\varepsilon \cdot 10^{-2}$	$\varepsilon^2 \cdot 10^{-4}$	Nr.	W kgcm/cm ³	$\varepsilon \cdot 10^{-2}$	$\varepsilon^2 \cdot 10^{-4}$
53	0,32	0	0	34	0,52	+ 14	196
54	0,38	+ 6	36	44	0,32	- 6	36
87	0,38	+ 6	36	45	0,43	+ 5	25
88	0,20	- 12	144	56	0,25	- 13	169
Mittel: 0,32		Summe ε^2 : 216		Mittel: 0,38		Summe ε^2 : 426	

Der mittlere Fehler der Einzelwerte berechnet sich nach der Formel:

$$m^2 = \frac{\sum \varepsilon^2}{n-1} \quad (35)$$

(n = Anzahl der Beobachtungen)

Es wird:

$$m_A = \sqrt{216/3} \cdot 10^{-2} = \pm 0,085 \text{ kgcm/cm}^3$$

$$m_B = \sqrt{426/3} \cdot 10^{-2} = \pm 0,12 \text{ kgcm/cm}^3$$

Die Streuung (d. h. der mittlere Fehler) der einzelnen Werte der spezifischen Formänderungsenergie beträgt also in diesem Fall ca. $0,1 \text{ kgcm/cm}^3$ oder etwa 20 bis 30 % des Wertes. Es ist zu beachten, dass diese Tatsache kaum auf Messfehlern beruht, sondern dass sie der Ausdruck der *natürlichen Streuung* des inneren Spannungszustandes von gleich behandelten Stäben ist. Die relativ grosse Streuung kommt in einigen weiter unten mitgeteilten Ergebnissen zum Ausdruck.

4. Ergebnisse.

a) Presszustand (Avional-M).

Die von uns im Presszustand untersuchte Probe hatte eine spezifische Formänderungsarbeit von $0,085 \text{ kgcm/cm}^3$. Die Spannungen hatten einen Maximalwert von 6 kg/mm^2 . Wie erwartet, sind diese Zahlen im Vergleich zu denjenigen, die an ausgehärteten Stäben gemessen wurden, klein. Bei der Spannungsverteilung über den Querschnitt fällt auf, dass in den Aussenzonen *Zug-* und in den Innenzonen *Druck-*Spannungen vorhanden sind. Da beim Pressen der Materialfluss aussen infolge der Reibung an der Matrize gehemmt wird, ist dieses Verhalten verständlich.

b) Normale Aushärtung (Avional-M).

Die Probestäbe wurden bei $495\text{--}500^\circ$ während 2 h geglüht (homogenisiert), abgeschreckt in Wasser von 20° und entweder während 24 h bei 50° oder während 4 d bei 20° der Aushärtung unterworfen. Über die Resultate wurde zum Teil bereits bei der Genauigkeitsbetrachtung im vorhergehenden Abschnitt 3 d berichtet. Die spezifische Formänderungsenergie der kalt und der warm ausgehärteten Proben ist innerhalb der Fehlergrenze gleich. Die Spannungsmaxima liegen bei 10 bis 12 kg/mm^2 .

In ausgehärtetem Material haben wir demnach stets hohe innere Spannungen. Sie werden gewöhnlich *Abschreckspannungen* genannt. Nach der herrschenden Ansicht stehen sie mit der Verfestigung im Zusammenhang. Über die Deutung der Spannungsverteilung s. oben, Abschnitt 3 c.

c) Einfluss der Temperatur vor dem Abschrecken.

1. *Avional-M.* Bei den endgültigen Versuchen wurden alle Probestäbe zuerst bei der Homogenisierungstemperatur ($495\text{--}500^\circ$) geglüht und dann vor dem Abschrecken an der Luft auf verschiedene Temperaturen bis hinunter zu 350° abgekühlt. Der Zusammenhang zwischen Formänderungsarbeit und Temperatur vor dem Ab-

schrecken ist aus der Fig. 5 ersichtlich. Trotz der starken Streuung, die naturgemäss vorhanden ist¹⁾, erkennt man, dass ein Spannungsmaximum vorliegt. Dieses liegt auffälligerweise nicht bei der Homogenisierungstemperatur, sondern ziemlich darunter bei ca. 450°. Der grössten Verfestigung (die eben nach Glühung bei der Homogenisierungstemperatur eintritt) entspricht also nicht der stärkste innere Spannungszustand. Zur Verdeutlichung ist als Mass für die Festigkeit in der Fig. 5 die Brinellhärte eingetragen.

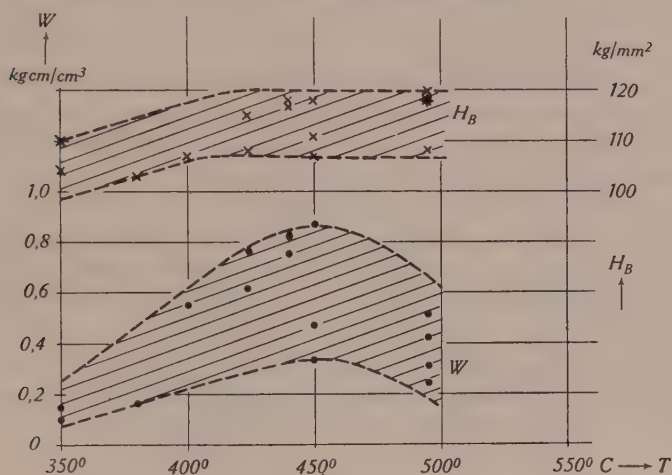


Fig. 5.

Abhängigkeit der spezifischen Formänderungsarbeit W und der Brinellhärte H_B von der Temperatur T vor dem Abschrecken. Material: Avional M.

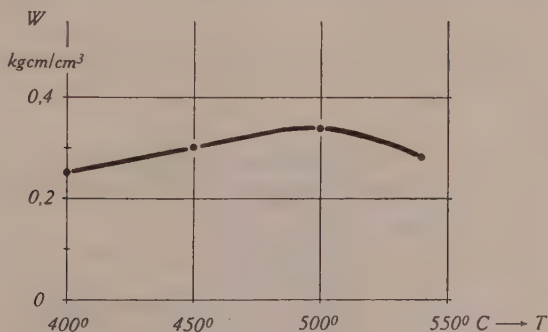


Fig. 6.

Abhängigkeit der soezifischen Formänderungsarbeit W von der Temperatur T vor dem Abschrecken. Material: Anticorodal.

¹⁾ S. Genauigkeitsbetrachtung im Abschnitt 3d.

2. *Anticorodal*. Die Versuche wurden nach den gleichen Grundsätzen wie bei Avional durchgeführt. Die Homogenisierungstemperatur liegt in diesem Fall bei 540° . Wie die graphische Darstellung der Ergebnisse in *Fig. 6* zeigt, ist der Verlauf der Kurve eher flacher als bei Avional. Wiederum liegt das Maximum nicht bei der Homogenisierungstemperatur, sondern erheblich darunter, bei etwa 500° .

d) *Einfluss der Temperatur des Abschreckmittels.*

1. Es wurde mit Avional-M eine normale thermische Behandlung durchgeführt (Glühen bei $495-500^{\circ}$ während 2 h, Abschrecken und Aushärten bei 50° während 24 h). Neben der gewöhnlichen Abschreckung in Wasser von 20° wurde jedoch noch eine solche in Wasser von 60° resp. 100° vorgenommen. Wie man aus *Fig. 7* sieht, nimmt die Formänderungsenergie mit der Erhöhung der Temperatur des Abschreckwassers stark ab und sinkt auf sehr kleine Werte. Während die spezifische Formänderungsarbeit bei Abschreckung in 20° -grädigem Wasser im Mittel (4 Probestäbe) $0,38 \text{ kgcm/cm}^3$ beträgt, ist die für 100° -grädiges Wasser im Mittel auf $0,0040 \text{ kgcm/cm}^3$ gefallen. Die Festigkeitswerte (aufgezeichnet ist die Brinellhärte) nehmen — wie erwartet — ebenfalls schwach ab mit steigender Temperatur des Abschreckwassers.

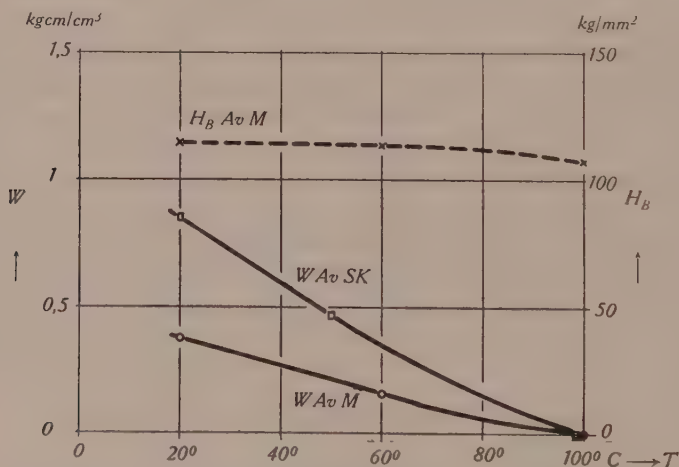


Fig. 7.

Spezifische Formänderungsarbeit W und Brinellhärte H_B als Funktion der Temperatur T des Abschreckwassers. Material: Avional M und SK .

Die Punkte sind Mittelwerte.

2. Analog verhält sich *Avional-SK* (gleiche Homogenisierungs-
glühung wie *Avional*). Der Verlauf der Formänderungsarbeit ist
auch in *Fig. 7* enthalten. Ähnliche Resultate wurden schon in der
Arbeit von v. ZEERLEDER (l. c.) und neuerdings von FROMMER und
LLOYD¹⁾ mitgeteilt.

e) Erwärmung bei verschiedenen Temperaturen bis zu 400°.

Glüht man die Pressstangen ohne vorhergehende Aushärtung,
so ergibt sich eine stetige Abnahme der Formänderungsarbeit (resp.
der Spannungen, s. *Fig. 8*) mit der Glüh-temperatur. Die Glühdauer

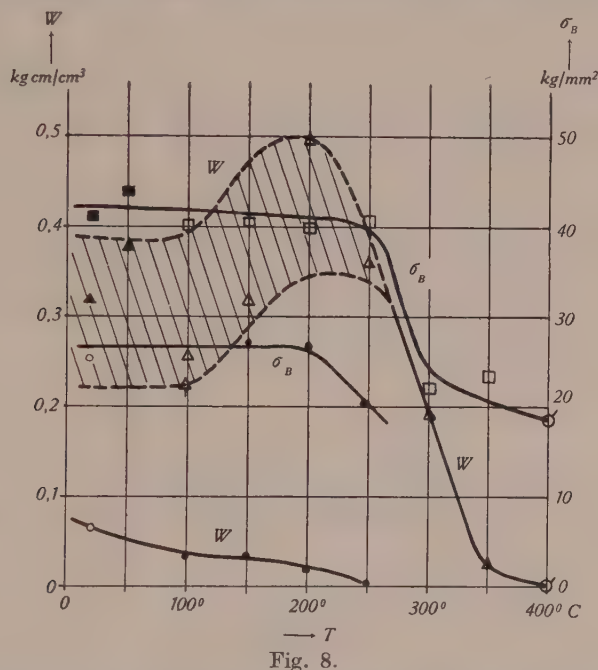


Fig. 8.

Abhängigkeit der spezifischen Formänderungsarbeit W und der Zugfestigkeit σ_B
von der Erwärmungstemperatur T . Material: *Av M*.

- \triangle = W , nach Aushärtung erwärmt während 24 h
- \blacktriangle = W , Aushärtung bei 20° und 50°
- \square = σ_B , nach Aushärtung erwärmt während 24 h
- \blacksquare = σ_B , Aushärtung bei 20° und 50°
- \triangle = W , nach Aushärtung erwärmt während 6 h
- \circ = normal weichgeglüht (400°/4 h)
- \bullet = ohne vorhergehende Aushärtung erwärmt während 24 h
- \circ = Presszustand

¹⁾ FROMMER und LLOYD (*J. Inst. of Metals* **70**, 91 (1944)) finden, dass die
Spannungen erst von einer Wassertemperatur von 70° an abnehmen.

betrug jeweils 24 h. Bei 260—270° ist von den Spannungen im Presszustand praktisch nichts mehr vorhanden. Die Zugfestigkeit ist bis 200° ziemlich konstant und beginnt bei höheren Temperaturen stark zu fallen. Bei diesen nicht ausgehärteten Probestäben fanden wir, dass bei den schwachen auftretenden Spannungen meist zu äusserst und zu innerst im Stab Druckspannungen und in einer mittleren Zone Zugspannungen vorhanden waren.

Die vor dem Glühen *ausgehärteten* Proben ergaben einen starken Abfall der Formänderungsenergie bei Temperaturen über ca. 250°. Bemerkenswert ist hier, dass zuerst — bis etwa 200° — ein Anstieg des Spannungszustandes eintritt. Sofern es sich nicht nur um Streuung handelt, hängt diese Erscheinung sehr wahrscheinlich mit der in diesen Temperaturbereichen wirksamen Warmaushärtung zusammen. Entsprechend beginnt die Zugfestigkeit auch erst bei etwa 250° zu fallen (Darstellung Fig. 8).

Nach gewöhnlicher *Weichglühung* (4 h bei 400°, langsam abkühlen lassen) sind die vorher vorhandenen Spannungen praktisch vollständig verschwunden. Die spezifische Formänderungsarbeit betrug bei unserem Versuch nur noch 1,4 gcm/cm³ und die Spannungen erreichten im Maximum noch 1 kg/mm². Der Energiewert fügt sich gut in die Kurve der Fig. 8 ein.

f) Einfluss des Reckens.

Nach den ersten Tastversuchen gingen wir immer folgendermassen vor:

Die Probestäbe waren ca. 40 cm lang, wurden in der mittleren Partie auf einen Durchmesser von 30 mm abgedreht und mit Schultern versehen wie Zerreisprobestäbe. In dieser Gestalt wurden sie auf einer 60 t Zerreismaschine gereckt. Anschliessend drehten wir hieraus wieder einen ca. 21 cm langen Stab mit 2 planen Flächen. Wenn man diese Vorsichtsmassregel nicht ergreift, brechen die Stäbe immer innerhalb des Bereiches der Einspannbacken bei schon relativ niedrigen Dehnungen (Kerbwirkung).

Zuerst untersuchten wir die Spannungen in Stäben, die vorher weichgeglüht worden waren (während 4 h bei 400° erhitzt). Die Formänderungsarbeit ist in Fig. 9 als Funktion des Reckgrades aufgetragen. Mit steigendem Reckgrad fällt sie zuerst schwach ab und durchläuft dann anscheinend ein sehr flaches Minimum. Der Wiederanstieg geht aus unseren Messungen wegen der verhältnis-

mässig grossen Streuung nicht eindeutig hervor. Das Auftreten von *Reckspannungen*, die dieser Anstieg anzeigt, ist sicher von den genauen Reckbedingungen und vom Zufall abhängig, da eigentlich eine inhomogene Belastung zur Spannungserzeugung benötigt wird. (Unsere Belastung war — im grossen gesehen — homogen.)

Eine weitere Versuchsserie betraf den Einfluss des Reckgrades auf die Spannungen in Stäben, die vorher *vollständig ausgehärtet* waren (2 h bei 495—500° gegläht, abgeschreckt und 24 h bei 50° warmgehärtet). Das Ergebnis ist wieder aus der Fig. 9 ersichtlich.

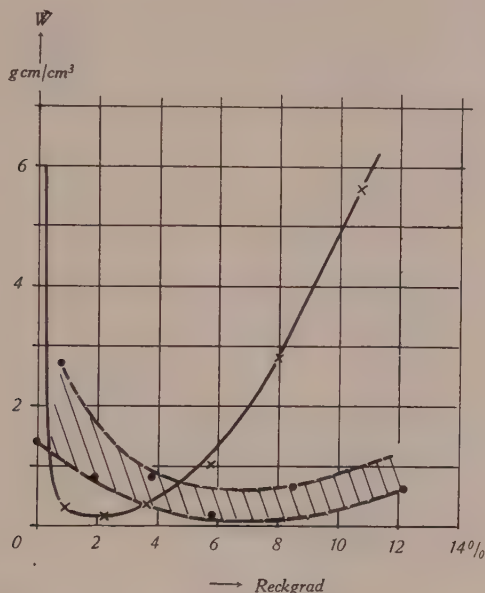


Fig. 9.

Abhängigkeit der spezifischen Formänderungsarbeit W vom Reckgrad. Reckung nach Weichglühung und nach Aushärtung. Material: Avional M.

• = Reckung nach Weichglühung. x = Reckung nach Aushärtung.

Schon bei 1% Reckgrad sind die Abschreckspannungen praktisch vollständig zerstört¹⁾. Beim Vergleich der Fig. 9 und der Fig. 6 sieht man, dass die Formänderungsarbeit rund 1000mal kleiner

¹⁾ Dass die Abschreckspannungen durch eine 2%ige Reckung oder durch eine 1%ige Stauchung ziemlich vollständig zerstört werden, geht schon aus der Arbeit von v. ZEERLEDER (l. c.) hervor.

geworden ist. Die Spannungsspitzen sind nun von der Grössenordnung $0,2 \text{ kg/mm}^2$. Nach Durchgang durch ein Minimum bei ca. 2% beginnt sofort ein enormer Anstieg. Die Reckspannungen wachsen erheblich schneller als bei den vorher weichgeglühten Stäben. Im Gegensatz zu den Ergebnissen nach der Weichglühung zeigten sich nun immer aussen Druck- und innen Zugspannungen.

Diese Spannungsverteilung ist plausibel: Bei schwacher Reckung werden die Druckspannungen in den Aussenzonen des ausgehärteten Stabes entlastet. Entsprechend vermindern sich auch die Zugspannungen im Innern und die Abschreckspannungen sind damit zum grössten Teil verschwunden. Bei weiterer Reckung wird der Werkstoff in den äusseren Partien stärker verformt als in den Innenzonen¹⁾. Infolgedessen hat man in der Entlastung innen Zug- und aussen Druckspannungen.

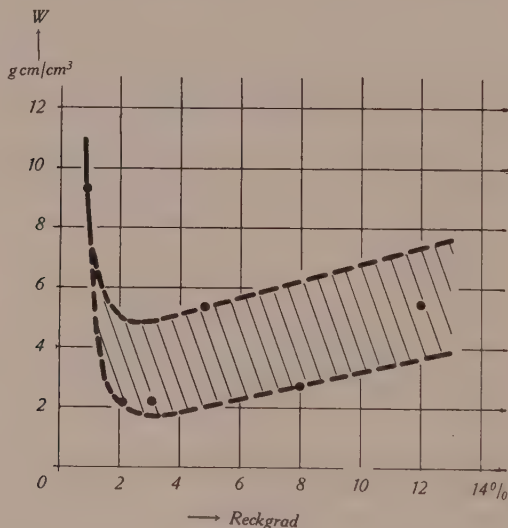


Fig. 10.

Abhängigkeit der spezifischen Formänderungsarbeit W vom Reckgrad nach dem Abschrecken. Material: Av. M.

Zuletzt untersuchten wir noch die Spannungen in Material, das unmittelbar nach dem Glühen (2 h bei 495°) und Abschrecken

¹⁾ Hierbei mag die Form der Probestäbe eine Rolle spielen. Sicher ist aber auch die bekannte Erscheinung (die z. B. KOCHENDÖRFER in seinem in Fussnote 2 erwähnten Buche beschreibt) beteiligt, dass die äusseren Partien leichter verformbar sind als die inneren.

gerecht wurde¹⁾. Das Resultat ist aus *Fig. 10* ersichtlich. Im wesentlichen haben wir hier die gleichen Verhältnisse wie bei der Reckung nach vollständiger Aushärtung. (Der grössern Streuung wurde durch Angabe eines Streubereichs Rechnung getragen.) Hauptsächlich ist wieder festzuhalten, dass bei Reckgraden von über ca. 1% die Abschreckspannungen praktisch vollständig zerstört sind. Wiederum steigen die Spannungen bei Reckgraden über 3% anscheinend schwach an.

5. Schlussfolgerungen.

Aus den eingangs genannten Gründen sind Eigenspannungen im allgemeinen nicht erwünscht. Da sie bei der Aushärtung von Aluminiumlegierungen in hohem Masse entstehen, sollten ausgehärtete Produkte einer einfachen Nachbehandlung unterworfen werden, um die inneren Spannungen zu zerstören. Am einfachsten ist es, Stangen, Rohre, Bleche usw. schwach nachzurecken resp. zu richten, wie es gebräuchlich ist. Schon bei einem Prozent Reckgrad werden die Spannungen weitgehend und bei zwei bis drei Prozent Reckgrad maximal zerstört. Dabei ist es nach unseren Versuchen gleichgültig, ob die Streckung resp. das Richten unmittelbar nach dem Abschrecken oder erst nach der Kalt- oder Warmaushärtung ausgeführt wird.

Eine andere Möglichkeit, die inneren Spannungen zu zerstören, besteht darin, dass der Gegenstand bei einer Temperatur geglüht wird, bei welcher der Spannungszustand aufgehoben wird, die Festigkeitseigenschaften aber noch nicht leiden. Leider gibt es für Avional keine solche Temperatur, denn aus *Fig. 9* geht deutlich hervor, dass die Eigenspannungen und die Festigkeit bei denselben Glühtemperaturen — bei ca. 250° — merklich zu sinken beginnen. Wenn die mechanischen Eigenschaften also diejenigen des ausgehärteten Materials sein sollen, kommt eine Erwärmungsbehandlung nicht in Frage. Spielt die Festigkeit jedoch nicht eine massgebende Rolle, so ist das Weichglühen eine sichere Massnahme, um die Eigenspannungen zu beseitigen.

Versucht man durch Steigerung der Temperatur des Abschreckwassers die Entstehung innerer Spannungen zu vermeiden,

¹⁾ Da jede Messung der Eigenspannungen an einem Stab mehrere Tage in Anspruch nahm, wurden die abgeschreckten und gereckten Proben jeweils während 4 bis 5 Tagen gelagert, bis die Kaltaushärtung fertig war. Auf diese Weise vermieden wir, dass während der Spannungsmessung irgendwelche äussere oder innere mechanische Änderungen der Proben eintraten, die mit der Kaltaushärtung zusammenhängen.

so muss man bis ca. 100° gehen. Abgesehen von den vermehrten Umständen und Kosten erleiden jedoch die mechanischen Eigenschaften hiebei bereits eine merkliche Einbusse.

Für die Erlaubnis zur Veröffentlichung dieser Arbeit spricht der Verfasser der Aluminium-Industrie A.-G. seinen besten Dank aus.

Neuhausen,
Forschungsinstitut der
Aluminium-Industrie-Aktien-Gesellschaft
(Chippis).

Röntgenometrische Untersuchungen an Kaliumphosphat bei tiefen Temperaturen.

Von **Mareel de Quervain.**

(4. X. 1944).

A. Einleitung und Problemstellung.

Über das Problem der Seignetteelektrizität liegen bereits zahlreiche experimentelle Arbeiten vor, die sich zur Hauptsache mit den Anomalien der phänomenologisch messbaren Grössen wie z. B. der spezifischen Wärme, der Dielektrizitätskonstanten, der elektrischen Polarisierung, der elastischen, piezoelektrischen und optischen Konstanten bei der als Curiepunkt bezeichneten Umwandlungstemperatur befassen. Die meisten dieser Arbeiten haben Seignettesalz zum Gegenstand, während die anorganischen Salze KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 erst in neuerer Zeit in den Vordergrund gerückt sind. Bekanntlich lehnten sich die ersten theoretischen Ansätze zur Deutung der Erscheinungen an die Theorie des Ferromagnetismus an und waren vor allem darauf gerichtet, die beobachteten Effekte *formal* richtig wiederzugeben. Die Vorgänge bei der spontanen Polarisierung des Kristalles aus der Kristallstruktur *modellmässig* zu beschreiben, war für Seignettesalz nicht möglich, da eine Strukturbestimmung fehlte. Auch heute erscheint eine Behandlung des Problems von dieser Seite her aussichtslos, trotzdem inzwischen durch die Fourieranalyse von BEEVERS und HUGHES¹⁾ die Struktur aufgeklärt worden ist. Bei Kaliumphosphat sind wir dagegen über die relativ einfache Struktur durch eine Arbeit von WEST²⁾ gut orientiert. SLATER³⁾ hat, von dieser Struktur ausgehend, eine statistische Theorie der Umwandlung von KH_2PO_4 entwickelt, welche imstande ist, die bemerkenswerteste Erscheinung, nämlich die spontane Polarisierung des Kristalls unterhalb einer Temperatur von 123°K durch passende Wahl der Parameter und der Energiefunktion zu erklären.

Alle Theorien führen die Polarisierung der Seignetteelektrika auf Elemente des Kristallgitters zurück, welche ein Dipolmoment besitzen. Oberhalb des Curiepunktes mittelt sich eine makroskopisch feststellbare Polarisierung wegen der statistischen Orientierung

der Dipole heraus; unterhalb dieser Temperatur dagegen tritt sie zufolge einer spontanen Parallelorientierung in Erscheinung. In den Annahmen über die kausalen Zusammenhänge bei der Umwandlung gehen indessen die einzelnen Theorien, von denen wir die hauptsächlichsten kurz charakterisieren wollen, auseinander.

Die Theorie von KURTSCHATOV⁴⁾ und FOWLER⁵⁾ arbeitet mit frei drehbaren Dipolen von einem fest vorgegebenen Moment ohne mechanische Kopplung. Die gegenseitige Beeinflussung besteht in einem *inneren Lorentz'schen Feld*, das bei der Curietemperatur eine Parallelstellung der Dipole gegen die Wärmebewegung erzwingt. Diese Darstellung der Seignettelektrizität entspricht der Langevin-Weiss'schen Theorie des Ferromagnetismus. Hysteresiseffekte und die Existenz von einheitlich polarisierten Elementarbezirken scheinen die Analogie zu bestärken.

Nach MÜLLER⁶⁾ ist eine *mechanische* Kopplung zwischen den Dipolen am Zustandekommen der Polarisation entscheidend beteiligt. Sie äussert sich in einer Deformation, welche der piezoelektrischen Deformation des Kristalls oberhalb des Curiepunktes entspricht. Deformation und Polarisation steigern sich gegenseitig bis zur Sättigung nach der Art eines autokatalytischen Vorganges.

JAFFE⁷⁾ vergleicht die seignetteelektrische Umwandlung mit derjenigen des Quarzes bei 575° und kommt zum Schluss, dass der Polarisation nicht massgebende Bedeutung zukommt. Diese ist vielmehr als *echte Pyroelektrizität* zu deuten, und bildet eine symmetriebedingte Begleiterscheinung.

Im Zentrum der Theorie von SLATER steht die Hydrogenbindung OHO, die nach PAULING⁸⁾ und BERNAL und MEGAW⁹⁾ wegen der Einwertigkeit des Wasserstoffions asymmetrischen Charakter besitzt. Je zwei Wasserstoffatome bilden zusammen mit einer PO₄-Gruppe einen Dipol, der nach den sechs Koordinatenrichtungen orientiert sein kann. Oberhalb des Curiepunktes sind je zwei entgegengesetzte Richtungen im Mittel gleich stark vertreten, während unterhalb des Curiepunktes die Parallelstellung der Dipole in der Richtung der *c*-Achse aus energetischen Gründen eintreten muss. Die Orientierung *eines* Dipols bestimmt wegen des strukturellen Zusammenhanges sofort die Lage der benachbarten. Daher pflanzt sich die Polarisation schlagartig durch den ganzen Kristall resp. durch einen Mosaikblock fort im Sinn einer Umwandlung erster Art. Im Gegensatz zur Müller'schen Theorie ist hier eine Deformation am Vorgang nicht beteiligt. Auch das „innere Feld“ wird nicht genannt, obwohl es in den für die verschiedenen Dipolanordnungen aufgestellten Energietermen enthalten sein muss.

In dieser Situation wäre es nun wertvoll, weitere Anhaltspunkte über das kristallographische Verhalten der Seignetteelektrika, insbesondere von KH_2PO_4 zu erhalten. Die Polarisierung muss mit einer gegenseitigen Verschiebung von Gitterbestandteilen entgegengesetzter Polarität, also mit einer Strukturänderung verbunden sein. Wichtig wäre es vor allem zu wissen, ob diese Verschiebungen das ganze Gitter umfassen, oder ob sie nur auf bestimmte Ionensorten, z. B. den Wasserstoff, beschränkt sind. Bei Seignettesalz sind folgende kristallographische Veränderungen am Curiepunkt bekannt: Nach MÜLLER⁶⁾ erleidet die Elementarzelle eine Winkeländerung γ_z von $2,75'$ und nach VIGNES¹⁰⁾ eine Ausweitung von ca. $0,9\%$. STAUB¹¹⁾ und NÉMET¹²⁾, ferner KRUTTER und WARREN¹³⁾ untersuchten an der gleichen Substanz die Intensitäten von Röntgenreflexionen, die Erstgenannten im besonderen ihre Abhängigkeit von einem elektrischen Feld. Anzeichen von strukturellen Änderungen konnten auf diesem Weg nachgewiesen werden. Entsprechende Messungen an Kaliumphosphat fehlen bis dahin und sollen hier durchgeführt werden.

Unklarheit herrscht ferner über die Grösse und Anordnung der „Weiss'schen Elementarbezirke“. Ihre Existenz wird aus der Diskrepanz zwischen der mit einem elektrischen Feld erreichbaren Sättigungspolarisation und der sich beim Abkühlen ohne Feld einstellenden spontanen Polarisation abgeleitet. Auch die Hysteresis der Polarisation und die dabei auftretenden Barkhausen-Sprünge werden darauf zurückgeführt. Abschätzungen über die Grösse fallen bei den verschiedenen Autoren sehr unterschiedlich aus. KOBEKO und KURTSCHATOV¹⁴⁾ nehmen kleine Bereiche an, die nur je ca. 10^5 Moleküle enthalten. DAVID¹⁵⁾ schliesst ebenfalls auf kleine Bereiche; MÜLLER dagegen fordert auf Grund von beobachteten Barkhausensprüngen grosse makroskopisch sichtbare Bereiche. Wir haben in einer kurzen Mitteilung bereits über einzelne diesbezügliche Beobachtungen berichtet¹⁶⁾¹⁷⁾.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, mit Hilfe von röntgenometrischen Messungen die *kristallographischen Veränderungen der Elementarzelle* von KH_2PO_4 und soweit als möglich auch der Struktur zwischen Zimmertemperatur und der Curietemperatur, vor allem aber bei der seignetteelektrischen Umwandlung am Curiepunkt $\Theta = 123^\circ \text{K}$ zu ermitteln. (Einzelne Untersuchungen sind auch auf KD_2PO_4 übertragen worden, dessen hochliegender Curiepunkt [ca. 213°K] dem Experiment leichter zugänglich ist als derjenige von KH_2PO_4 .) Ferner sollen weitere Untersuchungen über die *Elementarbezirke* mitgeteilt werden.

Die *röntgenometrischen Methoden* dürfen für die Bestimmung von Strukturänderungen in dem speziell vorliegenden Fall nur mit gewissen Vorbehalten angewandt werden. Erstens kann über die *Lage und Verschiebung von Wasserstoffatomen* kaum etwas ausgesagt werden, was gerade im Hinblick auf die Theorie von Slater ausserordentlich wichtig wäre. Zweitens muss berücksichtigt werden, dass die Intensitäten der Röntgenreflexionen, welche als Basis für die Strukturbestimmung dienen, nicht allein von der *Geometrie des Gitters*, sondern auch von dessen Schwingungszustand abhängen. (Debye'scher *Wärmefaktor*). Dass dieser bei der Umwandlung unverändert bleibt, steht nicht fest und ist auch nicht zu erwarten. STAUB¹⁸⁾ hat direkt versucht, die spontanen Intensitätsänderungen von Röntgenreflexionen ausschliesslich auf Veränderungen des Wärmefaktors zurückzuführen unter der Annahme, dass keine Strukturänderungen beteiligt sind. Schliesslich ist der *Mosaikaufbau* des Kristalls noch von Bedeutung für die Intensitäten der Reflexionen. Die bereits publizierten Resultate zeigen, dass auch hier mit Änderungen gerechnet werden muss. Bei der Diskussion der Messungen werden wir näher auf diese störenden Einflüsse eingehen.

B. Messungen und Resultate.

1. Die Elementarzelle von KH_2PO_4 und ihre Temperaturabhängigkeit.

Die Grundlage für unsere Messungen bildet die Strukturbestimmung von WEST. Alle strukturellen Änderungen werden auf die dort angegebenen und für Zimmertemperatur als richtig angenommenen Werte der Elementarabstände und Basisparameter bezogen. Die Genauigkeit unserer relativen Messungen übertrifft diejenigen der genannten Absolutwerte. Weil in erster Linie die Änderungen interessieren, stört die willkürliche Normierung auf die West'schen Angaben weiter nicht.

Für den tetragonalen Kristall der Klasse D_{2d} ist eine kristallographische Aufstellung gewählt worden, die gegenüber der üblichen um 45° in der c -Achse gedreht ist. Die flächenzentrierte Elementarzelle umfasst damit das doppelte Volumen der von West verwendeten innenzentrierten und enthält 8 Moleküle. Alle Angaben, also auch die Indices der Reflexionen, beziehen sich auf dieses gedrehte System.

Bei Zimmertemperatur (290°K) betragen die Elementarabstände:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 10,508 \text{ \AA} \\ c &= 6,970 \text{ \AA} \end{aligned}$$

Die ersten gröberen Untersuchungen der Streuwinkel 2ϑ zwischen Zimmertemperatur und ca. 110°K ergaben, dass die Zelle, abgesehen von der thermischen Schrumpfung, keine bedeutenden Veränderungen erleidet. Auch die Linienintensitäten von Pulverdiagrammen erscheinen auf den ersten Blick in ihrem gegenseitigen Verhältnis unverändert, wie das bei 293° und ca. 110° aufgenommene Doppeldiagramm (Fig. 1) zeigt.

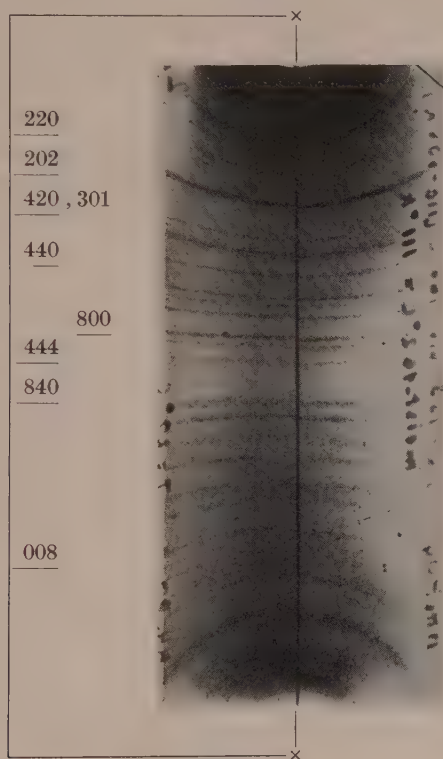


Fig. 1.

Debye-Scherrer-Aufnahme von KH_2PO_4 . Linke Bildhälfte bei Zimmertemperatur (293°), rechte Hälfte bei $T = 110^\circ\text{K}$.

Die seignetteelektrische Umwandlung von KH_2PO_4 ist also *nicht* mit tiefgreifenden strukturellen Veränderungen verbunden. Dies wird der Grund dafür sein, dass WEST die Anomalie bei 123°K nicht bemerkt hat, als er Reflexionen zur Bestimmung des Temperaturfaktors bis zur Temperatur der flüssigen Luft verfolgte. Erst genauere Messungen mit einem Ionisationsspektrographen ($\text{Cu-K}\alpha$ -Strahlung) an Reflexionen höherer Ordnung haben am Curiepunkt

eine geringe Deformation der Elementarzelle zutage gefördert, ähnlich wie sie bei Seignettesalz beobachtet wurde. Sie besteht in einer Ausweitung der a_1 -Achse und einer Kontraktion der a_2 -Achse, nebst einer geringeren Ausweitung in der c -Richtung. Im spontan polarisierten Zustand ist KH_2PO_4 also *orthorhombisch*, und zwar kommt als einzige polare Klasse nur C_{2v} in Frage. Infolge der Deformation reduziert sich die vierzählige Drehspiegelachse zu einer Digyre, und damit fallen die Digyren senkrecht zur c -Achse weg. Um für den deformierten Kristall das gleiche rechtwinklige Achsenkreuz und damit die gleiche Indizierung beibehalten zu können, ist die flächenzentrierte Aufstellung gewählt worden. In den Pulverdiagrammen kann die geringe Abweichung vom tetragonalen System bei Verwendung gedrehter Präparate nicht erkannt werden. Aufnahmen mit ruhenden Pulverstäbchen dagegen, welche die einzelnen Pulverkörner wiedergeben, zeigen an den in Frage kommenden Linien eine Aufspaltung.

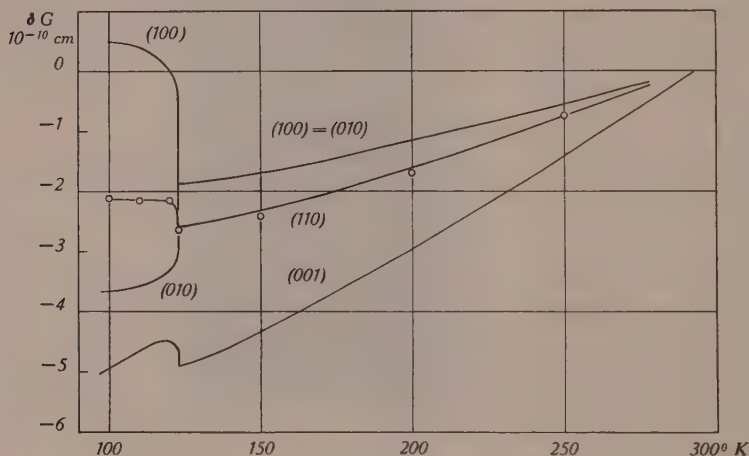


Fig. 2.

Temperaturabhängigkeit der Elementarabstände von KH_2PO_4 . Kurven abgeschlossen bei 293 an Werte von West. \circ = Berechnete Punkte aus (100).

Aus der Fig. 2 ist der Temperaturverlauf der Identitätsabstände in der a - und c -Richtung wiedergegeben. Zur Kontrolle ist auch der Elementarabstand von Ebenen (110) gemessen und mit den anderen Resultaten verglichen worden.

Die Übereinstimmung zwischen der gemessenen und berechneten Kurve von (110) bestätigt, das KH_2PO_4 bis hinunter zum

Curiepunkt tetragonal bleibt. Aus den Messungen können noch folgende Zahlenwerte entnommen werden:

$$\begin{array}{l} \text{Mittlerer linearer Ausdehnungs-} \\ \text{koeffizient für } T > \Theta \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1/a \cdot da/dT = 2,0 \cdot 10^{-5} \\ 1/c \cdot dc/dT = 4,2 \cdot 10^{-5} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Mittlerer kubischer Ausdehnungs-} \\ \text{koeffizient für } T > \Theta \end{array} \left\{ 1/V \cdot dV/dT = 8,2 \cdot 10^{-5} \right.$$

$$\text{Achsenverhältnis } a:c \quad \text{für } T = 293^\circ \text{ K} = 1:0,6634$$

$$\text{Achsenverhältnis } a:c \quad \text{für } T = 125^\circ \text{ K} = 1:0,6607$$

$$\text{Achsenverhältnis } a:b:c \quad \text{für } T = 110^\circ \text{ K} = 1:0,9924:0,6582$$

(Am orthorhombischen Kristall bezeichnen wir die verkürzte *a*-Achse als *b*-Achse.)

Die Winkeländerung $\Delta\gamma$ zwischen zwei Ebenen (110) und ($\bar{1}\bar{1}0$) des Wachstumsprismas beträgt bei Abkühlung von 123° bis 100° K $27'$, also ca. zehnmal soviel wie bei Seignettesalz. Wie später gezeigt wird, lassen sich die Veränderungen der Elementarzelle nicht ohne weiteres auf einen makroskopischen Kristall übertragen, so dass die Winkeländerung am Wachstumsprisma (110) unter Umständen nicht zu erkennen ist.

Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit zwischen dem Temperaturverlauf der Deformation und der spontanen Polarisation unterhalb des Curiepunktes. Besonders augenfällig wird die Parallelität, wenn man die Polarisation, gemessen von BANTLE und von ARX¹⁹⁾, mit der Winkeländerung $\Delta\gamma$ vergleicht (Fig. 3). Die Kurven sind bei 100° und 123° zur Deckung gebracht.

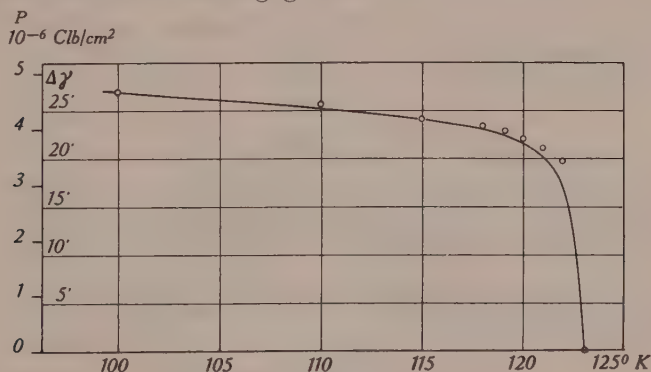


Fig. 3.

Temperaturverlauf der Polarisation nach Bantle und von Arx (ausgezogene Kurve). Winkeländerung $\Delta\gamma$ zwischen den Ebenen (110) und ($\bar{1}\bar{1}0$) (Kreise).

Es fragt sich nun, ob für die Proportionalität zwischen Polarisation und Deformation die gleiche Konstante gilt, wie beim Piezo-

effekt oberhalb des Curiepunktes. MÜLLER⁶⁾ hat bereits darauf hingewiesen, dass dies bei Seignettesalz zutrifft. Direkte Messungen der Polarisierung als Funktion der Deformation oberhalb des Curiepunktes fehlen leider. Der Zusammenhang lässt sich aber auf zwei verschiedene Arten indirekt ermitteln: Einerseits aus den piezoelektrischen und elastischen Gleichungen unter Elimination der Kraft und andererseits aus den Gleichungen des inversen Piezoeffekts und der Feldabhängigkeit der Polarisierung (Suszeptibilität) unter Elimination des Feldes.

In der von uns gewählten Aufstellung lautet das Schema der Piezomoduln für die Klasse D_{2d} :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} - d_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die uns interessierenden piezoelektrischen und elastischen Gleichungen heissen also:

$$P_z = d_{31}X_x + k_3E_z$$

$$x_x = s_{11}X_x + d_{31}E_z$$

$$y_y = s_{12}X_x - d_{31}E_z$$

$$\begin{array}{ll} P = \text{Polarisation} & x \} \\ X = \text{Druck} & y \} = \text{spez. Längenänderung} \\ k = \text{el. Suszeptibilität} & s = \text{Elastizitätskonstante} \\ E = \text{el. Feldstärke} & \end{array}$$

In diesen Gleichungen ist der Einfluss eines elektrischen Feldes enthalten. Setzt man $E_z = 0$, so folgt

$$P_z = \frac{d_{31}}{s_{11} + s_{12}} (x_x + y_y)$$

In der West'schen Aufstellung wird diese Gleichung einfacher dargestellt durch $P_z = d'_{36}/s'_{66} \cdot x'_y$, denn es gilt $d'_{36} = 2d_{31}$ und $s'_{66} = 2(s_{11} + s_{12})$, ferner $x'_y = x_x + y_y$.

Die andere Beziehung gewinnt man, wenn man $X_x = 0$ setzt und das Feld eliminiert:

$$P_z = \frac{k_3}{2d_{31}} (x_x + y_y)$$

Ist wirklich die seignetteelektrische und die piezoelektrische Polarisierung in gleicher Weise eine Funktion der Deformation $(x_x + y_y)$, so müssen die Quotienten $d_{31}/(s_{11} + s_{12})$ bzw. $k_3/2d_{31}$ den gleichen Wert besitzen wie $P_z/(x_x + y_x)$ unterhalb des Curiepunktes.

Nach Messungen von BANTLE und CAFLISCH²⁰⁾ und v. ARX²¹⁾ kennen wir den Temperaturverlauf von d_{31} bzw. d'_{36} . Er ist charakterisiert durch einen *enormen* Anstieg auf den tausendfachen Betrag gegen den Curiepunkt hin. Die Konstante $s_{11} + s_{12}$ bzw. ε'_{66} kann aus Resonanzmessungen von LÜDY²²⁾ angenähert berechnet werden. Auch hier ist eine Zunahme gegen den Curiepunkt festzustellen. Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität k_3 entnehmen wir der Arbeit von BUSCH²¹⁾.

Aus den in Fig. 3 wiedergegebenen Messungen folgt als Proportionalitätskonstante zwischen spontaner Polarisation und Deformation:

$$\left(\frac{P_z}{(x_x + y_y)} \right)_{T=110^\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 6,15 \cdot 10^{-4} \text{ Clb/cm}^2 \\ = 1,85 \cdot 10^6 \text{ CGS} \end{array} \right.$$

Während die Berechnung aus Piezomodul und Elastizitätskonstanten für $T = 133^\circ \text{ K}$ bei einer starken Temperaturabhängigkeit einen abweichenden Wert von $0,88 \cdot 10^6 \text{ CGS}^*)$ ergibt, folgt aus der Suszeptibilität und dem Piezomodul

$$\left(\frac{k_3}{2d_{31}} \right)_{T=133^\circ} = 1,95 \cdot 10^6 \text{ CGS}$$

eine bemerkenswerte Übereinstimmung, wenn man berücksichtigt, dass Zähler und Nenner für sich im Bereich von Zehnerpotenzen variieren.

BANTLE und CAFLISCH²⁰⁾ haben einerseits auf den weitgehend parallelen Verlauf von k_3 und d'_{36} oberhalb Θ hingewiesen und andererseits gezeigt, dass der Quotient noch etwas temperaturabhängig bleibt. Aus Fig. 4 ist ersichtlich, dass k_3/d'_{36} eine beinahe lineare Temperaturfunktion ist.

Unser Messpunkt bei 110° liegt in der allgemeinen Richtung, welche die Kurve oberhalb des Curiepunktes hat. Wir vermuten daher, dass am Curiepunkt, trotz der extremen Werte, welche k_3 und d'_{36} für sich annehmen, keine wesentliche Unstetigkeit für den Quotienten k_3/d'_{36} vorhanden ist.

Streng genommen ist unterhalb des Curiepunktes für die Elastizitätskonstanten und Piezomoduln nicht mehr das der Klasse D_{2d} zugehörige Schema anzuwenden, sondern das für C_{2v} gültige. Es lautet:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

*) Die Werte für s'_{66} verdanke ich Herrn Dr. B. MATHIAS.

Aus der untersten Zeile, die uns allein interessiert, geht hervor, dass $d_{31} \neq d_{32}$. Ähnliches gilt für die Elastizitätskonstanten. Ferner tritt als neuer Modul d_{33} auf. Durch Druck in der c -Achse kann demnach die Polarisierung verändert, offenbar vermindert, werden. Dieser Effekt ist in der höheren Symmetrieklasse als quadratischer Piezoeffekt bezeichnet und auf Moduln höherer Ordnung zurückgeführt worden. JAFFE⁷⁾ hat bereits richtig darauf aufmerksam gemacht, dass infolge der Deformation neue Moduln in Erscheinung treten müssen. Wegen der Umlappung der Polarisierung in einem elektrischen Feld muss die Elektrostriktion $z_z = d_{33} \cdot E_z$ bilinear verlaufen (d_{33} ändert mit dem Feld das Vorzeichen).

$$\frac{\kappa}{d'_{36}} \cdot 10^6 \text{ CGS}$$

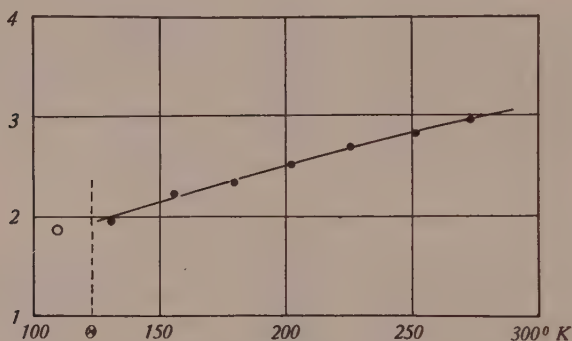


Fig. 4.

Temperaturverlauf des Quotienten $\frac{k_3}{d'_{36}}$.

- Werte nach Messungen von Busch, Bantle und v. Arx.
- Quotient $P_z/(x_x + y_y)$ aus röntgenometrischen Messungen.

Die Messungen der Identitätsabstände zeigen zusammenfassend, dass *piezoelektrische* und *spontane* Polarisierung der Symmetrie und Größenordnung nach mit *derselben* Deformation der Elementarzelle verknüpft sind. Wir schliessen daraus, dass beide in der Geometrie des Kristallgitters begründet sind und auf den gleichen strukturellen Verschiebungen beruhen.

Mit unserer Apparatur konnte die Temperatur um höchstens 20° unter den Curiepunkt von KLi_2PO_4 gesenkt werden. Über das kristallographische Verhalten dieses Salzes am sog. „unteren Curiepunkt“ bei ca. 90° K , kann daher nichts ausgesagt werden. Hingegen ist der entsprechende Temperaturbereich bei KD_2PO_4 leicht zugänglich. Wie erwartet, bleibt KD_2PO_4 bis hinunter zur Temperatur der flüssigen Luft orthorhombisch und damit auch polari-

siert. Übereinstimmend mit Messungen von BANTLE²⁴⁾ kann die Umorientierung der Polarisation durch ein elektrisches Feld unterhalb 140° nur noch schwer erzwungen werden. Zweifellos verhält sich auch KH_2PO_4 bei tieferen Temperaturen entsprechend. (Siehe auch BUSCH und GANZ²⁵⁾.)

2. Die seignetteelektrischen Elementarbezirke.

Über die Grösse der in KH_2PO_4 vorhandenen einheitlich polarisierten Elementarbezirke scheinen die grossen Barkhausensprünge, welche in elektrischen Hysteresiskurven auftreten, eindeutig Aufschluss zu geben (v. ARX²¹⁾, ZWICKER²⁶⁾ u. a.). Aus der geringen Zahl von Sprüngen gelangt man zu Abmessungen von Millimetern. Damit ist aber ein Teil der elektrooptischen Messungen von ZWICKER nicht in Übereinstimmung zu bringen. Unterhalb des Curiepunktes fällt nämlich die Doppelbrechung eines feldfrei abgekühlten Kristalls bei transversaler Blickrichtung (parallel a oder b) genau zusammen mit dem Mittelwert aus der Doppelbrechung des nach $+c$ und $-c$ einheitlich polarisierten Kristalls

$$\frac{n'_a - n_c}{\lambda} = \frac{(n_a + n_b)/2 - n_c}{\lambda}$$

Das lässt sich nur erklären, wenn man annimmt, dass der feldfrei abgekühlte Kristall zu gleichen Teilen aus einer grossen Zahl positiver und negativer Bereiche besteht. Dann nämlich muss der Kristall makroskopisch optisch einachsrig bleiben und wird nur eine geringe, mit der allgemeinen Gitterausweitung zusammenhängende Doppelbrechungsänderung zeigen. Der Einfluss des elektrischen Feldes auf die Doppelbrechung liegt hauptsächlich in der Parallelorientierung der Bereiche und nur zu einem Bruchteil in einer wirklichen Veränderung der Brechungsindices. Aus der Streuung der spontanen Doppelbrechung gegenüber dem oben erwähnten Mittelwert kann statistisch die Anzahl der Bereiche berechnet werden. Nimmt man eine mittlere Streuung δ von 0,5% an, so müsste das untersuchte Kristallvolumen von ca. 1 cm^3 aus $N = 1/\sqrt{\delta^2} = 4 \cdot 10^4$ Bezirken bestehen, vorausgesetzt, dass sie gleich gross und in ihrer Orientierung unabhängig sind. Diese beiden Voraussetzungen sind allerdings nicht begründet. Immerhin fordern die Beobachtungen von ZWICKER gleiche Volumen von beiden Bereichsorten in ungefähr gleichmässiger Durchmischung. Die Frage nach der Grösse der Bezirke ist also noch durchaus offen.

Bei den Untersuchungen von Röntgenreflexionen am Einkristall konnte eine Erscheinung beobachtet werden, welche die letztgenannte Beobachtung von ZWICKER zu stützen scheint.

Zerfällt ein KH_2PO_4 -Kristall in Bereiche von entgegengesetzter Polarisationsrichtung, so sind die kristallographischen Achsensysteme der beiden Bereicharten gegeneinander um 90° in der c -Achse gedreht und an der $a-b$ -Ebene gespiegelt. Kristallographisch gesprochen, wäre also KH_2PO_4 in sich verzwilligt nach der Achse $[001]$ und der Ebene (001) . Weil die Drehung um c 90° und nicht 180° beträgt, würde man von Wendezwillingen sprechen (NIGGLI²⁷). Parallel zu einer am unpolarisierten tetragonalen Kristall nach (100) geschnittenen Fläche liegen also im bereichsweise polarisierten, orthorhombischen Zustand gleichzeitig Netzebenen (100) und (010) . Die Netzebenenabstände von (100) und (010) unterscheiden sich nur wenig voneinander. Also sollten die Reflexionen $(h00)$ und $(0h0)$ gleichzeitig an einer Fläche erhalten werden, wenn der primäre Röntgenstrahl auf beiderlei Bereiche trifft und der Kristall um die geringe Differenz der Glanzwinkel gedreht wird. Wie Fig. 5

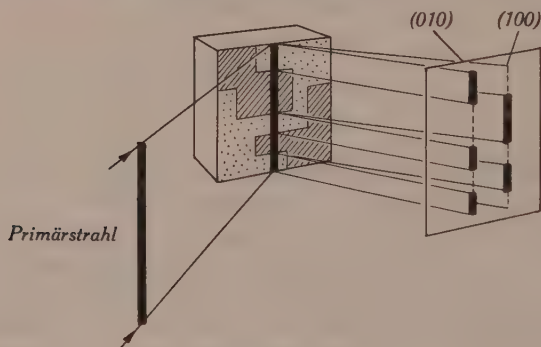


Fig. 5.

Gleichzeitiges Auftreten der Reflexionen $(h00)$ und $(0h0)$ an der gleichen Fläche infolge entgegengesetzt polarisierter Elementarbereiche.

veranschaulicht, müssen sich die Bereiche in der Struktur der photographisch aufgenommenen Reflexionen abzeichnen, so dass sich ihre Ausdehnung parallel zur Primärstrahlblende direkt messen lässt. Dreht man den Kristall um 90° in der Reflexionsebene, bekommt man die Ausdehnung senkrecht dazu.

Wie gross müssen die Bereiche mindestens sein, damit sie sich noch abzeichnen? Durch Abdecken des Kristalls mit dünnen Drähten und Metallbändern konnte ermittelt werden, dass Bereiche von ca. 0,1 mm Ausdehnung noch erkennbar sein sollten.

Fig. 6a zeigt die Reflexionen (800) und (080) von KH_2PO_4 , aufgenommen an der gleichen Fläche eines feldfrei auf 113°K abgekühlten Kristalls. Die Linien sind von gleicher Intensität und enthalten jeder alternierenden Struktur.

Dass sie wirklich entgegengesetzt polarisierten Bereichen zuzuordnen sind, beweisen Fig. 6b und 6c, welche nach Anlegen eines elektrischen Feldes von 200 V/cm in der $+c$ - und $-c$ -Richtung (senkrecht zur Längenausdehnung der Linien) aufgenommen wurden. Eine Linie ist jeweils auf Kosten der anderen geschwächt. Dasselbe gilt für die Reflexionen (12 0 0) und (0 12 0). Bei diesen sind die Linien K_{α_1} und K_{α_2} ganz aufgespalten (Fig. 6d).

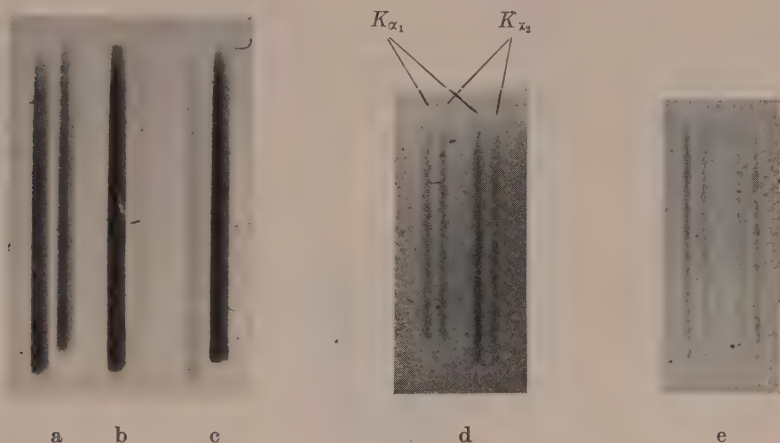


Fig. 6.

- a Reflexion (800) bzw. (080) von KH_2PO_4 bei $T = 113^\circ \text{K}$ ohne elektr. Feld E_z ;
 b und c Reflexion (800) bzw. (080) von KH_2PO_4 bei $T = 113^\circ \text{K}$ mit elektr. Feld E_z ;
 d Reflexion (12 0 0) von KH_2PO_4 bei $T = 110^\circ \text{K}$. c-Achse senkrecht zur Linie;
 e Reflexion (12 0 0) von KH_2PO_4 bei $T = 110^\circ \text{K}$. c-Achse parallel zur Linie.

Wir ziehen den Schluss, dass die Elementarbereiche tatsächlich klein (unter $0,1 \text{ mm}$), und über den Kristall gleichmässig verteilt sind. Dazu ist allerdings zu bemerken, dass die Cu-Strahlung im Gegensatz zu den optischen Messungen nur eine dünne Oberflächenschicht von ca. $0,1 \text{ mm}$ Stärke erfasst. Es fragt sich nun, wie die grossen Barkhausensprünge zustande kommen. Man hat offenbar zu unterscheiden zwischen Kristallbereichen, die in einem elektrischen Wechselfeld als Ganzes umklappen und den Elementarbereichen, in die der Kristall am Curiepunkt spontan zerfällt. Wir stellen uns vor, dass eine grosse Zahl von Elementarbezirken zu einem *übergeordneten Verband* zusammengeschlossen sein kann, der wegen verschiedener mechanischer Verspannung oder wegen

Wachstumsstörungen gegen einen Nachbarverband abgegrenzt ist und ein etwas anderes Koerzitivfeld benötigt. Die Barkhausensprünge werden also durch sprunghafte Parallelorientierung in den übergeordneten Verbänden verursacht.

An den Aufnahmen Fig. 6a–6d, bei denen die Linien senkrecht zur c -Richtung verlaufen, fällt eine Höhenverschiebung zwischen $(h00)$ und $(0h0)$ auf. Fehler in der Justierung des Kristalls kommen als Ursache nicht in Frage, denn die Verschiebung erhält sich konstant nach wiederholtem Neujustieren, verschwindet aber, wenn man die Linien parallel zu c aufnimmt (Fig. 6e). Es gibt nur die eine Erklärung, dass alle positiv polarisierten Bereiche gegen die negativ polarisierten um die c -Richtung etwas verdreht sind. Die eine Sorte streut also etwas mehr nach oben, die andere mehr nach unten. Aus der Höhenverschiebung berechnet sich die Verdrehung $\Delta\alpha$ zu $26'$. Vergleicht man diesen Winkel mit der Winkeländerung $\Delta\gamma$ am Prisma (110) , so zeigt sich, dass

$$\Delta\alpha \approx \Delta\gamma \text{ (Vergl. Fig. 3)}$$

Nehmen wir an, dass die Bereiche durch Prismen von der Form $\{110\}$ begrenzt sind, dann folgt die beobachtete Verdrehung zwanglos, wenn wir die entgegengesetzten Bereiche zu einer alternierenden Struktur zusammenfügen (Fig. 7).

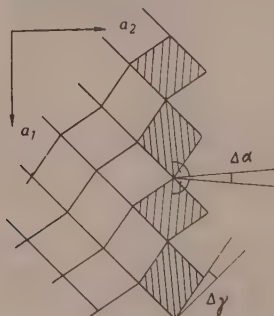


Fig. 7.

Anordnung der Elementarbereiche in KH_2PO_4 (schematisch).

Solche Wechselstrukturen, welche aus Kristalliten von niedrigerer Symmetrie als die des Makrokristalls zusammengesetzt sind und sich bei einer bestimmten Temperatur auflösen, sind bekannt. Leucit z. B. besteht unterhalb 600°C aus einer pseudokubischen Wechselstruktur tetragonaler Lamellen und geht oberhalb dieser Temperatur in eine echt kubische Modifikation über. Boracit

verhält sich gleich bei 265°C . Wie KH_2PO_4 gehört auch Boracit einer azentrischen Kristallklasse an (T_a)

NIGGLI²⁷⁾ bezeichnet Modifikation einer Substanz, die durch geringe struktursymmetrische Unterschiede charakterisiert sind als „Unterarten“. Hoch- und Tieftemperaturquarz gehören dazu. Die bei höherer Temperatur stabile Unterart besitzt gewöhnlich die höhere (vollkommene) Symmetrie.

Im ganzen kristallographischen Verhalten fällt also die Umwandlung von KH_2PO_4 trotz ihrer elektrischen Besonderheiten nicht aus der Reihe der als „gewöhnlich“ bezeichneten bekannten Kristallumwandlungen.

In der erwähnten ersten Publikation¹⁶⁾ finden sich zwei Aufnahmen von (800) bzw. (080) an KD_2PO_4 , die ein starkes Alternieren der Intensität zwischen den beiden Linien zeigen, wie es zu erwarten wäre, wenn die Bereiche von der Grössenordnung von Millimetern sind. Weitere Aufnahmen haben indessen diesen Schluss nicht bestätigt. Der Effekt ist allein auf Verwerfungen und Verdrehungen der oben erwähnten Makrobezirke zurückzuführen. Sind

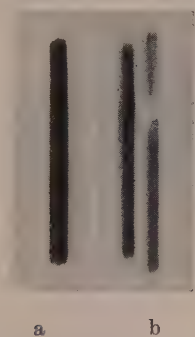


Fig. 8.

a Reflexion (800) von KD_2PO_4 bei Zimmertemperatur (293°);

b Reflexionen (800) und (080) bei $T=205^{\circ}\text{K}$. (Linien senkrecht zur c -Richtung).

diese Verdrehungen grösser als die Schwenkung des Kristalls während der Aufnahme, kann die eine oder andere Linie bereichsweise ausgelöscht werden. Je nach der Richtung der Verdrehung treten auch Lücken und Überdeckungen auf. Ein Beispiel zeigt Fig. 8b (Reflexionen (800) und (080) an KD_2PO_4 bei $T=205^{\circ}\text{K}$. Linien senkrecht zur c -Richtung). Schliesst man die unterbrochene Linie zusammen und zieht die sich überdeckende auseinander, so erhalten beide gleiche Länge wie die bei Zimmertemperatur aufgenommene Linie (Fig. 8a). Oberhalb der Nahtstelle sind offenbar die Bereiche (800) nach oben und die Bereiche (080) nach unten gedreht, unter-

halb der Naht umgekehrt: Sind mehrere Knickstellen vorhanden, können grosse Elementarbereiche vorgetäuscht werden.

Eigenartig ist das Verhalten der Elementarbereiche in einem elektrischen Feld. Wir legen in die c -Richtung eines polarisierten KH_2PO_4 -Kristalls ein variables elektrisches Feld und verfolgen mit dem Ionisationsspektrographen einerseits die Veränderung der Streuwinkel von $(h00)$ und $(0h0)$ und anderseits die Stellung des Kristalls, welche maximale Reflexionsintensität ergibt, in Funktion der Feldstärke. Die c -Richtung des Präparates liegt bei diesem Versuch parallel zur Spektrographenachse. Normalerweise sind Streuwinkel und Kristallstellung fest miteinander gekoppelt, indem z. B. bei einer thermischen Gitterkonstantenänderung der Kristall um den halben Winkelwert der Verschiebung der Reflexion nachjustiert werden muss. Wir müssen hingegen mit zunehmender Feldstärke an der Kristallstellung erhebliche Korrekturen vorneh-

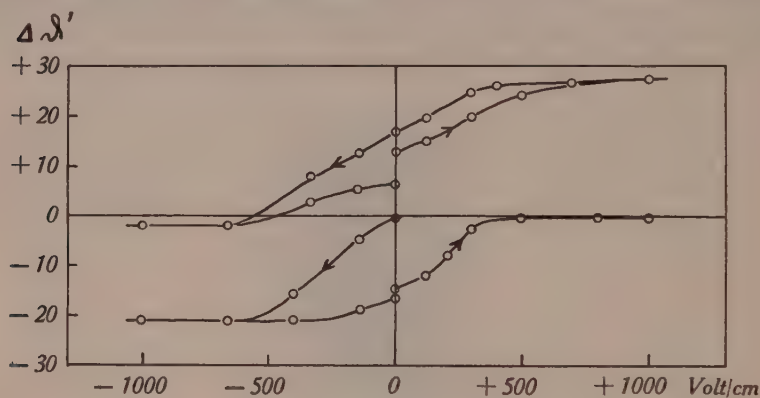


Fig. 9.

Verdrehung der Elementarbereiche gegen die Schnittfläche des Kristalls in Abhängigkeit von einem elektrischen Feld.

men, ohne dass sich überhaupt die Reflexion merklich verschiebt. Das bedeutet, dass sich die Elementarbereiche unter der Wirkung des elektrischen Feldes um die c -Achse drehen, ohne sich in ihrer Gestalt messbar zu verändern. (Die Veränderung des Elementarabstandes muss bei einer Feldstärke von 5000 Volt/cm kleiner als 0,001 Å sein). Die Verdrehung $\Delta\theta'$ der Netzebenennormalen von (100) und (010) als Funktion der Feldstärke ist in Fig. 9 dargestellt.

Als Bezugsebene dient die rückwärtige Auflagefläche des Kristalls. Das Feld bewirkt natürlich auch ein Umklappen der Polarisation in den Bereichen und hat Schwächung der einen und Verstärkung der anderen Linie zur Folge. Nach Fig. 9 stellt sich die

jeweils zahlenmässig vorherrschende Bereichsorte der Auflagefläche des Kristalls parallel, während die restlichen, noch nicht umgeklappten Bereiche, welche an der Oberfläche kleben gegen die Bezugsfläche um den Winkel $\Delta\alpha = 20' - 28'$ verdreht sind, in Übereinstimmung mit der Höhenverschiebung der Linien auf den photographischen Aufnahmen. Bemerkenswert ist noch, dass eine Reflexion ($h00$) oder ($0h0$), welche durch ein elektrisches Feld zum Verschwinden gebracht wird, nach Abschalten des Feldes und Kurzschliessen des Kristalls im Verlauf von ca. 15 Minuten wieder erscheint, ohne aber die Hälfte der Maximalintensität wieder zu erlangen.

Die photographischen Aufnahmen liefern einmal eine obere Grenze für die Grösse der Bereiche. Es gelingt auf anderem Wege, diese Grenze noch herunterzudrücken. An Pulveraufnahmen, bei denen das Präparat nicht gedreht wird, kann nämlich kontrolliert werden, ob die einzelnen Körner sich homogen als Elementarbereiche polarisieren, oder ob sie nochmals in kleinere, entgegengesetzt polarisierte Bereiche zerfallen. Solche Diagramme, aufgenommen bei $T < \Theta$ zeigen in der Tat, dass in Reflexionen (hkl) mit $h \neq k$ gelegentlich einzelne Körner doppelt abgezeichnet sind (nicht zu verwechseln mit dem K_α -Doublett). Damit ist erwiesen, dass mindestens diese Körner von ca. 0,05 mm Durchmesser aus mehreren Elementarbezirken bestehen. Die untere Grenze für die Grösse der Bereiche kann wegen der Tatsache, dass die Linien oberhalb und unterhalb Θ gleich scharf erscheinen, ca. zu 10^{-4} cm angenommen werden.

3. Die Basisstruktur von KH_2PO_4 .

Nach WEST ist die Basis von KH_2PO_4 durch folgende, auf die flächenzentrierte Aufstellung umgerechneten Daten gekennzeichnet:

Raumgruppe: D_{2d}^{12}

$$\left. \begin{array}{l} \text{Punktlagen: } 8 \text{ P in } 000; \quad \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \\ \quad \quad \quad 8 \text{ K in } 00\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{4} \\ \quad \quad \quad 32 \text{ O in } xyz; \quad \frac{1}{4} - x \frac{1}{4} + y \frac{1}{4} + z; \\ \quad \quad \quad \quad \quad \bar{x} \bar{y} z; \quad \frac{1}{4} + x \frac{1}{4} - y \frac{1}{4} + z; \\ \quad \quad \quad \quad \quad \bar{y} x \bar{z}; \quad \frac{1}{4} + y \frac{1}{4} + x \frac{1}{4} - z; \\ \quad \quad \quad \quad \quad y \bar{x} \bar{z}; \quad \frac{1}{4} - y \frac{1}{4} - x \frac{1}{4} - z \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0; \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}; 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

Mit den Parameterwerten:
$$\left. \begin{array}{l} x_o = 0,112 \\ y_o = 0,032 \\ z_o = 0,139 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Einheiten der} \\ \text{Elementarabstände} \end{array}$$

Für die 16 H-Atome ist die wahrscheinlichere der zwei 16-zähligen Punktlagen gewählt worden, nämlich

$$\left(x \frac{1}{4} - x \frac{1}{8}; \bar{x} \frac{3}{4} + x \frac{1}{8}; \frac{1}{4} - x \bar{x} \frac{7}{8}; \frac{3}{4} + x x \frac{7}{8} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0; \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}; 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

mit $x_H = \frac{1}{8} - \frac{x_o + y_o}{2} = 0,050$.

Fig. 10 stellt die Vertikalprojektion der Elementarzelle auf die Ebenen der a -Achsen dar.

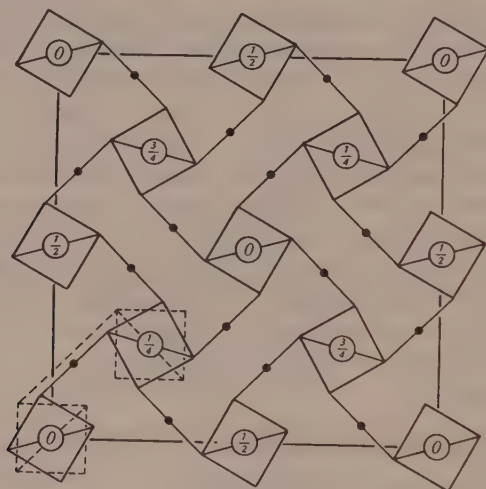


Fig. 10.

Struktur von KH_2PO_4 bei Zimmertemperatur. Projektion parallel zur c -Richtung. Gestrichelt: Lage der PO_4 -Tetraeder in YPO_4 . Kreise mit Zahlen: P-Atome mit z -Koordinaten. Punkte: H-Atome.

Auffallend ist die gegenseitige Verdrehung der PO_4 -Tetraeder, die der kontrahierenden Wirkung des Wasserstoffs zwischen den Sauerstoffatomen benachbarter Tetraeder zuzuschreiben ist. Zieht man zum Vergleich die entsprechende Struktur einer Verbindung RXO_4 ohne Wasserstoff bei, wie sie beispielsweise in Zirkon (ZrSiO_4) oder YPO_4 verwirklicht ist, wird dieser Einfluss deutlich sichtbar. In der Figur ist die Lage der Tetraeder von YPO_4 im richtigen Grössenverhältnis gestrichelt angedeutet.

Welches ist nun die Folge der allgemeinen Symmetriereduktion von KH_2PO_4 am Curiepunkt für die Basisparameter? In der Klasse

C_{2v} gibt es keine Raumgruppe, welche 32 identische Punktlagen enthält. Die Sauerstoffatome müssen sich also auf zwei Gruppen von je 16 identischen Punktlagen verteilen. Am nächsten verwandt mit D_{2d}^{12} ist die Raumgruppe C_{2v}^{19} mit folgender Punktbesetzung:

$$\left. \begin{array}{l} 8 \text{ P in } 000; \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}; \\ 8 \text{ K in } 00z_K; \frac{1}{4} \frac{1}{4} z_K + \frac{1}{4} \\ 16 \text{ O' in } x' y' z'; \frac{1}{4} - x' \frac{1}{4} + y' \frac{1}{4} + z'; \\ \quad \bar{x}' \bar{y}' \bar{z}'; \frac{1}{2} + x' \frac{1}{4} - y' \frac{1}{4} + z'; \\ 16 \text{ O'' in } \bar{y}'' x'' \bar{z}''; \frac{1}{4} + y'' \frac{1}{4} + x'' \frac{1}{4} - z''; \\ \quad y'' \bar{x}'' \bar{z}''; \frac{1}{4} - y'' \frac{1}{4} - x'' \frac{1}{4} - z''; \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0; \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}; 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

16 H in $(xyz)_H$; ... entsprechend O

Nehmen wir an, dass sich die orthorhombische Struktur durch geringe Parameterverschiebungen aus der tetragonalen ableiten lässt, dann können wir die neuen Parameter wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} z_K &= \frac{1}{2} + \Delta z_K \\ x'_o &= x_o + \Delta x'_o \\ y'_o &= y_o + \Delta y'_o \\ z'_o &= z_o + \Delta z'_o \\ x''_o &= -(y_o + \Delta x''_o) \\ y''_o &= x_o + \Delta y''_o \\ z''_o &= -(z_o + \Delta z''_o) \\ (xyz)_H &= \text{entsprechend} \end{aligned}$$

Die Struktur hat also im ganzen 10 Freiheitsgrade gegenüber 3 oberhalb des Curiepunktes! Davon sind sicher 7 für die Intensitäten der Röntgenreflexionen von Bedeutung. Fig. 11 zeigt schematisch die orthorhombisch deformierte Struktur.

Aus der Figur ist sofort ersichtlich, dass sie das Pauling'sche Modell der asymmetrischen OHO-Bindung enthält. Die Mittellage der Wasserstoffatome ist im Hinblick auf die Gesamtstruktur keine Gleichgewichtslage. Eine Annäherung an die eine oder andere Gruppe der Sauerstoffatome wird durch die orthorhombische Symmetrie direkt gefordert, oder in umgekehrter kausaler Folge: Die geordnete azentrische Lage der Wasserstoffatome zieht eine ortho-

rhombische Deformation der Struktur nach sich. Weil die Hydrogenbindung an sich asymmetrischen Charakter hat, kann die tetragonale Struktur oberhalb des Curiepunktes nur erklärt werden, wenn man die Wasserstoffatome innerhalb eines Raumes von wenigen Elementarzellen den Sauerstoffatomen nach einer statistischen Verteilung zuordnet, oder noch einfacher, wenn man einen ständigen Platzwechsel annimmt. Von dieser Vorstellung geht die Theorie von SLATER aus. Im polarisierten Zustand ist der Platzwechsel eingestellt und die Wasserstoffatome sind zu je zweien einer PO_4 -Gruppe zugeordnet. Eine allgemeine Gitterdeformation folgert SLATER zwar nicht, doch ist sie mit seiner Annahme durchaus verträglich.

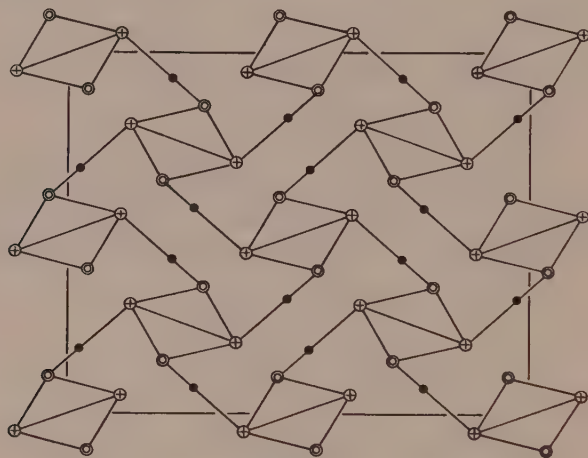


Fig. 11.

Die orthorhombisch deformierte Elementarzelle von KH_2PO_4 (schematisch) Projektion parallel zur c -Richtung. Kreise und Kreuze: ungleichwertige Sauerstofflagen.

Es fragt sich, wie in dem deformierten Strukturmodell eine elektrische Polarisation zustande kommen kann. SLATER stellt fest, dass, wenn je zwei H-Atome einer PO_4 -Gruppe zugehören, diese dann ein Dipolmoment besitzt. Wenn die Zuordnung lückenlos durch die ganze Struktur geht, wie Fig. 11 veranschaulicht, dann liegen sämtliche Dipole parallel zur c -Richtung (entweder + oder -), und der ganze Kristall ist polarisiert. Demgegenüber muss bemerkt werden, dass es eigentlich nur angeht von Dipolgruppen zu sprechen, wenn ihre Ausdehnung kleiner ist als die Entfernung zu den umliegenden entsprechenden Gruppen. Andernfalls könnten auch bei der Steinsalzstruktur parallel orientierte Dipole herausgegriffen

werden. Ferner kann der Vorgang einer Polarisation nur mit einer gegenseitigen Verschiebung von positiver gegen negative Ladung verbunden sein, denn $P_z = \sum e_i \delta z_i$. Nimmt man an, dass sich die Wasserstoffkerne nur in der Verbindungsgeraden der Sauerstoffatome verschieben können und schliesst jegliche weitere Deformation des Gitters aus, dann wäre allein die zufällige geringe Neigung der Hydrogenbindungen gegen die ab -Ebene massgebend für die Polarisation, denn ohne Neigung hätte die Ladungsverschiebung keine z -Komponente. Die Betrachtung der orthorhombischen Struktur besagt aber, dass erstens eine symmetriebedingte Bindung des Wasserstoffs an die O — O-Achse nicht besteht, und zweitens die allgemeine Deformation auch die PO_4 -Tetraeder polarisieren wird. Aus Fig. 12 ist sofort ersichtlich, dass sich die zentrale positive Ladung eines Tetraeders hebt oder senkt, wenn man die Ecken zusammenschiebt bzw. auseinanderzieht, vorausgesetzt, dass sich die Abstände ausgleichen.

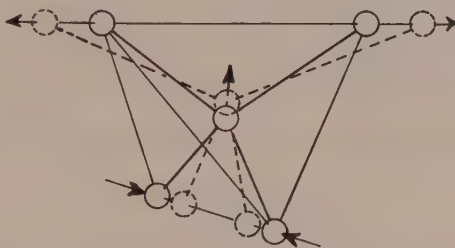


Fig. 12.

Polarisation des PO_4 -Tetraeders durch Deformation.

Schliesslich ist das Kaliumatom in seiner z -Koordinate frei und kann auch zur Polarisation beitragen. Eine überschlagsmässige Schätzung zeigt, von welcher Grössenordnung die strukturellen Verschiebungen sein müssen, um die beobachtete spontane Polarisation von $5 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm² hervorzubringen. Denkt man sich das Kalium- und Phosphorgitter ortsfest, alle Wasserstoffatome um einen Betrag Δz in der positiven c -Richtung und die Sauerstoffatome um denselben Betrag in der negativen c -Richtung verschoben, so wird

$$P_z = (2e_H + 4e_O) \cdot \Delta z \cdot 10^{22} \text{ Clb/cm}^2$$

(1 cm³ KH₂PO₄ enthält 10²² Moleküle).

Daraus folgt:

$$\Delta z \approx 0,03 \text{ \AA}$$

Lässt man nur eine Verschiebung der H-Atome aus ihrer Mittel-lage in die stabile asymmetrische Lage zu, so resultiert eine Polari-sation, welche ca. 14 % der tatsächlich gemessenen ausmacht. PAULING gibt als stabile Entfernung des Wasserstoffkerns vom Schwerpunkt des einen Sauerstoffatoms für den vorliegenden Fall 1 Å an. Bei einer Neigung der Hydrogenbindung von ca. 4^0 wird $\Delta z = 0,02$ Å und $P_z \approx 6 \cdot 10^{-7}$ Clb/cm².

Das Verhalten der Elektronen in bezug auf die Verschiebung des Wasserstoffkerns haben wir bisher nicht berücksichtigt. Solange die Hydrogenbindung als statistisch symmetrisch betrachtet werden kann, wird die Elektronenanordnung aller 4 Sauerstoffionen eines PO₄-Tetraeders identisch sein. Begeben sich die Wasserstoffkerne hingegen dauernd in die asymmetrische Lage, wird vermutlich die Elektronenkonfiguration der beiden nun ungleichwertigen Sauer-stoffsorten in verschiedener Weise geändert werden. Zieht der Wasserstoffkern gleichsam ein Elektron mit sich, folgt natürlich bei einer gegebenen Verschiebung ein kleineres Dipolmoment, als wenn sich nur der Kern verschiebt. Im nächsten Abschnitt wird untersucht, welches die Folgen einer solchen Verlagerung der Elek-tronen auf die Röntgeninterferenzen sein können.

4. Intensitätsänderungen von Röntgenreflexionen.

a) Messresultate.

Die relativen Intensitäten einer Reihe von Reflexionen wurden mit dem Ionisationsspektrographen an orientiert geschnittenen Kri-stallen ohne äusseres elektrisches Feld zwischen Zimmertemperatur und ca. 100° K untersucht. In erster Linie wurden Reflexionen gewählt, welche die Strukturparameter in möglichst einfacher Form enthalten, also solche mit einfachen Indices. Bei einer speziellen Gruppe von meist schwachen Reflexionen sind für D_{2d}^{12} die Beiträge der P- und K-Atome ausgelöscht. Es handelt sich um die Reflexio-nen, für welche

$$\left. \begin{array}{l} h+k \\ k+l \\ l+h \end{array} \right\} = 2n \text{ und zusätzlich } h+k+l \pm \begin{cases} 2n+l \\ 4n \end{cases}$$

Weil sich hier Verschiebungen der Sauerstoffatome am deut-lichsten äussern werden, sind diese Reflexionen besonders ein-gehend untersucht worden.

Die Intensität aller Reflexionen ist für Zimmertemperatur = 100 gesetzt. Obgleich die Apparatur gestattet, auch bei schwa-

chen Reflexionen Intensitätsänderungen von 1% zu messen, darf die Genauigkeit der Messungen unmittelbar unter dem Curiepunkt nicht so hoch veranschlagt werden. Zwischen verschiedenen Messreihen, an verschiedenen Kristallen und auch am gleichen Kristall aufgenommen, ergaben sich gelegentlich Differenzen bis zu 10%. Die nachfolgend wiedergegebenen Kurven stellen daher Mittelwerte dar und charakterisieren den allgemeinen Verlauf.

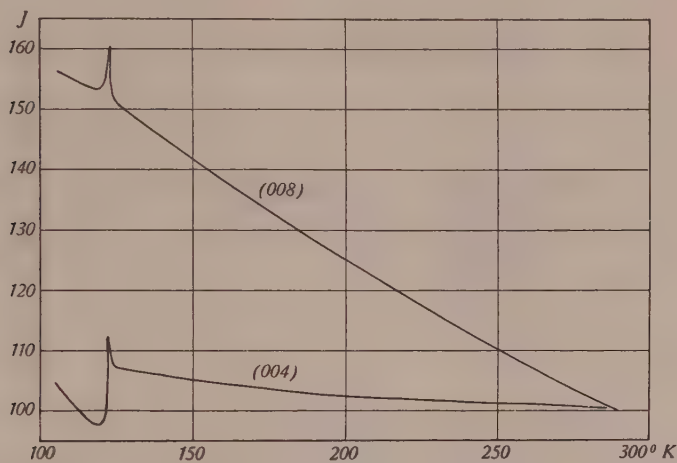


Fig. 13.

Intensitätsverlauf der Reflexionen (008) und (004).

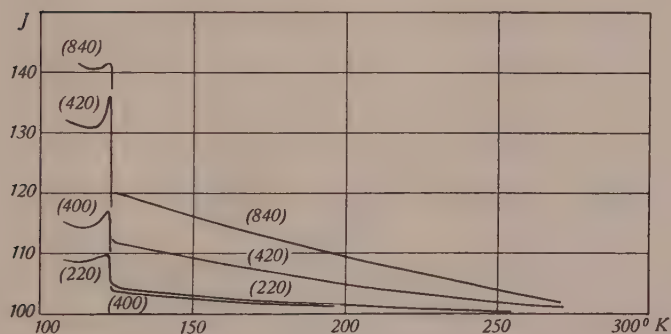


Fig. 14.

Intensitätsverlauf der Reflexionen (220), (420) und (840).

Reflexionen (001).

Fig. 13 zeigt den Temperaturverlauf von (004) und (008).

Reflexion ($hk0$).

Wegen der Linienaufspaltung müssen Messungen an ($h00$) mit $h > 4$ ausgeschieden werden. Es bleiben (400), (220), (420) und (840). Die Reflexion (420) gehört zu der erwähnten Gruppe von Reflexionen, bei denen die Beiträge von K und P ausgelöscht sind. Die Messungen sind aus Fig. 14 und 15 ersichtlich.

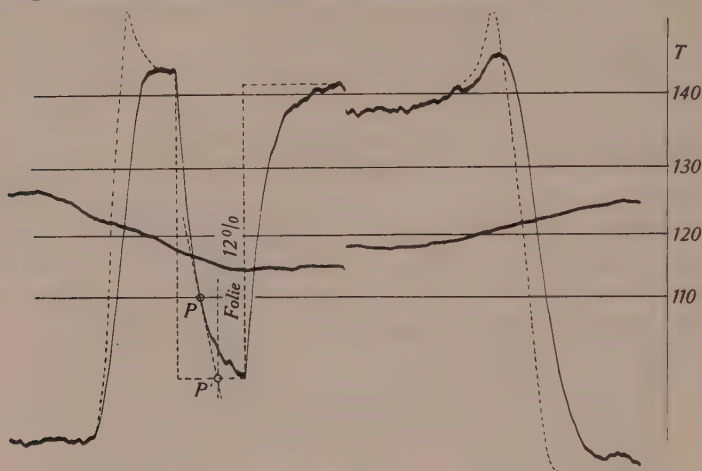


Fig. 15.

Intensitätsverlauf der Reflexion (420), gleichzeitig mit der Temperatur registriert.
(Wiedergabe des Registrierstreifens)



Fig. 16.

Intensitätsverlauf der Reflexionen (222), (662) und (226).

Reflexionen (hkl) nur von Sauerstoff.

Darstellung des Temperaturverlaufs von (222), (226) und (662) in Fig. 16.

Übrige Reflexionen (hkl).

Untersucht wurden nur die starken Reflexionen (202) und (444). Siehe Fig. 17.

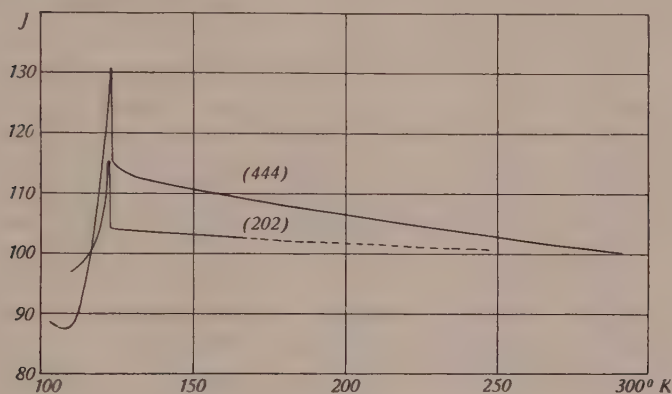


Fig. 17.

Intensitätsverlauf der Reflexionen (202) und (444).

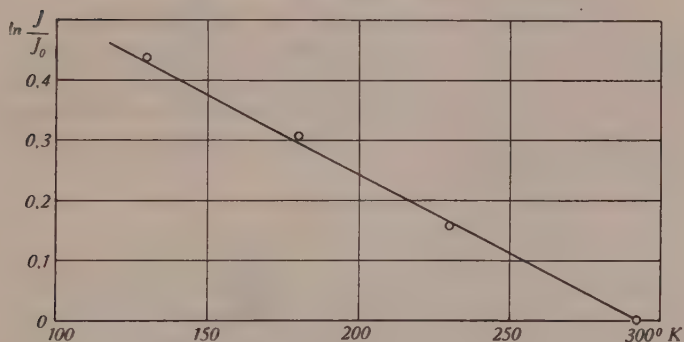


Fig. 18.

Temperaturverlauf der Reflexion (600) von NaCl. Gerade berechnet mit $\Theta_{ch} = 281^\circ$.

○ experimentelle Punkte.

Am Curiepunkt ändern sich die Intensitäten nahezu sprunghaft, jedoch nicht nach der Art einer Stufe. Bei den meisten Reflexionen wird nach einer anfänglichen Intensitätszunahme und nach Durchlaufen einer mehr oder weniger hohen Spitze ein Intensitätsabfall auf einen stationären Endwert beobachtet. Der ganze Vorgang spielt sich in einem Temperaturbereich von ca. 10° ab.

Wenn man als bleibende Intensitätsänderung die Differenz zwischen dem bei 110° gemessenen Intensitätswert und dem bis zu dieser Temperatur extrapolierten ungestörten Verlauf bezeichnet, ergibt sich für die relativen Intensitätsänderungen $\Delta J/J$ folgende Tabelle:

Tabelle 1.

Reflexion	$\Delta J/J\%$	$\Delta J'/J\%$	Bemerkungen
004	- 5	- 24	nur z -Parameter
008	+ 1	± 1	nur z -Parameter
400	+ 8	+8; -9	nur $x-(y)$ -Parameter
220	+ 5	+1,5	x und y -Parameter
420	+17	+10; -3	x - und y -Parameter
840	+18	0; $\pm 2,5$	x - und y -Parameter
222	-12	+5	nur Sauerstoff
226	+ 5	± 1	nur Sauerstoff
662	+ 4	+3,5	nur Sauerstoff
202	- 8	+2; -1	$x-(y)$ - und z -Parameter
444	-25	+1,5	Spitze ca. +30%!

Zur Prüfung der Apparatur und der Messmethode ist die Reflexion (600) von NaCl zwischen Zimmertemperatur und 130°K untersucht worden (Fig. 18). Zum Vergleich ist der Intensitätsverlauf, berechnet nach DEBYE-WALLER mit der bekannten charakteristischen Temperatur von 281° , aufgetragen. Praktisch herrscht Übereinstimmung.

b) Ansätze zur Auswertung.

Es stehen vier grundsätzlich verschiedene Wege offen, die Intensitätsänderungen zu deuten. Wir werden im Folgenden diskutieren, welche Möglichkeiten im Vordergrund stehen und wie sich entsprechende Ansätze zum experimentellen Befund verhalten.

Die Intensität einer nach der Bragg'schen Methode erzeugten Reflexion wird nach Abzug des Streugrundes dargestellt durch

$$J = K \cdot E \cdot L \cdot Th \cdot F^2$$

K = Konstante; E = Extinktionsfaktor; L = Lorentzfaktor;

Th = Thomsonfaktor; F = Strukturfaktor.

E , L und Th sind Funktionen der Wellenlänge, des Streuwinkels der Kristalldichte und der Absorption, also von Größen, die sich

bei der Umwandlung gar nicht oder nur geringfügig ändern. Wir können sie bei unseren relativen Messungen ausser Acht lassen und für die Intensitätsänderungen direkt ansetzen:

$$\Delta J/J = \Delta F^2/F^2$$

Der Strukturfaktor zerfällt wiederum in den Atomfaktor ψ_m , den Temperaturfaktor e^{-M_m} und die durch die Gittergeometrie bestimmte Phasenfunktion

$$F_{hkl} = \sum_{mn} \psi_m \cdot e^{-M_m} \cdot e^{2\pi i \left(h \frac{x_{mn}}{a} + k \frac{y_{mn}}{b} + l \frac{z_{mn}}{c} \right)}$$

Die erste Möglichkeit, Intensitätsänderungen zu erklären, besteht darin, dass eine Verschiebung der Wasserstoffkerne die Elektronen-anordnung um die Sauerstoffionen und damit deren Atomfaktoren ψ_o beeinflusst. Zweitens sind Änderungen der Temperaturfaktoren ins Auge zu fassen.

Die dritte, nächstliegende Möglichkeit besteht in Änderungen der freien Strukturparameter xyz , und schliesslich ist noch in Erwägung zu ziehen, dass Änderungen in der Mosaikstruktur, wie sie im Abschnitt 2 nachgewiesen wurden, das Reflexionsvermögen des Kristalls beeinflussen können.

α) Änderungen des Atomfaktors.

Die polarisierte Hydrogenbindung kann aufgefasst werden als $O-H+O^{-3}$, $O^{-2}(HO)^{-}$ oder $O-(HO)^{-2}$, je nachdem wie die Verlagerung der Elektronenhüllen und die Annäherung des H-Kerns an ein O-Ion angenommen werden. Für die beiden in der orthorhombischen Struktur ungleichwertigen Sauerstofflagen sind also ψ'_o und ψ''_o verschieden anzusetzen. Die Streuwinkelabhängigkeit der Atomfaktoren ist für die normalen Ionisationsstufen der Ionen bekannt²⁸⁾. Im Fall der hier in Frage kommenden Gebilde kann sie zum Zweck einer rohen Abschätzung der möglichen Effekte interpoliert werden. Nehmen wir an, dass bei der Umwandlung keine Verschiebungen der Strukturparameter vorkommen, dann können wir die Strukturfaktoren der einzelnen untersuchten Reflexionen in folgende Form bringen:

$$F_{(00l)} = \psi_P + \psi_K + 2(\psi'_o + \psi''_o) \cos 2\pi l z_o$$

$$F_{(h00)} = \psi_P + \psi_K + 2\psi'_o \cos 2\pi h x_o + 2\psi''_o \cos 2\pi h y_o$$

$$F_{(0l0)} = \psi_P + \psi_K + 2\psi'_o \cos 2\pi h y_o + 2\psi''_o \cos 2\pi h x_o$$

$$F_{(hhl)} = \psi_P + \psi_K + 2(\psi'_o + \psi''_o) \cos 2\pi h x_o \cdot \cos 2\pi h y_o$$

$$F_{(420)} = \psi'_o \cdot \sin 8\pi x_o \cdot \sin 4\pi y_o - \psi''_o \sin 4\pi x_o \cdot \sin 8\pi y_o$$

$$\begin{aligned}
F_{(840)} &= \psi_P + \psi_K + 2\psi'_o \cos 16\pi x_o \cdot \cos 8\pi y_o + 2\psi''_o \cos 8\pi x_o \cdot \cos 16\pi y_o \\
A_{(hhl)} &= (\psi'_o - \psi''_o) \sin 2\pi h x_o \cdot \sin 2\pi h y_o \cdot \cos 2\pi l z_o \\
B_{(hhl)} &= (\psi'_o + \psi''_o) \sin 2\pi h x_o \cdot \sin 2\pi h y_o \cdot \sin 2\pi l z_o \\
A_{(202)} &= \psi_P + \psi_K + 2(\psi'_o \cdot \cos 4\pi x_o + \psi''_o \cos 4\pi y_o) \cos 4\pi z_o \\
B_{(202)} &= 2(\psi'_o \cdot \cos 4\pi x_o - \psi''_o \cos 4\pi y_o) \sin 4\pi z_o \\
A_{(444)} &= \psi_P + \psi_K + 2(\psi'_o + \psi''_o) \cos 8\pi x_o \cdot \cos 8\pi y_o \cdot \cos 8\pi z_o \\
B_{(444)} &= 2(\psi'_o - \psi''_o) \cos 8\pi x_o \cdot \cos 8\pi y_o \cdot \sin 8\pi z_o
\end{aligned}$$

wobei $J \sim F^2$, bzw. $\sim A^2 + B^2$

Mit den bekannten Parameterwerten und den variierten Atomfaktoren berechnen sich Intensitätsänderungen wie sie unter $\Delta J/J$ in Tabelle 1 angeführt sind. Dort, wo zwei Zahlen stehen, beziehen sie sich auf die beiden ungleichwertigen Reflexionen (hkl) und (khl) . Der Berechnung ist die Annahme zugrunde gelegt, dass die beiden Sauerstoffionen als 0- und 0⁻³ streuen. Die Unterscheidung zwischen ψ'_o und ψ''_o macht sich vor allem in den niedrigen Ordnungen geltend. Wenn auch die gemessenen und berechneten Intensitätsänderungen in einzelnen Fällen von gleicher Grösse sind, genügt der Ansatz keineswegs zur Erklärung der Beobachtungen. Immerhin zeigt die Gegenüberstellung, dass Veränderungen in der Elektronenordnung teilweise die Ursache für die Intensitätsänderungen bilden können.

β) Änderungen des Temperaturfaktors.

Im Exponenten des Temperaturfaktors sind die mittleren quadratischen Verrückungen der Atome aus der Ruhelage enthalten $M_m = 2\bar{u}_m^2 k^2 \cdot \sin^2 \vartheta$ (\bar{u}_m^2 = mittlere quadratische Verrückung der Atomsorte m). Diese hängen von der kinetischen und potentiellen Schwingungsenergie ab, also von der Temperatur und vom Kraftfeld. Änderungen des Kraftfeldes, in dem die Ionen schwingen, sind bei der seignetteelektrischen Umwandlung nicht ausgeschlossen.

Weil KH_2PO_4 ein nichtkubisches Gitter besitzt, sind die Amplituden der thermischen Gitterschwingungen richtungsabhängig. Der Temperaturfaktor wird daher von Reflexion zu Reflexion von vornherein verschieden sein. Direkt miteinander vergleichen lassen sich nur die Temperaturfaktoren von Reflexionen verschiedener Ordnung an derselben Fläche, z. B. von (004) und (008). Setzt man vereinfachend

$$J_{hkl} = F_{hkl}^2 \cdot e^{-M_{hkl}} = F^2 \cdot e^{-a \cdot \sin^2 \vartheta}$$

so folgt $\Delta J/J_{hkl} = -\Delta a \cdot \sin^2 \vartheta$.

Die Empfindlichkeit einer Reflexionsserie auf Veränderungen im Temperaturfaktor nimmt also mit dem Streuwinkel zu. Als weitere Gesetzmässigkeit wird man zwischen verschiedenen Richtungen im Kristall einen stetigen Übergang im Verhalten erwarten, z. B. von (00*l*) über (*h*0*l*) nach (*l*00). Die Messungen geben mit ihren teils positiven, teils negativen Intensitätsänderungen weder die eine noch die andere Gesetzmässigkeit wieder (siehe z. B. (004) und (008) oder (420) und (840)). Sprunghafte Änderungen des Temperaturfaktors kommen also als alleinige Ursache für die Intensitätsänderungen nicht in Frage.

γ) Änderungen der Strukturparameter.

Stetige Änderungen der freien Strukturparameter x_o, y_o, z_o sind bereits oberhalb des Curiepunktes möglich. Aus den Reflexionen können sie jedoch nicht mit Sicherheit erkannt werden, da sich die temperaturbedingten Intensitätsänderungen nicht mit Hilfe einer charakteristischen Temperatur für alle Reflexionen berechnen lassen, wie dies bei kubischen Diagonalgittern der Fall ist. Es scheint aber, dass die Intensitäten einzelner Reflexionen (von (222), (662) und (226)) unter Berücksichtigung des Streuwinkels, mit fallender Temperatur flacher ansteigen als die der anderen. Mit folgenden geringen Parameteränderungen können diese Abweichungen kompensiert werden, vorausgesetzt, dass für alle Reflexionen eine charakteristische Temperatur zwischen 250° und 350° angenommen werden darf:

	$T = 290^\circ$ (nach West)	$T = 130^\circ$
x_o	0,112	0,114
y_o	0,032	0,029
z_o	0,139	0,141

Die Berechnungen zur strukturellen Auswertung der Intensitätsänderungen am Curiepunkt sind folgendermassen vorgenommen worden: Mit Hilfe der Parameterwerte von West wurden die Strukturparameter der ausgemessenen Reflexionen berechnet und den Intensitätsänderungen entsprechend reduziert. Durch Variation der freien Parameter wurde hierauf versucht, die veränderten Intensitätswerte aller Reflexionen wiederzugeben. Für C_{2v}^{19} berechnen sich die Strukturparameter zu

$$A_{(00l)} = \psi_P + \psi_K \cdot \cos 2\pi l z_K + 2\psi_o (\cos 2\pi l z'_o + \cos 2\pi l z''_o)$$

$$B_{(00l)} = \psi_K \cdot \sin 2\pi l z_K + 2\psi_o (\sin 2\pi l z'_o + \sin 2\pi l z''_o)$$

$$F_{(h00)} = \psi_P + \psi_K + 2\psi_o (\cos 2\pi h x'_o + \cos 2\pi h x''_o)$$

$$\begin{aligned}
F_{(0h0)} &= \psi_P + \psi_K + 2\psi_o (\cos 2\pi h y'_o + \cos 2\pi h y''_o) \\
F_{(h h 0)} &= \psi_P + \psi_K + 2\psi_o (\cos 2\pi h x'_o \cdot \cos 2\pi h y'_o + \cos 2\pi h x'_o \cdot \\
&\quad \cdot \cos 2\pi h y''_o) \\
F_{(420)} &= \psi_o (\sin 8\pi x'_o \cdot \sin 4\pi y'_o + \sin 8\pi x''_o \cdot \sin 4\pi y''_o) \\
F_{(840)} &= \psi_P + \psi_K + 2\psi_o (\cos 16\pi x'_o \cdot \cos 8\pi y'_o + \cos 16\pi x''_o \cdot \cos 8\pi y''_o) \\
A_{(h h l)} &= \psi_o (\sin 2\pi h x'_o \cdot \sin 2\pi h y'_o \cdot \cos 2\pi l z'_o + \sin 2\pi h x''_o \cdot \\
&\quad \cdot \sin 2\pi h y''_o \cdot \cos 2\pi l z''_o) \\
B_{(h h l)} &= \psi_o (\sin 2\pi h x'_o \cdot \sin 2\pi h y'_o \cdot \sin 2\pi l z'_o + \sin 2\pi h x''_o \cdot \\
&\quad \cdot \sin 2\pi h y''_o \cdot \sin 2\pi l z''_o) \\
A_{(202)} &= \psi_P + \psi_K \cdot \cos 4\pi z_K + 2\psi_o (\cos 4\pi x'_o \cdot \cos 4\pi z'_o + \cos 4\pi x''_o \cdot \\
&\quad \cdot \cos 4\pi z''_o) \\
B_{(202)} &= \psi_K \cdot \sin 4\pi z_K + 2\psi_o (\cos 4\pi x'_o \cdot \sin 4\pi z'_o + \cos 4\pi x''_o \cdot \\
&\quad \cdot \sin 4\pi z''_o) \\
A_{(444)} &= \psi_P + \psi_K \cdot \cos 8\pi z_K + 2\psi_o (\cos 8\pi x'_o \cdot \cos 8\pi y'_o \cdot \cos 8\pi z'_o + \\
&\quad + \cos 8\pi x''_o \cdot \cos 8\pi y''_o \cdot \cos 8\pi z''_o) \\
B_{(444)} &= \psi_K \cdot \sin 8\pi z_K + 2\psi_o (\cos 8\pi x'_o \cdot \cos 8\pi y'_o \cdot \sin 8\pi z'_o + \\
&\quad + \cos 8\pi x''_o \cdot \cos 8\pi y''_o \cdot \sin 8\pi z''_o)
\end{aligned}$$

Hier sind die Atomfaktoren als konstant angenommen und die Strukturparameter der beiden Sauerstofflagen unterschieden. Wegen der grossen Zahl von Parametern sind direkte Berechnungen ausgeschlossen. Man ist darauf angewiesen, eine Reihe von Ansätzen rückwärts zu berechnen und das Feld der Möglichkeiten einzugrenzen. Auch hier sollten gewisse Gesetzmässigkeiten im Verhalten der Reflexionen zum Ausdruck kommen. Schwache Reflexionen, d. h. solche die „zufällig“ weitgehend ausgelöscht sind, werden auf Parameteränderungen am empfindlichsten reagieren, vor allem also diejenigen, bei denen die Beiträge von P und K ganz ausgelöscht sind. Auch eine unterschiedliche Empfindlichkeit bezüglich der Ordnung ist zu erwarten, da die Perioden der Funktionen $\cos 2\pi n x$ und $\sin 2\pi n x$ mit steigendem n kürzer werden.

Eingehende Untersuchungen führen zum Resultat, dass trotz der grossen Zahl von Möglichkeiten keine alle Beobachtungen quantitativ befriedigenden Ansätze gemacht werden können. Vor allem fallen die starken Intensitätsänderungen von (444) aus dem Rahmen. Wir verzichten daher auf die Wiedergabe einer zahlenmässigen Auswertung. Im einzelnen kann wohl gezeigt werden, dass Verschiebungen der K - und O -Ionen von der Grösse von ca. 0,03 Å, wie sie auf Grund der Polarisierung zu erwarten sind, mit Intensitätsänderungen verknüpft sind, welche der Grössenordnung nach den Beobachtungen durchaus entsprechen.

δ) Einfluss der Veränderung in der Mosaikstruktur.

Zwei die Messungen fälschende Effekte können durch die Veränderungen der Grobstruktur verursacht werden:

1. Für den *idealen Mosaikkristall* verhalten sich die Reflexions-Intensitäten wie F^2 , während für den *idealen Einkristall* Proportionalität mit F gefordert wird. Der Realkristall nimmt bekanntlich oft eine Zwischenstellung ein, so dass sich Veränderungen des Grobgefüges im Reflexionsvermögen bemerkbar machen können.

2. Die Verdrehungen und Verwerfungen der Elementarbezirke und Makro-Bereiche können unkontrollierbare Intensitätsverluste zur Folge haben, trotzdem die Kristalle während der Messungen stets um die optimalen Reflexionslagen geschwenkt werden.

Das weitgehend ähnliche Verhalten aller Reflexionen am Curiepunkt und die Streuung zwischen wiederholten Einzelmessungen deuten darauf hin, dass die *Veränderungen in der Grobstruktur* die Intensitätsänderungen wesentlich beeinflussen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Intensitätsänderungen unter dem Zusammenwirken verschiedener Effekte zustande kommen, deren Beiträge sich nicht getrennt untersuchen lassen, und die alle mit der seignetteelektrischen Umwandlung verknüpft sind. Im Vordergrund stehen strukturelle Änderungen und Änderungen in der Grobstruktur. Die strukturellen Verschiebungen der Sauerstoff- und Kaliumionen übersteigen aber auf alle Fälle nicht den Betrag von einigen Hundertstel Å.

c) Einfluss eines elektrischen Feldes auf die Intensitäten.

Im ganzen Temperaturbereich von Zimmertemperatur bis zum Curiepunkt konnte bei keiner Reflexion eine Beeinflussung der Intensität durch ein in die c -Richtung des Kristalls gelegtes elektrisches Feld (bis 10000 Volt/cm) festgestellt werden. Gelegentliche Andeutungen liegen unter 1%, also noch im Bereich der normalen Nullpunktschwankung der Messvorrichtung. Unterhalb des Curiepunktes wird der Feldeinfluss hingegen sehr deutlich. Die Intensitätsänderungen am Curiepunkt verlaufen verschieden, je nachdem ob der Kristall unter Spannung steht, mit offenen, oder mit kurzgeschlossenen Elektroden abgekühlt wird. Einschalten und Umpolen eines Feldes am polarisierten Kristall hat stufenhafte Intensitätsänderungen zur Folge. Überraschend ist die Tatsache, welche aus den Messungen von STAUB¹⁸⁾ an Seignettesalz hervorgeht, dass die Intensitäten vom Vorzeichen des Feldes abhängen. Unterhalb des Curiepunktes ist der Kristall kristallographisch polar und muss sich daher für eine in bezug auf die c -Achse positive oder negative Feld-

richtung verschieden verhalten. Bereits bei Feldstärken von einigen hundert Volt/cm wird er aber unpolarisiert und behält damit gegenüber der Feldrichtung stets die gleiche Orientierung. Die Umklappung der Struktur gegenüber dem Röntgenstrahl sollte an sich keine Intensitätsänderung zur Folge haben, weil Vorder- und Rückseite eines Kristalls wegen der Umkehrbarkeit des Lichtweges in dieser Hinsicht identisch sind. (Die Röntgenklassen sind alle zentrosymmetrisch.) Da diese Messungen von einem Kristall zum andern schlecht reproduzierbar sind und überdies Hysteresiseffekte zeigen, vermuten wir, dass auch hier die Veränderungen der Grobstruktur wesentlich beteiligt sind (Fig. 19).

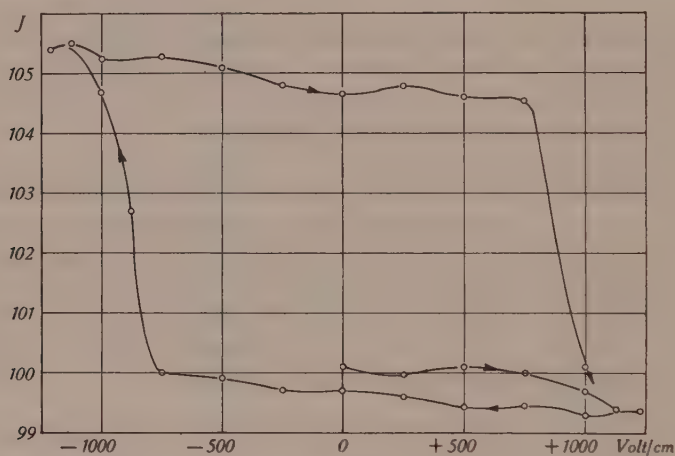


Fig. 19.

Feldabhängigkeit der Reflexion (008).

C. Experimenteller Teil.

1. Untersuchtes Material.

Für die Winkel- und Intensitätsmessungen wurden aus zwei im Institut gezüchteten klaren KLi_2PO_4 -Kristallen eine Anzahl verschieden orientierter Plättchen von ca. $14 \times 4 \times 1$ mm Abmessung geschnitten. An natürlichen Wachstumsflächen standen nur (110) und (111) zur Verfügung. Die kristallographische Orientierung wurde wie folgt gewählt: (110), (100), (310), (210), (530), (510), (101), (311), (312), (313), (211), (511), (001), (111), (112), (221), (113), (331), (332), (441). Die KD_2PO_4 -Plättchen sind einem von BANTLE gezüchteten, ca. 3 g schweren Kristall entnommen worden. Ihre Abmessungen betrugen ca. $8 \times 3 \times 1$ mm. Für die Pulverpräpa-

rate wurde KH_2PO_4 -Kahlbaum und Abfallmaterial des KD_2PO_4 -Einkristalls verwendet.

Um das Verhalten der Reflexionen untersuchen zu können, wenn der Kristall einem elektrischen Feld parallel zur c -Richtung ausgesetzt ist, sind auf einzelne Plättchen im Vakuum Goldelektroden aufgedampft worden. Fig. 20 zeigt die Anordnung der Elek-

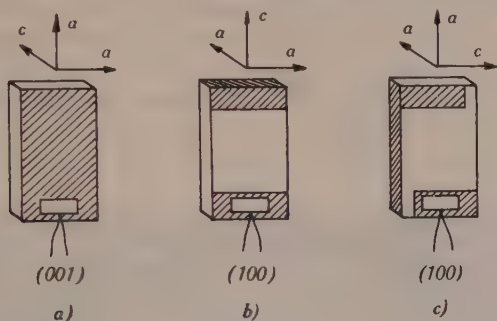


Fig. 20.

Anordnung der Elektroden (schraffierte Flächen) auf Kristallplättchen verschiedener Orientierung.

troden für verschiedene Orientierung der Plättchen. Die Spannung wurde den Kristallen einerseits über die kupferne Auflagefläche und andererseits über einen auf der Vorderfläche aufliegenden Silberkontakt, in den auch das Thermoelement eingelötet war, zugeführt.

Ein sauberes, homogenes Feld grosser Feldstärke, das quantitative Messungen erlaubte, liess sich nur an Plättchen, die nach (001) geschnitten waren anlegen (Fig. 21a). In den anderen Fällen diente das Feld hauptsächlich zur Parallelrichtung der Elementarbereiche.

2. Die Röntgenapparatur.

Für die Untersuchungen am Einzelkristall stand ein von NÉMET¹²⁾ entwickelter Ionisationsspektrograph zur Verfügung, der seinerzeit für Messungen an Seignettesalz und Eis verwendet wurde. Grundaufbau und elektrische Schaltung konnten im wesentlichen übernommen werden; der Kristallträger musste für die Arbeit bei tiefen Temperaturen neu konstruiert werden. Es sollen hier neben der prinzipiellen Wirkungsweise nur diejenigen Teile der Apparatur näher beschrieben werden, die sich von der Németschen unterscheiden (Fig. 21).

Der Spektrograph ist speziell für die Messung von Intensitätsänderungen gebaut. Hohe Empfindlichkeit und weitgehende Eli-

mination aller störenden Schwankungen, wie sie durch instabile Betriebsbedingungen der Röntgenröhre oder durch Schwankungen der Verstärker-Stromquellen verursacht werden können, kennzeichnen diese Apparatur. Die Stabilisierung lässt sich durch die Verwendung zweier Ionisationskammern erreichen. Die eine, schwenkbare Kammer (Messkammer) empfängt die Strahlung von dem zu untersuchenden Kristall, während für die andere (Kompensationskammer) ein Teil des Primärstrahls durch einen fest montierten Kalkspatkristall abgezweigt wird. Anschliessend an die Kammer erfolgt die separate Verstärkung der Ionisationsströme mittels Elektrometertrioden, die zusammen mit den Anodenwiderständen eine Brückenschaltung bilden. Das Galvanometer im Mit-

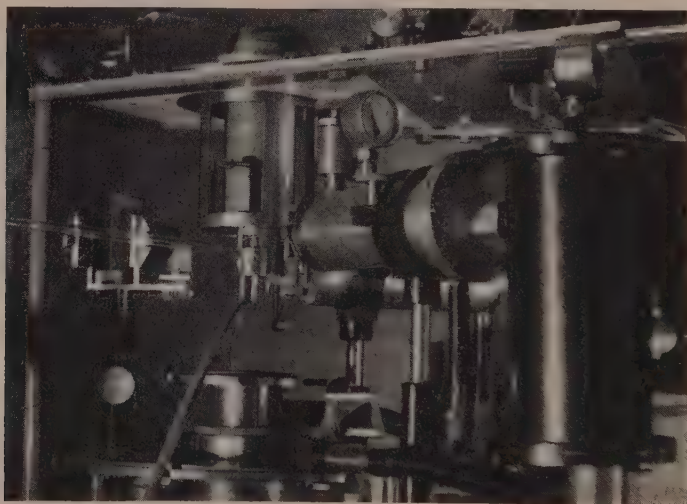


Fig. 21.

Der Ionisationsspektrograph. Links die Primärstrahlblende, im Zentrum der Kristallträger, rechts die Ionisationskammern.

telleiter schlägt proportional zur Potentialdifferenz der beiden Anoden, also bei linearer Röhrencharakteristik proportional zur Differenz der Ionisationsströme aus. Die Schwankungen der Röntgenquelle treten daher nur noch im Verhältnis dieser Differenz in Erscheinung und verschwinden ganz bei Stromlosigkeit des Galvanometers. Auch die Auswirkung von Spannungsschwankungen der Verstärkerbatterien wird mit dieser Brückenschaltung reduziert.

Mit den verwendeten Gitterableitwiderständen von ca. $5 \cdot 10^{11} \Omega$ betrug die maximale Verstärkung der Apparatur ca. 10^7 . Eine

weitere Steigerung der Empfindlichkeit bringt keine Vorteile mehr, weil die quantenhafte Absorption der Röntgenstrahlung in den Ionisationskammern eine nicht eliminierbare geringe Schwankung erzeugt, die sehr schwache Reflexionen ohnehin überdeckt. Überdies führt eine Vergrößerung der Gitterableitwiderstände zu einer Verlängerung der Registrierzeit. Mit 70 Sekunden für 99% des Gesamtausschlages war die zulässige obere Grenze bereits erreicht. Um den Verlauf plötzlicher Intensitätsänderungen besser verfolgen zu können, wurde zeitweise mit einem zweistufigen Verstärker gearbeitet. Die Registrierzeit konnte damit auf 3—5 Sekunden verkürzt werden, der Nullpunkt war aber bei dieser Schaltung weniger stabil.

Als *Röntgenquelle* wurde eine Strukturröhre mit Cu-Antikathode verwendet. Die Betriebsspannung betrug je nach Stärke der untersuchten Reflexion 15—25 kV. Ein Nickelfilter trennte die CuK_β -Linie ab.

Bei der Konstruktion des Kristallträgers waren folgende Bedingungen zu berücksichtigen:

1. Der Kristall musste auf beliebige Temperaturen zwischen Zimmertemperatur und ca. 100°K eingestellt werden können.
2. Einstellbarkeit auf beliebige Glanzwinkel zwischen 0° und 65° .
3. Geringe Absorption des Primärstrahls und der Reflexion.
4. Schutz gegen Vereisung.
5. Möglichkeit an den Kristall ein elektrisches Feld anzulegen.
6. Schwenkbarkeit des Kristalls um die Spektrometerachse während des Betriebes.

Mit dem in Fig. 22 und Fig. 23 dargestellten Kristallträger konnten die sich zum Teil entgegenstehenden Anforderungen weitgehend erfüllt werden.

Ein dickwandiger Kupferzylinder als Kältespeicher mit einem seitlich angefrästen Zapfen bildet das zentrale Stück des Trägers. Seitlich ist er durch einen Filzmantel und ein darübergestülptes Dewar- oder Bakelit-Rohr und nach oben durch eine Lage Watte gegen Wärme isoliert. Von den beiden oben angebrachten Stützen dient einer der Zufuhr von flüssiger Luft und der andere der Entlüftung. Der Kristall wird auf die blank polierte angefräste Fläche des Zapfens gelegt und durch zwei Bronceklammern mit geringem Druck festgehalten. Der Kupferzylinder sitzt auf einem Hartgummiring, der in einer kardanischen Aufhängung gelagert ist. Das ganze System wird getragen von einem durchbrochenen Messingzylinder und ist senkrecht zur Spektrometerachse allseitig verschiebbar. Der obere Goniometertisch, an dem der Kristallträger hängt, ist um

die Instrumentenachse drehbar und läuft auf einem Prismabahn-Kugellager. Zum automatischen Schwenken des Kristalls während der Messungen wird ein Grammophonmotor mit einem Exzenterkopf verwendet. Der Schwenkbereich betrug anfänglich $0,8^\circ$ und wurde später im Hinblick auf die Aufspaltung einzelner Reflexionen auf $0,95^\circ$ vergrößert. Während des Betriebs kann die Nachjustie-

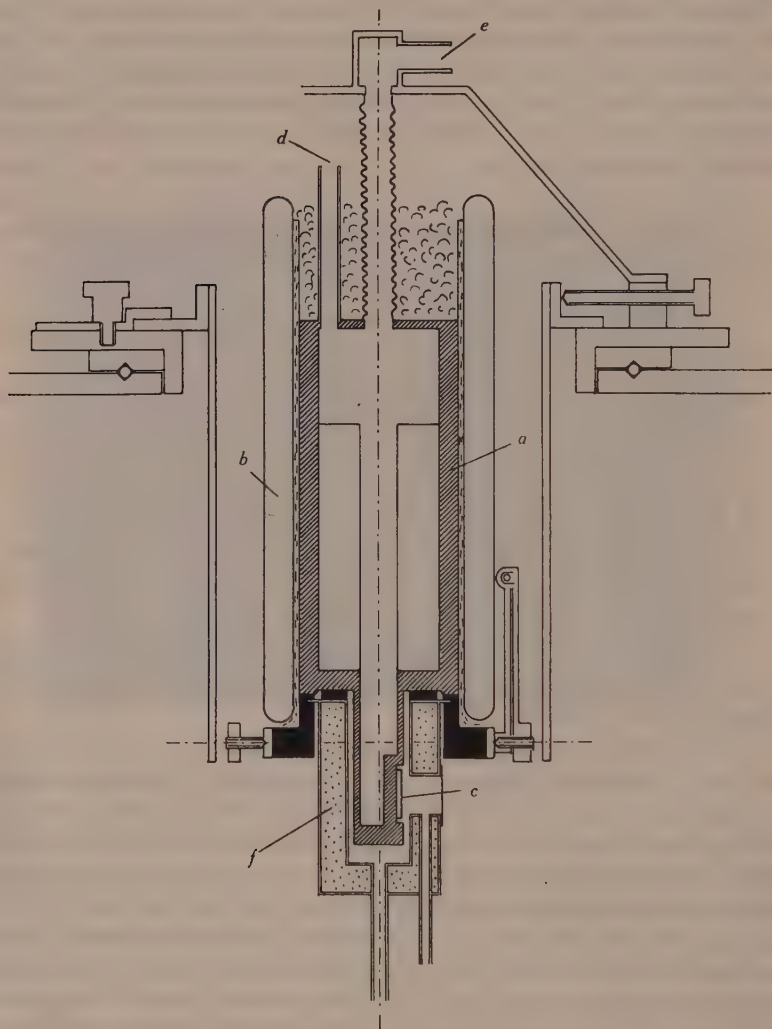


Fig. 22.

Schnitt durch den Kristallträger des Ionisationsspektrographen. (Masstab 1:2)
a Kupferzylinder, *b* Dewar- oder Preststoffzylinder, *c* Kristall, *d* Einfüllstutzen für flüssige Luft, *e* Luftaustritt, *f* Doppelwandige Neusilberkammer.

rung des Glanzwinkels durch seitliches Verschieben des Grammophonmotors mittels einer Feingewindeschraube vorgenommen werden.

Ein doppelwandiges Neusilbergefäß, das von unten über den Kupferzapfen geschoben und mit einem Bajonettverschluss befestigt wird, bildet die eigentliche Kristallkammer. Zwei nebeneinanderliegende Fenster für den Primärstrahl und die Reflexion sind mit einer Zelluloidfolie abgeschlossen. Um eine Vereisung des Kristalls zu verhüten, wird die Kammer vor der Kühlung mit einem getrockneten Gas (H oder N) durchgespült und während der Messungen dauernd unter leichtem Überdruck gehalten. Diesem Zweck dienen die beiden von unten in die Kammer laufenden Röhrchen.

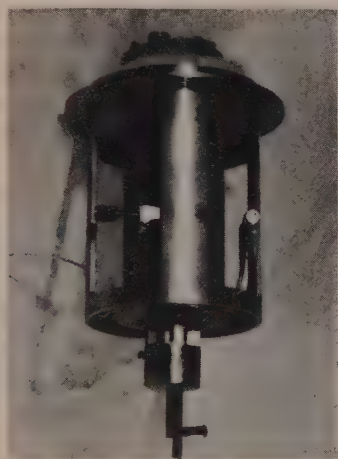


Fig. 23.

Der Kristallträger des Ionisationsspektrographen.

Wasserstoff hat als Füllgas den Vorteil geringerer Absorption als Stickstoff. Dagegen verursacht er eine hartnäckige Vereisung der Fenster. Die Absorption des Primärstrahls und der Reflexion durch den Gasmantel um den Kristall ist mit der Temperatur veränderlich und schwer in Rechnung zu setzen. Vergleiche zwischen einer Stickstoff- und einer Wasserstofffüllung zeigten, dass die Absorption des Stickstoffmantels bei einer Kristalltemperatur von 110° ca. 2% höher liegt als bei Zimmertemperatur. Die Vereisung der Fenster konnte durch Anblasen von getrockneter Luft verhütet werden.

Die Kristallkammer wird gekühlt, indem eine regulierbare Menge flüssiger Luft ständig in den Kupferzylinder gegeben wird.

Die Einstellung erfolgt von Hand durch Regulierung des Überdruckes in der Vorratsflasche mittels eines Wasserpegels. Die Temperatur lässt sich auf diese Weise zwar nicht selbsttätig stabilisieren, aber doch auf beliebigen Werten im geforderten Temperaturbereich für eine zur Messung genügende Zeit hinreichend konstant halten. Auch Messungen bei langsam laufender Temperatur lassen sich mit dieser einfachen Vorrichtung ausführen.

Die Temperatur wird auf der Vorderseite des Kristalls mit einem Cu-Konstanten-Thermoelement gemessen und durch ein Galvanometer direkt angezeigt. Um während der Röntgenmessungen nicht durch weitere Manipulationen gestört zu sein, wurde diese Art der Temperaturmessung der genaueren Kompensationsmethode vorgezogen. Die Genauigkeit der Temperaturmessung ist bei der vorliegenden Arbeit von untergeordneter Bedeutung, da, abgesehen vom Verhalten am Curiepunkt, Intensitätsänderungen im Temperaturbereich von $1-2^{\circ}$ auch bei hohen Ordnungen kaum messbar sind. Eine direkte Temperaturanzeige ermöglichte zudem die gleichzeitige Registrierung von Temperatur und Intensität bei laufender Temperatur. (Siehe Fig. 15).

Dank der bereits erwähnten Kombination von Thermoelement und Hochspannungselektroden reduzierte sich die Zahl der Durchführungen durch die Kammerwand. Eine Rückwirkung der Hochspannung auf den Galvanometerkreis der Temperaturmessung war nur feststellbar, wenn unterhalb des Curiepunktes der einheitlich polarisierte Kristall durch Umpolen des Feldes umorientiert wurde. Wegen der enormen Kapazität des Kristalls fließt dann ein Teil des beträchtlichen Umladestromes über das Galvanometer und bewirkt ein kurzes Zucken. Dieser Nebeneffekt wurde dazu verwendet, die Identität des elektrischen und des aus den Intensitätsänderungen erkennbaren strukturellen Curiepunktes festzustellen.

3. Gang der Messungen.

a) Messungen der Identitätsabstände.

Die zu untersuchende Reflexion wird bei Zimmertemperatur und ruhendem Kristall auf maximale Intensität justiert. Hierauf wird die Öffnung der Messkammer auf ca. 0,3 mm geschlossen und die Kammer bei geschwenktem Kristall gegen die kurzweilige Flanke der Reflexion bis zum beginnenden Intensitätsabfall verschoben. Das Mittel dreier unabhängig voneinander vorgenommenener Einstellungen ergibt den relativen Streuwinkel der Reflexion auf 0,5' genau. In gleicher Weise werden die weiteren Messpunkte in Temperaturabständen von ca. 50° — am Curiepunkt in dichter Folge — aufgenommen.

b) Kristallstellung und Glanzwinkel.

Wegen der gegenseitigen Verdrehungen der polarisierten Elementarbezirke hat man zwischen Kristallstellung und Glanzwinkel zu unterscheiden. Diese Messungen werden bei ruhendem Kristall unter gleichzeitiger Justierung von Kristall und Kammer auf maximale Intensität durchgeführt. Oberhalb des Curiepunktes wird der Nullpunkt des Goniometers am Kristallträger durch Vergleich mit dem Streuwinkel bestimmt. Schnittfehler des Kristalls können festgestellt und eliminiert werden.

c) Photographische Aufnahmen von Reflexionen.

Nach optimaler Justierung der Reflexion wird vor die Messkammer eine in eine Aluminiumfolie gewickelte Diapositivplatte geschoben und bei geschwenktem Kristall 5 Minuten bis 1 Stunde belichtet. Bei der gleichzeitigen Aufnahme der Reflexionen (12 0 0) und (0 12 0) musste darauf geachtet werden, dass die Mittellage des Schwenkbereichs dem Mittelwert der beiden Glanzwinkel entsprach.

d) Intensitätsmessungen.

Zuerst wird der Verstärker auf maximale Kompensation abgeglichen. Dies ist dann erreicht, wenn eine willkürliche, gleichzeitige Änderung der Gittervorspannung beider Röhren keinen bleibenden Ausschlag am Galvanometer erzeugt. Dann folgt die Justierung des Kristalls bei Zimmertemperatur und die Abblendung der Kompensationskammer bis zum Gleichgewicht der Brücke. Das Abblenden darf nicht durch Verkleinern des Blendenspaltes vorgenommen werden, weil die geringe Deformation der Apparatur, die beim Abkühlen unvermeidlich eintritt, die in die Kompensationskammer fallende Strahlung in unkontrollierbarer Weise verändert. Aus diesem Grunde wird stets mit weiter Kammeröffnung gearbeitet und die Intensität der Kalkspatreflexion mit einem Satz von eingeschobenen Aluminiumfolien abgeglichen. Die Apparatur benötigt 2 bis 3 Stunden zum warmlaufen. Nach dieser Zeit bleibt der Nullpunkt konstant. Um während der sich meist über mehrere Stunden erstreckenden Intensitätsmessungen eine Kontrolle der Primärintensität zu haben, schliesst man von Zeit zu Zeit die Messkammer mit einer Bleiklappe und misst den Ausschlag, der durch die teilweise abgeblendete Kompensationskammer erzeugt wird. Zeigt sich im Verlauf der Messungen eine Veränderung, so können die Intensitätswerte der Messkammer mit einem entsprechenden Faktor korrigiert werden.

Die Galvanometerausschläge werden geeicht, indem man eine Aluminiumfolie von bekannter Absorption vor die Messkammer schiebt.

Zwischen Zimmertemperatur und dem Curiepunkt wurde der normale Intensitätsanstieg der Reflexionen in 3—4 Messpunkten bestimmt, während im Bereich des Curiepunktes Messungen in Temperaturintervallen von einigen Grad und auch Registrierungen bei laufender Temperatur ausgeführt wurden. Die Registrierungen müssen wegen der Trägheit der Apparatur noch korrigiert werden. Am Gitter der an die Messkammer angeschlossenen Elektrometer- röhre stellt sich eine Spannung ein, die gegeben ist durch die zu- strömende und die abfließende Ladung und die Gitterkapazität C .

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \left(\frac{dQ}{dt}\right)_z - \left(\frac{dQ}{dt}\right)_a = C \frac{dV}{dt} \\ \left(\frac{dQ}{dt}\right)_z &= J_0 \text{ (Ionisationsstrom)} \\ \left(\frac{dQ}{dt}\right)_a &= J_R \text{ (Strom im Gitterableitwiderstand)}\end{aligned}$$

$$\text{daraus } J_0 R = J_R R + RC \frac{dV}{dt} \quad (R = \text{Gitterableitwiderstand})$$

Die Galvanometerausschläge sind proportional zum Momentanwert der Gitterspannung $J_R \cdot R$. Um den Sollwert zu erhalten, hat man also zum Momentanwert noch $RC \frac{dV}{dt}$ zu addieren.

Die Korrektur wird graphisch ausgeführt, indem man durch einen zu korrigierenden Punkt P der Intensitätskurve die Tangente legt und diese mit einer um RC verschobenen Geraden senkrecht zur Zeitachse schneidet. In der Ordinate des Schnittpunktes erhält man den korrigierten Intensitätswert P' . Die Konstruktion ist in Fig. 15 für einen Folienauschlag angegeben ($RC = 22$ Sek.).

An Hand der Diagramme konnte festgestellt werden, dass die Intensität am Curiepunkt bisweilen zu hohen Spitzwerten „aufblitzt“, um im Bereich weniger Grade wieder abzufallen. Bei sorgfältiger Temperaturstabilisierung konnten auch einzelne Messpunkte auf den steilen Flanken festgehalten werden. Die Intensitätsänderungen sind also nicht sprunghaft, sondern vollziehen sich in einem endlichen Temperaturintervall.

e) Pulveraufnahmen.

Für die Pulveraufnahmen wurde eine evakuierbare Debye-Scherrer-Kamera für tiefe Temperaturen konstruiert (Fig. 24). Das

Präparat ist von einem Zelluloidröhrchen umschlossen, durch welches gekühlter Wasserstoff geleitet wird. Der Röntgenfilm befindet sich auf Zimmertemperatur, benötigt also keine abnormalen Belichtungszeiten. Zur Drehung des Präparates wird der Wasserstoffstrom benützt, indem das Pulverstäbchen auf der Achse eines kleinen in einer Spitze gelagerten Flügelrädchens sitzt. Auf dem glei-

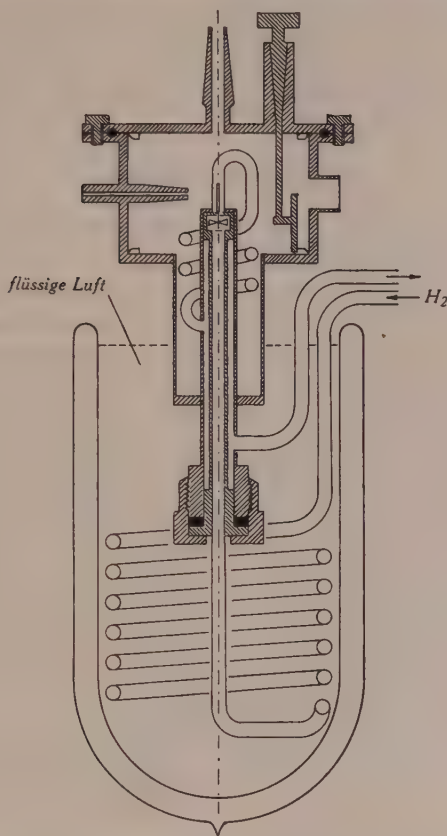


Fig. 24.

Debye-Scherrer-Kamera für tiefe Temperaturen. (Masstab 1:2,5)

chen Film können nacheinander zwei Halbdigramme, wovon eines bei Zimmertemperatur, aufgenommen werden (Fig. 1). In der Äquatorebene stossen die beiden Diagramme aneinander und lassen sich gut vergleichen.

Nach der Entdeckung der Linienaufspaltung erwies es sich als vorteilhaft mit einer anderen von PANKOW²⁹⁾ gebauten Tieftemperaturkamera zu arbeiten, die wegen ihres grösseren Radius eine

bessere Auflösung besitzt. Das Stäbchen kann hier nicht gedreht werden, was in dem besonderen Fall keinen Nachteil bedeutete, da bei diesen Messungen das Hauptgewicht auf die Linienaufspaltung und nicht auf die Intensitäten gelegt wurde. Gerade die Aufspaltungen gehen aber bei Drehungen des Präparates in der Eigenbreite der Linien unter. Die Kamera von Pankow, welche ganz in flüssige Luft bzw. eine Kohlensäure-Alkohol-Mischung getaucht wird, erfordert bei einem beträchtlichen Kühlmittelverbrauch Belichtungszeiten von 6—7 Stunden. Dafür ist die Temperaturkonstanz während der Messungen ohne spezielle Massnahmen gewährleistet*).

D. Zusammenfassung.

Die Röntgenuntersuchungen von KH_2PO_4 und KD_2PO_4 haben zu folgenden Resultaten geführt:

1. Die oberhalb 123° tetragonale Elementarzelle von KH_2PO_4 wird unterhalb dieser Temperatur *orthorhombisch*. Dasselbe gilt für KD_2PO_4 unterhalb 213° K. Für die Elementartranslationen von KH_2PO_4 wird der Temperaturverlauf von Zimmertemperatur bis 100° K angegeben. Unterhalb des Curiepunktes verläuft die Winkeldeformation parallel zur spontanen Polarisation. Der Quotient $P_z/(x_x + y_y)$ hat keine Unstetigkeit am Curiepunkt.

2. Wird KH_2PO_4 in Abwesenheit eines elektrischen Feldes unter den Curiepunkt abgekühlt, so polarisiert es sich zu gleichen Teilen nach den beiden *c*-Richtungen in Bereichen, deren Linearabmessungen sicher kleiner als $\frac{1}{10}$ mm, wahrscheinlich noch wesentlich kleiner, aber grösser als 10^{-4} cm sind. Die entgegengesetzt polarisierten Bereiche fügen sich, zumindest an der Oberfläche des Kristalls, unter einer gegenseitigen Verdrehung zu einer *Wechselstruktur* zusammen. Der Grad der Verdrehung ist durch ein elektrisches Feld beeinflussbar. Mit der Parallelorientierung der Bereiche durch ein Feld in der *c*-Richtung verschwindet, wie zu erwarten, die Wechselstruktur.

3. Die Parallelorientierung der Bereiche im elektrischen Feld vollzieht sich sprunghaft in einzelnen *makroskopischen Komplexen*, die eine Vielzahl von Bereichen umfassen (Barkhausensprünge). Diese Kristallkomplexe sind vor allem bei KD_2PO_4 durch gegenseitige Verdrehungen und Verwerfungen gekennzeichnet. Vermutlich sind sie identisch mit den durch Spaltrisse gegeneinander abgegrenzten Kristallblöcken.

*) Die Pulveraufnahmen wurden teilweise durch Dipl. nat. H. MESTER ausgeführt.

4. KD_2PO_4 bleibt von 213°K bis zur Temperatur der flüssigen Luft orthorhombisch. Kristallographisch gibt es also keinen „unteren Curiepunkt“.

5. Die Intensitäten der Röntgenreflexionen steigen zwischen Zimmertemperatur und 123°K in normaler Weise an. Gewisse Abweichungen im Verhalten einzelner Reflexionen können mit stetigen, temperaturbedingten Veränderungen der Sauerstoffparameter oberhalb des Curiepunktes erklärt werden. Am Curiepunkt treten z. T. starke Anomalien im Intensitätsverlauf aller untersuchten Reflexionen auf. Charakteristisch ist im allgemeinen ein scharf einsetzender Intensitätsanstieg zu einem hohen Spitzenwert mit nachfolgendem, weniger steilem Abfall im Temperaturbereich zwischen 110° und 123° . Die verschiedenen Möglichkeiten zur Deutung der Effekte werden diskutiert. Es zeigt sich, dass neben strukturellen Änderungen Verlagerungen in der Elektronenordnung, Veränderungen im Schwingungszustand und schliesslich die nachgewiesenen Veränderungen der Grobstruktur beteiligt sein können. Von den drei erstgenannten Möglichkeiten ist keine für sich ausreichend, zur Erklärung der Anomalien. Wenn Verschiebungen der Atomschwerpunkte vorkommen, sind sie kleiner als (schätzungsweise) $0,03 \text{ \AA}$. Die strukturellen Betrachtungen fassen auf der Voraussetzung, dass sich die orthorhombische Struktur aus der tetragonalen durch geringe Verzerrung ableiten lässt. Als Raumgruppe wird C_{2v}^{19} angenommen.

6. Im elektrischen Feld sind oberhalb des Curiepunktes nur Andeutungen von Intensitätsänderungen festzustellen. Unterhalb des Curiepunktes sind die Reflexionen dagegen durch ein Feld beeinflussbar. Sie verhalten sich im allgemeinen bei entgegengesetzter Feldrichtung ungleich und zeigen beim Umpolen des Feldes Hysterese. Die Beobachtungen können nicht aus der Struktur erklärt werden. Auch hier scheinen Veränderungen im Grobaufbau des Kristalls massgebend zu sein.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegenden Untersuchungen durchgeführt wurden, meinen herzlichsten Dank aussprechen für sein reges Interesse und für viele wertvolle Ratschläge. Ebenso danken wir dem Jubiläums-Fonds für die Überlassung von Mitteln.

Physikalisches Institut E.T.H., Zürich.

Literaturverzeichnis.

- 1) BEEVERS und HUGHES, Proc. Roy. Soc. **177**, 251 (1940).
 - 2) WEST, Zs. Krist. **74**, 306 (1930).
 - 3) SLATER, J. Chem. Phys. **9**, 16 (1941).
 - 4) KURTSCHATOV, Zs. f. Phys. **66**, 192 (1930).
 - 5) FOWLER, Proc. Roy. Soc. **149**, 1 (1935); **151**, 1 (1935).
 - 6) MÜLLER, Phys. Rev. **47**, 175 (1935); **57**, 829 (1940); **58**, 565; **58**, 205 (1940).
 - 7) v. JAFFE, Phys. Rev. **51**, 43 (1937).
 - 8) PAULING, The nature of the chemical bond.
 - 9) BERNAL und MEGAW, Proc. Roy. Soc. **151**, 384 (1935).
 - 10) VIGNESS, Phys. Rev. **46**, 255 (1934).
 - 11) STAUB, HPA. **7**, 1 (1934); Phys. Zs. **34**, 292 (1933).
 - 12) NÉMET, HPA. **8**, 97 (1935).
 - 13) KRUTTER und WARREN, Phys. Rev. **43**, 500 (1933).
 - 14) KOBEKO und KURTSCHATOV, Zs. f. Phys. **66**, 192 (1930).
 - 15) DAVID, HPA. **8**, 431 (1935).
 - 16) DE QUERVAIN und ZWICKER, HPA. **16**, 216 (1943).
 - 17) BANTLE und. VON ARX, HPA. (im Druck).
 - 18) STAUB, HPA. **7**, 480 (1934).
 - 19) v. ARX und BANTLE, HPA. **16**, 211 (1943).
 - 20) BANTLE und CAFLISCH, HPA. **16**, 235 (1943).
 - 21) v. ARX und BANTLE, HPA. **16**, 416 (1943).
 - 22) LÜDY, HPA. **15**, 527 (1942).
 - 23) BUSCH, HPA. **11**, 269 (1938).
 - 24) BANTLE, HPA. **15**, 373 (1942).
 - 25) BUSCH und GANZ, HPA. **15**, 501 (1942).
 - 26) ZWICKER, HPA. **16**, 211 (1943).
 - 27) NIGGLI, Lehrb. der Mineralogie I, 642 (1941).
 - 28) Internat. Tabellen zur Kristallstrukturbestimmung II.
 - 29) PANKOW, HPA. **9**, 87 (1936).
-

Interprétation et liaison des effets électriques de déformation et d'aimantation*)

par Albert Perrier.

(2. X. 1944.)

Sommaire. Théorie des effets mécanothermoélectriques sur la base des hypothèses du magnétogalvanisme spontané. — Discrimination d'autres effets comparables par leur symétrie générale. — Démonstration des formules publiées antérieurement, lesquelles expriment généralement les propriétés électriques macroscopiques de milieux à polarisations spontanées intracristallines. Polarisation tensorielles et vectorielles.

Application au pouvoir thermoélectrique de corps déformés et de corps aimantés; comparaison des paramètres numériques en liaison avec la théorie. — Les variations du pouvoir thermoélectrique provoquées par les contraintes mécaniques et par les champs magnétiques sont attribuées à un mécanisme unique où les agents-contraintes n'ont aucune action comme tels; seuls sont déterminants les états de la matière résultant de ces contraintes. — Discussion et essai d'explication des particularités énigmatiques de la magnétothermoélectricité du fer.

Observations concernant les courants en l'absence de différences de potentiel et même de *champs électriques*; répercussions sur le mécanisme des courants électroniques.

1. Un article récent¹⁾ a exposé dans le même recueil une étude expérimentale quantitative sur l'un des effets de contraintes élastiques sur les corps ferromagnétiques, étude dont il se dégage des lois phénoménologiques caractéristiques. Ces divers effets ont été prévus théoriquement et reconnus par l'auteur il y a des années déjà, mais la théorie n'en a été publiée qu'en son essentiel et par fragments très résumés^{2) 3)}. Le présent travail la reprend de manière plus détaillée et plus systématique et la discute à la lumière des faits expérimentaux découverts.

*) Ce travail comporte des sujets exposés fragmentairement déjà à diverses séances de la Société suisse de Physique, notamment à Locarno (1940). Il aurait dû paraître dans le fascicule jubilaire dédié au Professeur AUGUSTE HAGENBACH. Des circonstances indépendantes de la volonté de l'auteur l'ont contraint, à son grand regret, d'en différer la publication.

2. Rappel de quelques phénomènes anciens et récents.

Pour situer l'effet dont l'étude fait l'objet de la publication précitée, il est intéressant de le comparer avec les phénomènes auxquels WIEDEMANN et Lord KELVIN^{*)} ont attaché leurs noms. Je ne retiendrai pas les plus simples qui sont des manifestations exclusives de magnétostriction, je rappellerai seulement les deux suivants où entrent en ligne de compte les agents ou effets électriques.

1^o Un fil ferromagnétique aimanté *longitudinalement* (« axialement ») se *tord* lorsqu'on y envoie un courant électrique et réciproquement, s'il est le siège d'un courant électrique, il *s'aimante* longitudinalement lorsqu'on le tord.

2^o Un fil aimanté est le siège d'une force électromotrice axiale *pendant* qu'on le tord.

L'explication des effets 1 revient à faire entrer en jeu des aimantations observables à lignes hélicoïdales; les phénomènes sont alors des manifestations directes de *striction observable* *).

Quant à l'expérience 2, il s'agit là d'une force *électromotrice d'induction* provoquée par les variations de l'aimantation et qui ne s'observe que pendant la durée de cette variation.

Or, les effets magnétoélectriques transversaux qui font l'objet des présentes recherches ne nécessitent absolument *aucune aimantation observable*: il peut en apparaître comme conséquence, mais elle est inexistante en tant que cause.

Les causes (agents d'excitation) sont des contraintes mécaniques, des gradients de potentiel ou de température; les effets sont des courants (ou f.e.m.) *normaux à des gradients*, et ils s'établissent en régime stationnaire. Les parentés qui permettent de les rapprocher des effets Wiedemann-Kelvin sont des parentés abstraites de symétrie générale.

Les différences entre ces groupes sont donc essentielles, il convient de le remarquer. Il n'est du reste pas surprenant que WIEDEMANN-KELVIN n'aient pas recherché de tels effets, car, à l'époque, ils pouvaient raisonner seulement à l'aide d'aimantation observable, tandis que la théorie du présent groupe suppose l'intervention de l'aimantation spontanée, acquisition de ce siècle; et mieux encore, elle nécessite les notions de striction et anisotropie spontanées encore beaucoup plus récentes; ce sont en un mot des propriétés microphysiques de la matière qui se manifestent macroscopiquement sans aucune aimantation macrophysique.

*) Comme dans d'autres publications je désigne par aimantation observable celle que l'on mesure habituellement, pour la distinguer de l'aimantation spontanée; on peut employer également les termes respectifs d'aimantation *macroscopique* et *microscopique*.

3. Quelques bases théoriques sur les milieux ferromagnétiques.

Rappelons d'abord que la théorie comporte des hypothèses que l'on peut classer en deux groupes.

Le premier, la liaison générale, directe et réciproque entre déformation mécanique et polarisation magnétique, liaison qui s'établit par l'entremise de la *striction spontanée* et de ses anisotropies dans les éléments constitutifs de la mosaïque intracristalline.

En raison de cette interdépendance, toute déformation d'un milieu ferromagnétique entraîne une rotation des vecteurs \mathcal{J}_w (aimantation spontanée) dans les domaines de WEISS. Les positions d'équilibre atteintes par ces vecteurs dépendent alors, outre du facteur contrainte, des directions de symétrie de chaque cristallite et à la fois de la *striction spontanée*.

On peut rendre compte de manière satisfaisante des caractères essentiels des courbes d'aimantation observable à l'aide de ces éléments théoriques.

Ces propriétés expérimentales très riches et bien connues supposent l'intervention de *champs magnétiques extérieurs*: du même coup l'orientation des moments se fait avec différenciation des pôles des deux côtés, d'où le nom que j'ai employé d'*orientation polaire*.

Mais la théorie implique un autre groupe de conséquences, lequel n'a attiré l'attention qu'assez récemment, celui des modifications moyennes du milieu ferromagnétique qui accompagnent la contrainte mécanique en l'absence de tout champ magnétique et en partant d'états initiaux exempts d'aimantation macroscopique.

La déformation a, bien entendu, les effets prévus plus haut, la rotation des vecteurs \mathcal{J}_w dans les domaines élémentaires; mais ici et par raison de symétrie, leurs sens se compensent en moyenne; résultante générale: deux vecteurs égaux et antiparallèles; *il n'apparaît pas de pôles, le corps demeure* « neutre » macroscopiquement: j'ai fait usage pour qualifier cet état du terme d'orientation « *apolaire* ».

Mais insistons bien, le milieu n'est pas isotrope pour autant, et tous les phénomènes physiques dont la symétrie est compatible avec ces conditions peuvent être modifiés dans une mesure quantitativement égale à celle de corps *proprement aimantés*.

Ainsi que PIERRE CURIE aimait à s'exprimer, un milieu doué d'aimantation (observable) a la symétrie d'un *cylindre tournant* (un plan de symétrie normal à l'axe ou à l'aimantation); dans la même terminologie nous devons alors dire qu'un milieu mécaniquement contraint mais dénué d'aimantation observable a la symétrie d'un

cylindre immobile (infinité de plans de symétrie parallèles à l'axe de rotation ou des contraintes). Les phénomènes dont ces deux types de milieux peuvent être le siège devront présenter, de par leur structure, *au moins* les degrés correspondants de symétrie.

Dans un autre mode d'expression, si les propriétés liées à l'aimantation d'un milieu sont en particulier celles résultant d'actions vectorielles, celles liées à la contrainte seront celles d'agents tensoriels. Les premières peuvent englober les dernières, mais en comporter d'autres; elles seront plus richement représentées parce que d'un degré plus élevé de dyssymétrie. Ces considérations nous amènent tout naturellement au *second groupe d'hypothèses* et le situent avec plus de netteté.

Au nombre des phénomènes sensibles non seulement aux dyssymétries polaires mais aussi aux apolaires, on compte singulièrement tout ce qui touche aux conductions électroniques, tant électrique que calorifique, comme aussi le domaine contigu de la thermoélectricité. J'ai introduit²⁾ pour leur interprétation les hypothèses fondamentales de *magnétogalvanisme spontané* (groupe Hall et magnétorésistance) et de *pouvoir thermoélectrique spontané*.

Ces hypothèses impliquent par elles-mêmes et en l'absence de toute aimantation macroscopique des altérations quantitatives considérables des divers paramètres exprimant ces phénomènes électriques (effets du « 1er ordre », atteignant jusqu'à 50 % et plus); elles expriment encore que ces altérations sont douées d'anisotropies microphysiques axées en moyenne sur les vecteurs \mathcal{J}_0 (effets du « second ordre »).

Je vais montrer comment on peut établir, sur la base de ces hypothèses générales, des expressions quantitatives de toute une série de phénomènes dont en particulier les effets mécanoélectriques.

4. Formules macroscopiques pour les effets mécanoélectriques*).

Soit une lame homogène et isotrope en l'absence de contraintes; appelons E_{th} ou brièvement E la *force électromotrice thermoélectrique*

*) Pour établir diverses propriétés du domaine magnétogalvanique, j'ai suivi à maintes reprises une voie analogue à celle qui est exposée ici; mais, ainsi que je le rappelais plus haut, seuls les points de départ et les résultats ont été publiés jusqu'ici.

On vérifierait notamment que les formules de la note (6) de l'index bibliographique, portant les numéros 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ont exactement la même forme que celles de ce travail numérotées respectivement 10 et 11, 12, 9, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 20; les premières symbolisent des lois sur la conductibilité élec-

par unité de longueur (homogène à un champ électrique) entretenue par un gradient de température

$$\mathcal{E}_{th} = \mathcal{E} = \Theta \text{ grad } t \quad (1)$$

Θ sera le pouvoir thermoélectrique propre du milieu.

Soumettons-la (fig. 1), comme dans les expériences de PERRIER et AZAD, à une contrainte (uniforme) de cisaillement, et, désignons les directions principales de déformation par $0x$ (extension maxi-

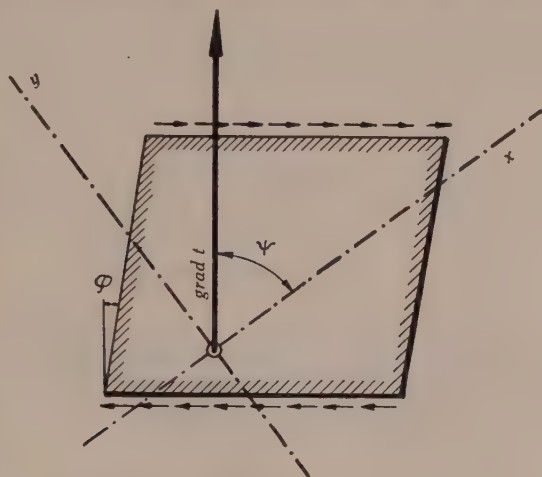


Fig. 1.

mum) et $0y$ (compression maximum); ce sont des directions de symétrie pour l'état du milieu. Etablissons enfin un gradient de température dans une direction ψ comptée par rapport à $0x$ (dans les essais discutés ψ valait 45°).

Imaginons que l'anisotropie inhérente à la déformation se répercute sur le *pouvoir thermoélectrique*: on peut décrire commodément les phénomènes en toute direction à l'aide de leurs grandeurs dans les deux directions principales $0x$ et $0y$. Faisant coïncider successivement le gradient thermique avec ces deux directions, nous écrirons d'abord:

$$\mathcal{E}_x = \Theta_x \text{ grad } t = (\Theta + \Delta_x \Theta) \text{ grad } t \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_y = \Theta_y \text{ grad } t = (\Theta + \Delta_y \Theta) \text{ grad } t \quad (3)$$

trique, les autres sur la thermoélectricité; on écrirait d'ailleurs presque sans hésitation les correspondantes dans la conduction calorifique.

Les expressions numérotées ici (6) et (7) en revanche y sont données pour la première fois.

Puis orientant le grad t dans une direction quelconque ψ , on trouve, en admettant les composantes du pouvoir thermoélectriques proportionnelles à celles du gradient :

Parallèlement au gradient :

$$\mathcal{E}_{\parallel} = (\Theta + \Delta_x \Theta \cos^2 \psi + \Delta_y \Theta \sin^2 \psi) \text{ grad } t \quad (4)$$

Normalement au gradient :

$$\mathcal{E}_{\perp} = (\Delta_x \Theta + \Delta_y \Theta) \sin \psi \cos \psi \text{ grad } t \quad (5)$$

Cas des expériences en discussion (fig. 1) : ψ vaut alors 45° , et on observe normalement au gradient ; le phénomène est alors représenté d'après les formules ci-dessus par

$$\mathcal{E}_{\perp} = \frac{1}{2} (\Delta_y \Theta - \Delta_x \Theta) \text{ grad } t \quad (6)$$

C'est donc l'effet « transversal » ; on tire tout aussi bien l'effet « longitudinal », c.-à-d. la *variation* par torsion du pouvoir thermoélectrique usuel dans la direction du gradient de température :

$$\Delta \mathcal{E}_{\parallel} = \frac{1}{2} (\Delta_y \Theta + \Delta_x \Theta) \text{ grad } t \quad (7)$$

Les expressions trouvées ne sont liées à aucune hypothèse atomique particulière ; notre problème est maintenant de nous baser sur la théorie esquissée des ferromagnétiques pour construire les fonctions Δ_x et Δ_y afférentes à ces milieux.

5. Calculs de moyenne à partir de l'aimantation spontanée.

Faisons donc appel à la texture des ferromagnétiques, une mosaïque de particules microscopiques dans chacune desquelles existe la même aimantation spontanée \mathcal{I}_w .

Pour représenter tout arrangement spatial de ces vecteurs \mathcal{I}_w , nous nous servons d'une fonction de répartition $f(\gamma)$, γ étant l'angle formé par chacun des vecteurs avec une direction privilégiée de la matière (v. fig. 2), celle de la contrainte principale par exemple, ou d'un champ magnétique d'origine extérieure, $f(\gamma)$ symbolise la densité des vecteurs dans l'angle solide infiniment petit d'orientation γ ou encore la probabilité pour que les vecteurs soient compris dans cet angle solide.

Observons que la possibilité de représenter complètement une répartition à l'aide d'une seule variable γ suppose que la distribution a une infinité de plans de symétrie parallèles à la direction privilégiée, qui est un « axe de répétition » d'ordre infini ou encore « axe d'isotropie » (brièvement : symétrie de révolution). Il en sera

toujours ainsi dans les cas considérés (contrainte uniforme axée, aimantation par champ magnétique uniforme).

N désignant le nombre des particules de la mosaïque (domaines de WEISS) contenues dans l'unité de volume, la condition suivante doit évidemment être satisfaite quelle que soit la répartition.

$$\int_0^\pi 2\pi f(\gamma) \sin \gamma d\gamma = N \quad (8)$$

À chaque fonction $f(\gamma)$ déterminée correspond une polarisation moyenne du corps, laquelle peut être symbolisée aisément; mais la réciproque n'est pas vraie: une polarisation macroscopique étant donnée, une infinité de répartitions peuvent y conduire. Comme répartition très particulière et dont nous aurons à faire usage,

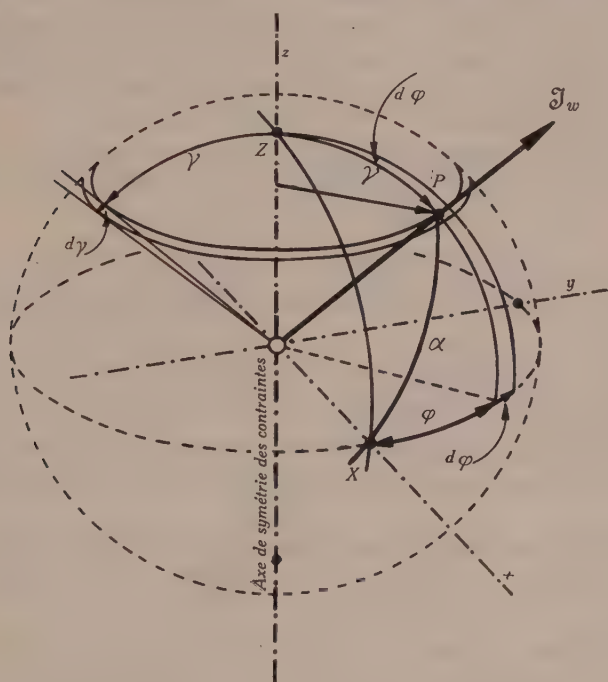


Fig. 2.

notons celle où toutes les directions sont également représentées (répartition isotrope); elle s'exprime simplement par

$$f(\gamma) = N/4\pi = \text{const.} \quad (9)$$

Le corps est alors dénué de toute polarisation observable (tant vectorielle que tensorielle).

6. Polarisation, déformation et pouvoir thermoélectrique.

Reprenons l'hypothèse que j'ai proposée il y a bien des années: le pouvoir thermoélectrique est fortement altéré par l'aimantation spontanée, et de plus la modification est anisotrope: seule cette anisotropie spontanée (qui est d'ailleurs faible par rapport à la variation principale, v. § 3 in fine) entre en ligne de compte ici. Symbolisons-la comme précédemment par deux coefficients liés l'un à la direction de \mathcal{J}_w , l'autre à la direction normale et tels que

$$\mathcal{E}_{\parallel} = \eta_{\parallel} \text{grad } t \quad \mathcal{E}_{\perp} = \eta_{\perp} \text{grad } t \quad (10)$$

Posons en outre

$$\eta_{\parallel} - \eta_{\perp} = k \eta_{\perp} \quad (11)$$

La recherche du pouvoir thermoélectrique observable du corps considéré revient, étant donnée une polarisation déterminée par une $f(\gamma)$, au calcul de la moyenne des composantes des vecteurs η grad t dans une direction quelconque. Mais on a vu plus haut qu'il suffit d'exécuter ce calcul pour *deux directions privilégiées*. Nous choisissons naturellement celles de l'axe d'isotropie (des contraintes mécanique ou magnétique) et celle de ses normales.

Raisonnant sur un quelconque des domaines de la mosaïque comme nous l'avons fait pour écrire l'équation (5)

$$\mathcal{E}_{\parallel} = (\Theta + \Delta_x \Theta \cos^2 \psi + \Delta_y \Theta \sin^2 \psi) \text{grad } t$$

et tenant compte des notations un peu différentes, on trouve aisément:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\parallel} &= (\eta_{\parallel} \cos^2 \psi + \eta_{\perp} \sin^2 \psi) \text{grad } t \\ &= \eta_{\perp} (1 + k \cos^2 \psi) \text{grad } t \end{aligned} \quad (12)$$

\mathcal{E} désignant la composante du « champ » thermoélectrique dans la direction du gradient thermique et ψ l'angle de ce gradient avec \mathcal{J}_w .

Gradient parallèle à l'axe d'isotropie. La fig. 2 légitimera aisément l'expression suivante de la moyenne suivant cet axe (oz)

$$\Theta_{\parallel} \text{grad } t = \text{grad } t \cdot \frac{2\pi}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin \gamma (1 + k \cos^2 \gamma) d\gamma$$

ou

$$\Theta_{\parallel} = \eta_{\perp} \left(1 + \frac{2\pi k}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin \gamma \cos^2 \gamma d\gamma \right) \quad (13)$$

ou aussi

$$\Theta_{\parallel} = \eta_{\perp} \left(1 + k - \frac{2\pi k}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin^3 \gamma d\gamma \right)$$

Gradient normal à l'axe d'isotropie de la polarisation (suivant 0x fig. 2) Le calcul est ici un peu plus compliqué par la nécessité d'introduire le nouvel angle α du gradient avec \mathcal{J}_w et de choisir comme élément d'intégration un angle solide infiniment petit du second ordre $\sin \gamma d\gamma d\varphi$.

En laissant d'ailleurs tomber grad t , on trouve

$$\Theta_{\perp} = \frac{\eta_{\perp}}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} (1 + k^2 \alpha) d\varphi \quad (14)$$

le triangle sphérique PXZ exige que

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \varphi$$

d'où

$$\Theta_{\perp} = \frac{\eta_{\perp}}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin \gamma d\gamma (1 + k \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha) d\varphi$$

qui se réduit finalement à

$$\Theta_{\perp} = \eta_{\perp} \left(1 + \frac{\pi k}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin^3 \gamma d\gamma \right) \quad (15)$$

Pour simplifier l'écriture, posons une fois pour toutes

$$\int_0^{\pi} f(\gamma) \sin^3 \gamma d\gamma = p \quad (16)$$

C'est là une intégrale qui exprime un caractère purement géométrique de la polarisation*).

Ces formules générales résolvent le problème et ont permis d'établir presque sans calcul nombre de propriétés que l'expérience avait fait soupçonner. Voici quelques exemples frappants.

Et d'abord le pouvoir thermoélectrique du corps *dénué de toute polarisation* (répartition isotrope)

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{is}} &= \eta_{\perp} \left(1 + \frac{\pi k}{N} \int_0^{\pi} \frac{N}{\pi} \sin^3 \gamma d\gamma \right) = \\ &= \eta_{\perp} \left(1 + \frac{k}{3} \right) = \frac{1}{3} (2 \eta_{\perp} + \eta_{\parallel}) \end{aligned} \quad (17)$$

*) L'aimantation macroscopique \mathcal{J} s'exprime immédiatement à l'aide de la fonction γ ainsi:

$$\mathcal{J} = 2\pi \frac{\mathcal{J}_w}{N} \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

où le changement de signe du facteur trigonométrique dans l'intervalle d'intégration fait immédiatement ressortir la différence de symétrie avec les phénomènes de conduction régis par l'intégrale p (16) où figure $\sin^3 \gamma$ marquant l'indifférence à ces effets du sens des vecteurs \mathcal{J}_w .

Calculons ensuite les variations de pouvoir thermoélectrique que l'établissement d'une polarisation provoque tant dans sa direction que normalement à elle:

$$\Theta_{\parallel} - \Theta_{is} = \Delta_{\parallel} \Theta = 2k\eta_{\perp} \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) - 2(\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}) \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \quad (18)$$

$$\Theta_{\perp} - \Theta_{is} = \Delta_{\perp} \Theta = -k\eta_{\perp} \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) - (\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}) \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \quad (19)$$

D'où découle immédiatement que, quel que soit le degré atteint par la polarisation observable:

$$\Delta \Theta_{\parallel} / \Delta \Theta_{\perp} = -2^* \quad (20)$$

D'où découle encore une *mesure de l'anisotropie* accompagnant la polarisation par la différence $\Delta \Theta$ des pouvoirs thermoélectriques principaux:

$$\begin{aligned} &= \Delta \Theta_{\parallel} - \Delta_{\perp} \Theta = |\Delta_{\parallel} \Theta| + |\Delta_{\perp} \Theta| = \\ &= 3k\eta_{\perp} \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) = 3(\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}) \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Pour nos effets d'origine mécanique, longitudinaux et transversaux, il suffit de substituer les valeurs trouvées des Δ dans les formules (6) et (7).

Il vient pour l'effet transversal:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\perp} &= \frac{1}{2} (\Delta_y \Theta - \Delta_x \Theta) \text{ grad } t \\ &= -\frac{3}{2} k\eta_{\perp} \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \text{ grad } t - \frac{3}{2} (\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}) \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \text{ grad } t \end{aligned} \quad (21)$$

et pour l'effet longitudinal (variation)

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{\parallel} &= \frac{1}{2} (\Delta_y \Theta + \Delta_x \Theta) \text{ grad } t \\ &= \frac{1}{2} k\eta_{\perp} \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \text{ grad } t + \frac{1}{2} (\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}) \left(\frac{1}{3} - p \frac{\pi}{N} \right) \text{ grad } t \end{aligned} \quad (22)$$

*) C'est là une loi remarquable qui s'est tout d'abord manifestée dans des expériences sur la magnétorésistance vers la saturation, et qui a reparu ensuite ailleurs; on voit ici son origine profonde et la généralité à laquelle elle peut prétendre; j'en ai discuté dans diverses publications antérieures.

Et il apparaît une propriété analogue à celle des f.e.m. magnétothermoélectriques justifiée plus haut

$$\Delta \mathcal{E}_{\parallel} / \mathcal{E}_{\perp} = -\frac{1}{3} \quad (23)$$

quel que soit le degré de polarisation.

Toutes ces expressions condensent quantitativement la théorie basée sur nos hypothèses : elles ramènent les effets mécanothermoélectriques aux anisotropies magnétothermoélectriques spontanées des domaines de WEISS.

7a. Communauté d'origine des effets de la déformation et de ceux de l'aimantation. Le sens de l'effet transversal.

La théorie postule en substance une origine microphysique commune aux effets prévus et observés et aux forces électromotrices d'aimantation.

La voie pour prévoir le sens du phénomène est donc de combiner les orientations générales que les contraintes imposent aux moments élémentaires avec la direction relative des gradients thermiques et de faire ensuite entrer en ligne de compte ce que l'on sait des anisotropies thermoélectriques élémentaires des groupements de la mosaïque.

On sait, et la théorie des magnétostrictions spontanées en rend compte, que les moments élémentaires du nickel tendent à se placer *normalement* à la direction d'une extension et que ceux du fer se comportent de même dans leur *majorité*. En sorte que la torsion des tubes en *vis droite* par exemple crée une orientation apolaire en *vis gauche* (moments tangents à des hélices gauches, voir fig. 5 de ¹⁾).

Les phénomènes thermoélectriques étant sensibles à la direction (mais non au sens des moments), nous assimilons le tube à un aimant à lignes d'induction hélicoïdales de 45° de pente ; on sait d'autre part qu'une aimantation macroscopique altère le pouvoir thermoélectrique propre parallèle à elle en *sens inverse du gradient thermique*, et dans son sens normalement à elle ; dès lors une hélice gauche de *lignes d'induction* doit donner des courants tournant à droite, c.-à-d. des courants régis par l'*hélice des lignes d'extension* qui est à droite.

Or, c'est exactement la règle que l'expérience a établie (voir ¹⁾ § 7).

7b. Communauté d'origine des effets de la déformation et de ceux de l'aimantation. La valeur numérique de l'effet transversal.

La liaison avec les forces électromotrices d'aimantation est donnée ici de la manière la plus immédiate et la plus simple par la formule (6).

$$\mathcal{E}_{\perp} = \frac{1}{2} (\Delta_y \Theta - \Delta_x \Theta) \text{ grad } t.$$

Le facteur entre parenthèses est évidemment identique à

$$\Delta \Theta = |\Delta_{\parallel} \Theta| + |\Delta_{\perp} \Theta| \quad (21)$$

dont nous avons vu qu'il mesure l'anisotropie du pouvoir thermo-électrique créé par aimantation macroscopique. Le travail précité de T. KOUSMINE a établi pour ce facteur les chiffres suivants qui s'appliquent à la matière aimantée à *saturation*:

$$\begin{array}{ll} \text{pour Ni} & \dots \quad 43,7 \cdot 10^{-8} \text{ Volt/deg} \\ \text{pour Fe} & \dots \quad 14,8 \cdot 10^{-8} \text{ Volt/deg} \end{array}$$

Il faut les diviser par 2 pour obtenir l'effet transversal théorique formule (6).

Mettons en regard les valeurs maximum (saturation élastique) de cet effet d'après les expériences de PERRIER et AZAD:

$$\begin{array}{ll} \text{Ni} & \dots \dots \quad 81 \cdot 10^{-8} \text{ Volt/deg} \\ \text{Fe} & \dots \dots \quad 42 \cdot 10^{-8} \text{ Volt/deg} \end{array}$$

Les ordres de grandeurs sont bien ceux que l'on doit prévoir, mais les chiffres diffèrent notablement: l'effet mécano-thermoélectrique serait 3,7 fois trop fort pour le nickel, 5,8 fois trop fort pour le fer.

A premier examen, cet excès, si l'on peut dire, du succès de la théorie pourrait donner à penser que le phénomène comporte une part interprétable à la manière proposée et une autre d'un mécanisme différent.

8. Limites de validité de deux suppositions.

Avant de recourir à une telle supposition, il faut faire entrer en ligne de compte, et notamment dans des recherches ultérieures les deux facteurs que voici, l'un proprement *expérimental*, l'autre d'ordre *théorique*.

Pour la comparaison des chiffres d'origines aussi différentes que des excitations mécaniques et des excitations magnétiques, nous

avons du les rapporter des deux côtés à l'unité de gradient thermique. Dans les mesures de PERRIER et AZAD, cette grandeur est calculée à partir du phénomène global en postulant l'uniformité de ce gradient, soit une *répartition linéaire* de la température tout au long des cylindres d'essai.

En raison de la faible section conductrice (paroi mince) et de l'étendue relativement forte au contraire de la surface latérale, la déperdition par cette surface, en dépit de la protection d'ouate, n'est sans doute pas négligeable. En sorte que le gradient va certainement s'accroissant vers l'extrémité chaude; or la bobine d'exploration occupait précisément le premier tiers de la longueur vers cette extrémité-là; en sorte que les effets observés étaient certainement *plus intenses* que si la bobine s'était étendue à toute la longueur, réalisant elle-même un gradient moyen sur la différence entière de la température.

Une part de l'écart avec les chiffres basés sur les f.e.m. d'aimantation est donc due sans aucun doute à ce mode de calcul. Mais cette cause de divergence avec les conditions théoriques n'a naturellement aucune influence sur les variations relatives des phénomènes.

Quant au fait théorique, il réside dans la supposition même invoquée à propos de la comparaison numérique: celle que les phénomènes de saturation thermoélectrique correspondent à des *polarisations identiques* (identité des intégrales p) dans les deux cas de la contrainte mécanique et de la contrainte magnétique. Or, si dans le dernier la répartition des vecteurs \mathfrak{F}_w est certaine — le parallélisme — on n'en peut dire autant avec les déformations.

Pour le *nickel* d'abord, une contrainte d'extension uniforme doit distribuer les moments spontanés normalement à sa direction, c.-à-d. *équatorialement*; il règne, à vrai dire, dans le tube une compression normale à l'extension, mais il est presque certain qu'elle ne rassemble pas cette infinité de directions équatoriales en un seul faisceau parallèle, distribution requise pour la comparaison avec la saturation magnétique.

Les mêmes observations sont applicables au fer, et on se rappellera au surplus que dans le cristal de ce métal, la magnétostriktion se manifeste positivement et négativement selon la direction de l'aimantation par rapport aux axes de symétrie; une même contrainte provoque en conséquence des rotations en sens contraire selon la direction de la contrainte. Il est donc à plus forte raison certain qu'à la *saturation élastique*, la répartition des moments dans le fer n'est pas le parallélisme total que comporte la *saturation*

magnétique: la supposition faite pour suggérer la comparaison ne saurait donc prétendre davantage qu'à une grossière approximation et on doit en conclure que les valeurs de l'effet, tirées à l'aide de cette hypothèse, des forces électromotrices d'aimantation, ne peuvent pas être identiques à celles de l'observation directe.

9. Thermoélectricité d'aimantation et thermoélectricité de déformation dans le fer.

La confrontation des phénomènes d'origine élastique avec ceux d'origine magnétique est de nature à apporter d'autres clartés encore dans l'interprétation des uns et des autres. Et c'est le fer qui se montre ici encore le plus suggestif.

Mettons en regard les dépendances expérimentales force mécanothermoélectrique en fonction de la contrainte et force thermoélectrique en fonction du champ inducteur. Un contraste essentiel et paradoxal frappe au premier examen: l'accession à la saturation rappelle fidèlement une *courbe d'aimantation* dans le cas précisément de la *cause mécanique sans aimantation* tandis qu'au contraire l'aimantation dans ses conditions classiques correspond à une courbe de réponse électrique avec deux régions où la variation est de signe inverse, séparées par un maximum caractérisé; l'accession à la saturation se fait cette fois par les valeurs décroissantes *vers un chiffre notablement plus bas que le maximum* (voir fig. 3 qui résume l'essentiel des résultats de T. KOUSMINE). L'expérience ne saurait marquer mieux que dans l'un et l'autre cas les polarisations doivent présenter des différences caractérisées autres encore que celles du *sens* des vecteurs.

Le cadre de cet article est trop étroit pour tenter d'y élucider en détail les facteurs qui pourraient entrer en ligne de compte dans ce singulier comportement. Je vais donc me borner à indiquer la voie qui me paraît ouverte.

Considérons un quelconque des cristallites du conglomerat, non plus un groupement de WEISS (7).

Les directions d'équilibre des moments sont, en l'absence de toute contrainte, celles des trois axes quaternaires (100). Sous une contrainte *mécanique*, leurs nouvelles positions seront régies par une condition de minimum d'énergie, dans laquelle grandeur entrent les couplages *réticulaires* d'abord, puis le *potentiel de déformation* (y compris la striction spontanée). Sous contrainte magnétique (action d'un champ extérieur), *les mêmes couplages entrent en jeu*, mais il s'y ajoute *l'énergie des moments dans le champ*.

Très schématiquement, les vecteurs \mathfrak{J}_w partant de leurs directions naturelles (100) tendent sous l'action d'un champ partant de 0, à se rapprocher d'abord d'autres positions de symétrie du cristal et ce sont seulement des champs beaucoup plus intenses qui peuvent finalement amener les moments vers le parallélisme. Il paraît naturel de penser qu'une tension mécanique doive limiter son effet d'orientation dans les cristaux à la première étape, la plus naturelle en l'absence de l'énergie magnétique.

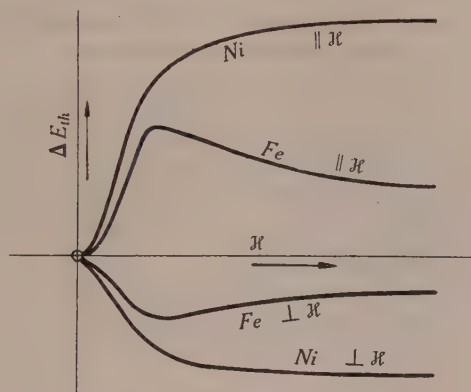


Fig. 3.

S'il en est ainsi, le degré de polarisation (valeur de l'intégrale p) qui doit être pris comme base de comparaison entre les deux groupes de phénomènes n'est pas la *saturation magnétique*, mais beaucoup plus approximativement celui qui correspond au maximum de *force électromotrice d'aimantation*.

Reprenons la comparaison sur la base du chiffre de ce maximum observé par T. KOUSMINE. On trouve cette fois :

$$\frac{\text{Eff. mécanique}}{\text{Eff. magnétique}} = \frac{42 \cdot 10^{-8}}{11 \cdot 10^{-8}} = 3,8$$

nombre en accord à la certitude près autorisée par les expériences diverses avec celui de 3,7 trouvé plus haut pour le nickel à saturation.

De cette coïncidence beaucoup meilleure, il serait prématuré de tirer une conclusion autre que l'espoir de trouver, dans la direction théorique indiquée, justification de la communauté complète du mécanisme de deux groupes d'effets forts différents par leur mode de production et aussi l'explication de la variation si énigmatique des

forces magnétoélectromotrices du fer. Aussi bien, seules les expériences sur des monocristaux pourront être concluantes sur ce point; elles devront pour cela décider avant tout si vraiment l'anisotropie thermoélectrique spontanée dépend si fortement du passage des moments d'une direction de symétrie du cristal à des directions obliques, alors que, je tiens à le signaler ici, *on n'a observé rien de semblable pour la résistivité électrique*. — Je reviens sur ce point plus loin.

10. Répercussions d'ordre général sur les mécanismes du courant électrique dans les métaux.

De tout ce qui précède, nous sommes donc fondés à admettre que les effets thermoélectriques de déformations *mécaniques* sont au fond des manifestations de la dépendance entre les électrons de conduction et le *ferromagnétisme*, qu'ils seraient ininterprétables sans l'aide de la théorie actuelle de l'aimantation spontanée et corrélativement du champ moléculaire.

Je voudrais maintenant faire ressortir qu'outre cela et plus généralement, ces effets présentent des caractères de nature à modifier de manière assez essentielle la théorie de la conduction métallique.

Observons une fois de plus que les courants observés circulent à *angle droit*, non seulement avec le *gradient de température*, mais aussi avec le *champ électrique* qui équilibre la force électromotrice thermoélectrique. Ainsi il n'existe aucune différence de potentiel ni de température le long des lignes de courant et mieux encore, il ne peut y apparaître *aucune composante de champ électrique*. J'insiste pour marquer qu'*on ne saurait ici faire appel à une description du genre de celle des courants induits dans un circuit circulaire et homogène par un flux de répartition coaxiale* (champ circulaire sans différence de potentiel).

On pourrait dire, à la manière classique, que nous avons une force électromotrice thermoélectrique. J'ai procédé ainsi plus haut en formulant des réserves; mais il importe alors de répéter que la définition de la valeur numérique de cette f.e.m. est *purement conventionnelle* (voir art. P. et A., p. 473 § 6).

Les courants (seul phénomène objectif) ne s'accompagnent en effet d'aucune transformation d'énergie dans le système considéré: de la chaleur se dégrade par conduction il est vrai, mais cette dégradation s'accomplit tout aussi bien dans l'échantillon non déformé ou les courants n'existent pas; et d'ailleurs, de toute façon le flux de chaleur est ici *conservatif*.

En vérité, *on ne saurait plus parler d'une résistance* ni corrélativement d'un effet Joule pour ces courants *normaux aux deux gradients*, car la définition même de la résistivité doit faire appel à un champ ou à un potentiel d'origine extérieure. En toute correction, l'expression qui convient ici est que c'est la matière elle-même (les ions du réseau) qui pousse les électrons et que de tels courants sont des *sortes de supercourants*. Comme ils ne sont évidemment pas identiques à ceux que l'on entretient dans des superconducteurs à très basse température, j'ai introduit il y a longtemps déjà pour des cas semblables, le terme *d'autocourants*.

Et voici un cas particulier où l'on reconnaîtra de manière particulièrement frappante les caractéristiques qui nous occupent : Dans le cylindre d'expérience, superposons au courant calorifique axial un courant électrique axial lui aussi ; on peut toujours lui donner une intensité telle que le gradient de potentiel s'annule (cette intensité particulière est alors celle de l'« auto-courant thermoélectrique ») ; le cylindre entier constitue alors un *espace équipotentiel* et les courants transversaux qu'une torsion va entretenir ont comme seule cause l'état de la matière et son gradient thermique (toujours normal), il n'agit plus *aucun agent d'ordre électrique*, et il n'y a toujours aucune transformation de chaleur.

Il paraît clair que les théories du courant métallique fondées exclusivement sur le gaz électronique — même dans ses formes modernes — avec ses gradients d'énergie et le champ électrique comme « moteurs » ne peuvent rendre compte de phénomènes de types semblables. C'est à des mécanismes faisant jouer à l'édifice réticulaire (modifié par exemple par le champ électrique) un rôle actif qu'il faudra, nécessairement je pense, faire appel. On sait que la première théorie de J. J. THOMSON (antérieure à celle du gaz électronique), pour vieillie qu'elle soit maintenant, était un type extrême du genre ; depuis lors P. W. BRIDGMAN et C. BENEDICKS ont travaillé avec succès dans cette direction, et j'y suis moi-même revenu à plusieurs reprises en me basant en particulier sur les effets nombreux se rattachant au magnétogalvanisme. Plus récemment, des recherches magnétogalvaniques de la Reichsanstalt ont à nouveau accusé cette nécessité⁹).

J'avais aussi signalé, à son appui, des essais sur des cristaux, mais que leur exécution pratiquement impossible réduisait au rôle de « Gedankenexperimente ». Les phénomènes ici discutés les ont fait entrer par une autre voie dans le domaine des réalités.

Laboratoire de Physique de l'Université de Lausanne.

Index bibliographique.

¹⁾ PERRIER et AZAD: Les lois expérimentales du nouvel effet thermomécano-électrique transversal. H.P.A. v. XVII. (1944) p. 463.

²⁾ A. PERRIER: Lignes générales d'une théorie de la conduction métallique et application de la théorie à divers phénomènes (Soc.s. de Physique Bâle, 2. IX. 1927). Arch. des sc. phys. et nat. (5), v. 9 (1927), p. 347 et 343; notes très brèves développées dans la publication suivante: A. PERRIER: Interprétation unitaire des particularités de la conduction des milieux ferromagnétiques. Soc. s. de phys. Neuchâtel, 6 mai 1930, H.P.A., v. 3, 1930, p. 400.

³⁾ A. PERRIER: Groupes de phénomènes électriques et thermiques liés aux déformations élastiques et plastiques. Soc. s. de Phys. Lausanne, 4. V. 1935, H.P.A. v. 8 (1935), p. 329.

⁴⁾ A. PERRIER: Observation de nouveaux effets translationnels des déformations sur la conduction métallique. Soc. s. de phys. Einsiedeln, 18. VIII. 1935, H.P.A. v. 8 (1935), p. 495.

⁵⁾ A. PERRIER: Théorème sur la variation des effets magnétogalvaniques transversaux et effets connexes dans les milieux magnétiques. Soc. s. de physique Altdorf 2. IX. 1933, H.P.A. v. 6 (1933), p. 461.

⁶⁾ A. PERRIER: Théorèmes sur les effets magnétogalvaniques longitudinaux et effets connexes sans les milieux ferromagnétiques. Soc. s. de phys. Locarno 24. IX. 1939, Actes Soc. Helv. Sc. nat. 1939 (p. 15).

⁷⁾ A. PERRIER: Une interprétation de la loi des forces électromotrices thermoélectriques d'aimantation du fer. *id.* page 17.

⁸⁾ Voir p. ex. l'ouvrage classique: J. A. EWING, Magnetic Induction in Iron and other Metals, §§ 136—139.

⁹⁾ Voir p. ex. série de publications de E. JUSTI et collaborateurs in Physikalische Zeitschrift des dernières années.

Kolorimetrie mittelst Vakuumzelle und Kombinationsfilter

von H. König (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

(4. XI. 1944.)

Zusammenfassung. Verwirklichung eines objektiven Empfängers, dessen Empfindlichkeitskurven mit den von der Internationalen Beleuchtungs-Kommission (IBK) festgesetzten Normalreizkurven \bar{x}_λ , \bar{y}_λ , \bar{z}_λ weitgehend übereinstimmen. Die Bestimmung eines IBK-Farb-Koordinatentripels x, y, z erfordert 10 Einzelmessungen, die mittelst einer Kalium-Vakuum-Photozelle und 10 Glasfiltern gewonnen werden.

Aufgabe. Man ist seit Jahren bemüht, die genormten Funktionen der Photometrie und Kolorimetrie in objektiven Messgeräten unter Ausschaltung des individuellen Auges zu verwirklichen. Die beiden Aufgaben sind deshalb aufs engste verwandt, weil die von der Internationalen Beleuchtungs-Kommission (IBK) 1924 angenommene Hellempfindlichkeitskurve $V_\lambda^{(1)}$ mit der \bar{y}_λ -Normalreizkurve des 1931 festgelegten kolorimetrischen Standardbeobachters $(x_\lambda, \bar{y}_\lambda, z_\lambda)^{(2)}$ identisch ist. Die letzteren drei Funktionen, welche angeben, in welchem Verhältnis spektralreine Lichter gleicher Energie ($S_\lambda = \text{konst.}$) die drei „Normalreize anstossen“, sind in Fig. 1 als ausgezogene Kurven und in Tab. 3 zahlenmässig wiedergegeben. Es sei noch an folgende Definitionen erinnert: Für eine beliebige Energiestrahlung S_λ berechnet man die Komponenten gemäss

$$X = \int_{400}^{700} S_\lambda \bar{x}_\lambda d\lambda, \quad Y = \int_{400}^{700} S_\lambda \bar{y}_\lambda d\lambda, \quad Z = \int_{400}^{700} S_\lambda \bar{z}_\lambda d\lambda \quad (1)$$

und die Koordinaten im Farbdreieck gemäss

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z}, \quad z = \frac{Z}{X+Y+Z} \quad (2)$$
$$x+y+z=1.$$

In der IBK-Normierung kommt das Spektrum konstanter Energie als „Weiss“ in die Mitte des gleichseitigen Dreiecks zu liegen:

$$\int x_\lambda d\lambda = \int \bar{y}_\lambda d\lambda = \int \bar{z}_\lambda d\lambda.$$

Verwirklichung. a) *Prinzip.* Es ist bei den heutigen Verhältnissen schwer, einen Überblick über die Publikationen ähnlichen Inhaltes zu gewinnen. Um den Platz der nachstehend angegebenen Lösung im Rahmen der gesamten Problematik zu bestimmen, gebe

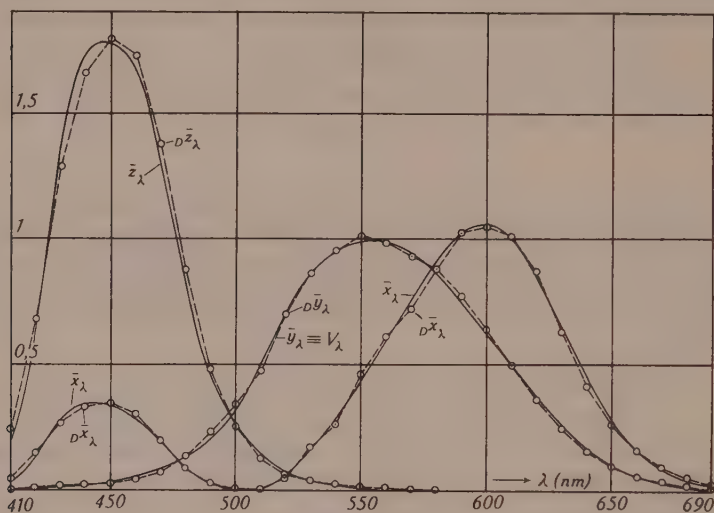


Fig. 1.

Vergleich der realisierten Darstellung $D\bar{x}_\lambda$, $D\bar{y}_\lambda$, $D\bar{z}_\lambda$, mit den Normalreizkurven \bar{x}_λ , \bar{y}_λ , \bar{z}_λ .

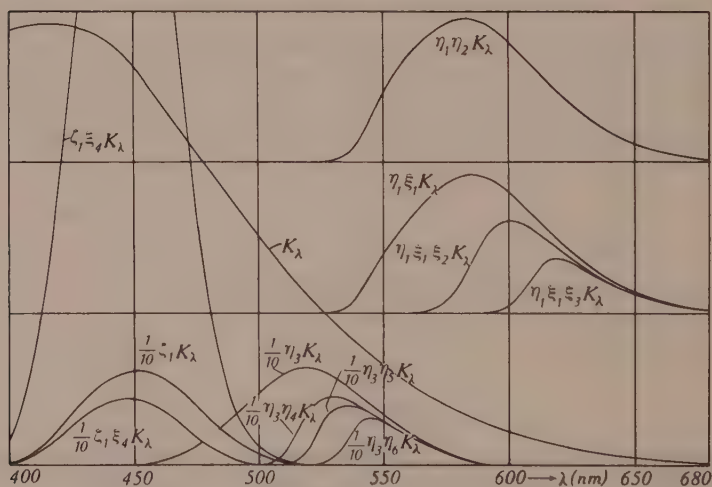


Fig. 2.

Spektrale Empfindlichkeit der 10 Grundkombinationen einschliesslich Kaliumzelle (K_λ).

ich daher kurz eine schematische Übersicht über die Lösungsmöglichkeiten.

Wir kennen drei wesentlich verschiedene Wege, die zum erstrebten Ziel führen: den rein rechnerischen, den rein geometrischen und den auf reiner Filtrierung beruhenden Weg. Mit andern Worten: Was sich bei der Bildung der Integrale $X \dots$ auf die spektralen Anteile bezieht, spielt sich entweder *nacheinander*, oder *nebeneinander*, oder *ineinander* ab.

Im *ersten* Fall, dem spektralphotometrischen, werden die S_λ -Werte für die verschiedenen λ *nacheinander* gemessen, alles weitere wird berechnet. Ist S_λ , z. B. für eine Glühlampe, bekannt, so darf dieses Verfahren einstweilen als das genaueste angesehen werden. Die unten in Tab. 4 angegebenen „Sollwerte“ wurden derart gewonnen.

Im *zweiten* Fall wird ein Spektrum entworfen und die vorschriftsmässige Empfindlichkeitsfunktion durch Einbringung einer Blende passender *Form* erzielt. Wie ausbaufähig dieses Prinzip ist, zeigt eine gleichzeitig erscheinende Arbeit von MÄDER³⁾.

Im *dritten* Fall wird der Empfänger durch ein in der Fläche einheitliches *Filter* abgedeckt. GUILD z. B. hat diesen Weg beschritten⁴⁾.

Diese drei Prinzipien lassen sich mit Vorteil kombinieren. Fall 2 und 3 bilden die Grundlage der integralen Verfahren. Die Kombinationen in den Fällen 2 und 3 unterscheiden sich dadurch, dass entweder Fall 2 den Ausgangspunkt darstellt und Fall 3 zur Verbesserung herangezogen wird (KÖNIG⁵⁾, VOOGD⁶⁾, MÄDER³⁾) oder umgekehrt wie bei DRESLER und FRÜHLING⁷⁾, wo im Prinzip gefiltert und das einheitliche die Selen-Sperrschichtzelle deckende Filter zur Verbesserung der Anpassung in Streifen mit verschiedener Durchlässigkeit geometrisch aufgeteilt wird.

Gute kolorimetrische Messungen sind stets etwas Delikates. Es ist ratsam, ein paar Messungen mehr zu machen, etwas Zeit aufzuwenden und etwas Rechenarbeit mit in Kauf zu nehmen, wenn damit die Genauigkeit gesteigert werden kann wie hier, wo man die Anpassungsfähigkeit des Empfängers besser ausnützen kann: Es ist nämlich bequemer, Koeffizienten auf dem Papier (Fall 1) als konstruktiv (Fall 2) anders zu wählen, wenn sich die Zellenempfindlichkeit als geändert oder unrichtig bestimmt herausstellt. Aus diesen Erwägungen tendiert die nachstehend beschriebene genau und doch noch praktisch sein sollende Lösung auf das schon oft erprobte⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾ Mehrfilterverfahren hin: Fall 3, zur Verbesserung kombiniert mit Fall 1.

Mit einer Photozelle und verschiedenen zusammengesetzten Vorfiltern werden 10 Einzelmessungen $a_1 \dots a_{10}$ ausgeführt, aus denen X, Y, Z als Linearkombinationen der a_i errechnet werden können. Wir geben sogleich das genaue

b) *Rezept*. Die Photozelle ist eine normale Kalium-Vakuumzelle von Philips, Typ 3510. Die Empfindlichkeitskurve K_λ ist aus Fig. 2 ersichtlich. Die 18 ausgesuchten Schottfilter (40/40 mm) sind gemäss Tab. 1 zu den 11 „Elementen“ $\xi_1 \dots \xi_4, \eta_1 \dots \eta_6, \zeta_1$ ver-

Tabelle 1.

Aufbau der 11 Elemente. Typenbezeichnung der Schottfilter und Schmelznummern.

ξ_1	: 1 BG 14 (22933) + 2 BG 15 (3012)
ξ_2	: 1 OG 3 (45073)
ξ_3	: 2 RG 1 (45015)
ξ_4	: 1 BG 12 (22870)
η_1	: 1 RG 6 (25404) + 1 OG 5 (29155)
η_2	: 2 BG 14 (22933)
η_3	: 2 VG 4 (41946) + 2 VG 8 (26687)
η_4	: 2 OG 4 (15064)
η_5	: 2 OG 1 (44725)
η_6	: 2 OG 1 (27188)
ζ_1	: 2 BG 7 (21426) + 2 BG 7 (21426) + 1 BG 7 (21426) + 1 BG 1 (23350) + 1 GG 3 (24313)

einigt. Die Zahl vor der Typenbezeichnung bedeutet die Dicke in mm; die Zahlen in Klammern sind Schmelznummern. Vor der Photozelle befindet sich ein Filterkasten mit 3 Führungen. Die auf Hartpapierrähmchen (80/80 mm) montierten Elemente kommen nun in den 10 in Tab. 2 angegebenen „Grundkombinationen“ in diesen Filterkasten. Z. B. bei Messung Nr. 4 ist Grundkombination Nr. 4: $\eta_1 \xi_1 \xi_2$, d. h. sind gleichzeitig η_1, ξ_1 und ξ_2 im Strahlen-gang; das Messergebnis in irgend einem Mass ist a_4 . Die Angaben sind absichtlich so ausführlich, dass es möglich ist, sich hiernach einen solchen Empfänger selbst zu konstruieren. Demgemäss sind in Tab. 3 die Durchlässigkeiten der Grundkombinationen in ‰ und in Fig. 2 die Formen der Empfindlichkeitskurven der Aggregate Grundkombination + Zelle wiedergegeben. Die Messwerte a_i werden nach folgender Vorschrift zu 3 höheren Linear-Kombinationen zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 X &= k_x(1,32 a_2 + 10,5 a_3 + 9,5 a_4 + 13,7 a_5 + 0,75 a_9) \\
 Y &= k_y(0,1 a_2 + 13,2 a_6 + 1,22 a_7 + 0,9 a_8 + 0,7 a_9 + 0,8 a_{10}) \\
 Z &= k_z(4,9 a_1 + 0,1 a_7).
 \end{aligned} \quad (3)$$

Tabelle 2.

Grundkombinationen und Koeffizienten. Beispiel: Farbtort eines Rotfilters (F 45a) bezogen auf Schwarze Strahlung der Temperatur 2720° K.

Mes- sung Nr.	Grund- kombi- nation	Mess- er- geb- nis	Koeffizien- ten			Strahlung $S_{\lambda 2720^\circ}$ a_i multipl. mit			$S_{\lambda 2720^\circ} + \text{Filter F 45a}$ a_i multipl. mit		
			c_{xi}	c_{yi}	c_{zi}	c_{xi}	c_{yi}	c_{zi}	c_{xi}	c_{yi}	c_{zi}
1	ζ_1	a_1			4,9	428		2097	0		0
2	$\zeta_1 \xi_4$	a_2	13,2	0,1		247	326	25	0		
3	$\eta_1 \xi_1 \xi_3$	a_3	10,5			84	882		57	598	
4	$\eta_1 \xi_1 \xi_2$	a_4	9,5			153	1453		62	589	
5	$\eta_1 \xi_1$	a_5	12,7			283	3877		70	959	
6	$\eta_1 \eta_2$	a_6		13,2		280		3696	67		845
7	η_3	a_7		1,22	0,1	1000		1220	2		2
8	$\eta_3 \eta_4$	a_8		0,9		564		508	2		2
9	$\eta_3 \eta_5$	a_9	0,75	0,7		464	348	325	2	1	1
10	$\eta_3 \eta_6$	a_{10}		0,8		316		253	2		2
$\Sigma c_i a_i$						6886	6027	2197	2147	852	0
X, \dots Sollwerte gem. Formel(1)						9745	8739	2821			
Hieraus k_x, \dots als Quotient						1,415	1,450	1,284	1,415	1,450	1,284
$X + Y + Z$; X, \dots gemäss For- mel (3)						21305	9745	8739	4872	3057	1235
Kontrolle ($\Sigma=1$); <i>Koordinaten</i>						1,000	,458	,410	,132	1,000	,712
										,288	,000

Hinter diesen Formeln steht die Behauptung, dass die experimentellen Kurven, oder, wie wir sie zusammengefasst nennen können, die *Darstellung*

$$\begin{aligned}
 {}_D\bar{x}_\lambda &= k_x(1,32 \zeta_{\lambda 1} \xi_{\lambda 1} + 10,5 \eta_{\lambda 1} \xi_{\lambda 1} \xi_{\lambda 3} + \dots + 0,75 \eta_{\lambda 3} \eta_{\lambda 5}) \cdot K_\lambda \\
 {}_D\bar{y}_\lambda &= k_y(0,1 \zeta_{\lambda 1} \xi_{\lambda 4} + 13,2 \eta_{\lambda 1} \eta_{\lambda 2} + \dots + 0,8 \eta_{\lambda 3} \eta_{\lambda 6}) \cdot K_\lambda \\
 {}_D\bar{z}_\lambda &= k_z(4,9 \zeta_{\lambda 1} + 0,1 \eta_{\lambda 3}) \cdot K_\lambda
 \end{aligned} \quad (4)$$

sich mit den IBK-Kurven $\bar{x}_\lambda, \bar{y}_\lambda, \bar{z}_\lambda$ decken. Wie weit dies der Fall ist, zeigen Fig. 1 und Tab. 3. Wenn man bedenkt, wie steil die Kalium-Empfindlichkeit K_λ (Fig. 2) gegen Rot hin abfällt, so darf mit dem Erreichten wohl zufrieden sein. Verbesserungen sind, namentlich wenn die Auswahl an Filtern wieder grösser ist, ohne Zweifel möglich.

Theoretische Beurteilung der Güte der Anpassung. Mit Hilfe der Formeln (1) werden sowohl für die Sollfunktionen $x_\lambda \dots$ als auch für die Darstellung ${}_D\bar{x}_\lambda \dots$ die Komponenten $X \dots$ und ${}_D X \dots$ der schwarzen Strahlung $S_{\lambda 2720^\circ}$ berechnet. Da die Koeffizienten $c_{xi} \dots$ angegeben und benützt wurden, wie sie sich aus dem halb rechnerischen, halb zeichnerischen Probieren ergeben haben, darf

Tabelle 3.

nm λ	Normalreizkurven						Filterdurchlässigkeit in ‰									
	Sollwerte			Darstellung			Grundkombinationen									
	\bar{x}_λ	\bar{y}_λ	\bar{z}_λ	$D\bar{x}_\lambda$	$D\bar{y}_\lambda$	$D\bar{z}_\lambda$	ξ_1	$\xi_1\xi_2$	$\eta_1\xi_1$	$\eta_1\xi_2$	η_3	$\eta_3\eta_4$	$\eta_3\eta_5$	$\eta_3\eta_6$		
400	14		68	11		51	3	2								
410	43	1	207	53	4	240	14	11								
420	134	4	646	146	11	686	40	32								
430	284	12	1386	266	20	1290	76	59								
440	348	23	1747	330	25	1660	101	75								
450	336	38	1772	346	30	1830	119	83			1					
460	291	60	1669	300	44	1732	122	79			6					
470	195	91	1288	197	76	1380	107	57			19					
480	96	139	813	89	139	883	76	29			46					W
490	32	208	465	30	234	485	46	11			94					
500	5	328	272	9	343	258	26	4			155	0,5				
510	9	503	158	3	480	130	12	1			229	23	1			
520	63	710	78	50	702	71	5				286	155	47	1		
530	165	862	42	174	867	46	2	$\eta_1\xi_1\xi_2$	1	1	308	238	192	31		
540	290	954	20	260	954	28			7	8	296	251	240	167		
550	433	995	9	461	1019	20	$\eta_1\xi_1\xi_3$		30	34	254	222	222	202		
560	595	995	4	610	983	13			1	58	64	198	175	176	168	
570	762	952	3	722	932	7			3	89	95	140	125	125	122	
580	916	870	2	877	883	4			24	128	133	92	83	83	81	
590	1026	757	1	1027	774	2	1		84	159	159	52	47	47	46	
600	1062	631		1048	645	1	10		139	180	175	29	26	26	26	
610	1003	503		1014	498		76		159	187	178	14	13	13	13	
620	854	381		871	361		135		160	181	169	5	4	4	4	
630	642	265		636	246		144		153	170	155	0,5	0,5	0,5	0,5	
640	448	175		413	153		137		141	156	138					
650	284	107		264	97		125		128	141	123					
660	165	61		160	57		113		115	126	109					
670	87	32		96	34		101		102	113	96					
680	47	17		54	19		90		91	100	87					
690	23	8		28	10		78		79	87	77					
700	11	4		15	5		68		68	75	69					

man sich nicht wundern, dass sich die berechneten Komponenten nicht paarweise decken. Es ergibt sich

$$k_{x(\text{theor})} = \frac{X}{D X} = 1,010, \quad k_{y(\text{theor})} = \frac{Y}{D Y} = 1,007, \quad k_{z(\text{theor})} = \frac{Z}{D Z} = 0,975.$$

Wenn man im Folgenden die ${}_DX$, ${}_DY$, ${}_DZ$ für irgend eine Lichtart bezüglich mit $k_{x(\text{theor})} \dots$ multipliziert, so bedeutet das eine berechnete *theoretische Eichung* des Kolorimeters derart, dass die Strahlung $S_{\lambda 2720^\circ}$ richtig wiedergegeben wird.

Für einen Satz Farbgläser mit den Durchlässigkeitsfunktionen $\tau_{n\lambda}$ werden nun die Integrale

$$X_n = \int S_{\lambda 2720^\circ} \bar{x}_\lambda \tau_{n\lambda} d\lambda, \dots; \quad {}_DX_n = \int S_{\lambda 2720^\circ} {}_D\bar{x}_\lambda \tau_{n\lambda} d\lambda, \dots$$

berechnet und in obigem Sinn korrigiert. Die gemäss Formel (2) berechneten Koordinaten sind in Tab. 4 als „int. Sollwerte“ und

Tabelle 4.

Prüfung des Kolorimeters durch Bestimmung der Farborte einiger Farbgläser, bezogen auf Schwarze Strahlung von 2720° K .

$S_{\lambda 2720^\circ}$ ohne Filter	int. Sollwerte			berechnete W.			gemessene W.		
	x	y	z	${}_Dx$	${}_Dy$	${}_Dz$	${}_Dx$	${}_Dy$	${}_Dz$
	,458	,410	,132	,458	,410	,132	,458	,410	,132
2 BG 12 (F 3) . .	,148	,036	,816	,147	,035	,818	,157	,035	,808
1 BG 12 (F 3a) . .	,157	,112	,731	,157	,113	,730	,158	,108	,734
1 BG 7 (F 1) . .	,265	,415	,320	,264	,417	,319	,261	,415	,324
2 BG 14 (F 4) . .	,348	,418	,234	,346	,421	,233	,344	,420	,236
1 BG 14 (F 4a) . .	,394	,415	,191	,392	,420	,188	,396	,416	,188
1 VG 1 (F 5a) . .	,374	,541	,085	,370	,544	,086	,376	,546	,087
2 OG 2 (F 43) . .	,629	,371	,000	,629	,370	,001	,628	,371	,001
2 OG 3 (F 44) . .	,677	,323	,000	,682	,318	,000	,681	,319	,000
1 RG 2 (F 45a) . .	,709	,291	,000	,719	,281	,000	,712	,288	,000
2 RG 2 (F 8) . .	,726	,274	,000	,731	,269	,000	,726	,274	,000

„berechnete Werte“ angegeben. Der Vergleich lässt die bemerkenswerte theoretische Leistungsfähigkeit des Kolorimeters erkennen: Die Koordinaten werden auf durchschnittlich 0,003 genau wiedergegeben.

Praktische Beurteilung der Güte der Anpassung. Eine auf $2720^\circ \pm 15^\circ$ an die amtliche Farbtemperaturskala angeschlossene Wolfram-Spiraldraht-Lampe wird durchgemessen. Das Beispiel ist in Tab. 2 vollständig angeführt. Die „Bruttowerte“ $\Sigma c_i a_i$ weichen von den oben berechneten internationalen Sollwerten wegen des beliebigen Massstabes (a_7 willkürlich = 1000 gesetzt) erheblich ab. Es wundert uns aber, dass $k_z = 1,284$ (siehe Tab. 2) ca. 10% kleiner ist als k_x und k_y . 3% gehen zu Lasten der oben erwähnten theoretischen Korrektion. Bleiben 7%. Es ist aber zu beachten, dass die

Bestimmung der Empfindlichkeitskurve einer Zelle im Blau recht schwierig und Fehler von 5% am Ende des Spektrums leider leicht möglich sind. Ferner ist die Glühlampenstrahlung nicht vollkommen „schwarz“; die Enden der Wolfram-Kurve können auch bei Lampen, die keine Zerstäubung aufweisen, gegenüber der Planck'schen Kurve gleicher Temperatur 1–3% zu hoch liegen. Wir haben die beiden in Frage kommenden Korrekturen nicht einzeln angebracht, sondern berücksichtigen sie in globo wiederum durch die „Eichung auf 2720° K“, indem alle an den Eich-Farbgläsern gewonnenen Messwerte mit den gemessenen $k_x \dots$ multipliziert werden. Das Beispiel ist vollständig für das Rotglas 1 RG 2 (amtl. Nr. 45a) angegeben. Die Koordinaten der Eich-Farbgläser gibt Tab. 4 („gemessene Werte“). Die mittlere Abweichung ist, wenn man von dem dunklen Blauglas (integrale Durchlässigkeit ½%) absieht, nur 0,003. Etwas überraschend ist der Umstand, dass die Messwerte für F 45a und F 8 besser sind als die auf Grund der Darstellung $d\bar{x}_\lambda$ berechneten Werte.

Messtechnisches. 1. Um den Einfluss der Orts- und Richtungsabhängigkeit der Zellen-Empfindlichkeit auszuschalten, ist das Fenster in der Verspiegelung der Zelle mit einem fein mattierten Celluloid-Streuer bedeckt.

2. Zur Messung des Photostromes dient das entsprechend umgebaute Nanoamperemeter von Siemens (Lichtmarkenelektrometer (6 V Endausschlag), mit eingebauten Hochohmwiderständen von $1 \cdot 10^9$ und $5 \cdot 10^9$ Ohm), oder das Elektrometer nach LINDEMANN-BECK mit $2 \cdot 10^9$ Ohm in Kompensationsschaltung; die in Tab. 2 als a_i angeführten Zahlen sind Einstellungen an einem 3-Dekaden-Potentiometer der General Radio.

Vergleichende Bemerkungen. 1. Ich wage nicht zu entscheiden, ob das beschriebene Kolorimeter als künstliches „Präzisionsauge“ bezeichnet werden darf. Der *praktische* Vorzug ist offensichtlich: Gegenüber Apparaten mit schmalen Eingangsspalt weist es mit seiner 4 cm² grossen Öffnung eine viel grössere Empfindlichkeit auf. Der bei Kaliumzellen im Vergleich zu Caesiumzellen sehr niedrige Dunkelstrom gestattet Verwendung hoher Widerstände bei noch gutem Nullpunkt, so dass Pigmente ohne Verwendung *grosser* Projektionslampen untersucht werden können. Hinsichtlich Präzision reicht die beschriebene Lösung nicht an das von MÄDER³⁾ auf dem geometrischen Prinzip ausgearbeitete Gerät heran.

2. Es mag zunächst scheinen, als ob die hier mitgeteilten Ergebnisse nur individuellen, *nur* in bezug auf *diese* Zelle und *diese* Filter Bedeutung und Wert hätten. Ich glaube, dass es gerade *nicht*

der Fall ist. Der unbequeme Abfall der Kaliumkurve gegen Rot hin spricht *gegen*, der gute Nullpunkt *für* die Wahl einer Kaliumzelle. Ein Vergleich von 6 uns von Philips freundlichst zur Verfügung gestellten Zellen zeigte eine grosse Gleichartigkeit der Form der Empfindlichkeitskurven. Nur im äussersten Rot schwankten die Werte, bezogen auf gleiches Empfindlichkeitsmaximum, zwischen 1 und 2. Die Hälfte der Zellen war derart, dass bei entsprechend anderer Wahl der Koeffizienten ein Ersatz der Zellen ohne Einbusse an Qualität der Anpassung möglich scheint. Hinsichtlich der Filter ist nur zu befürchten, dass die eine oder andere Schmelze von SCHOTT nicht mehr hergestellt wird. Im allgemeinen wird aber äquivalenter Ersatz geboten. Ich möchte aber nicht verhehlen, dass die hier geschilderte Anpassung nicht erreicht worden wäre, wenn nicht eine grosse Auswahl an 1 und 2 mm dicken Filtern verschiedensten Typus und in einigen Fällen bei gleichem Typ verschiedener Schmelznummer zum Probieren zur Verfügung gestanden hätte. Man darf aber behaupten:

Die Herstellung eines solchen Kolorimeters (und zugleich Photometers) ist im Prinzip jedermann möglich. Darin sehen wir den Hauptvorteil dieser Lösung.

Erneut zeigt sich, dass das von mir wiederholt⁸⁾¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾ empfohlene *Mehrfilter- oder Kombinationsfilter-Prinzip* zu den leistungsfähigsten Kunstgriffen der heterochromen Photometrie und der Kolorimetrie gehört.

Literatur.

¹⁾ Commission Internationale de l'Eclairage, Compte-rendu, Genève 1924 (Cambridge 1926), S. 67.

²⁾ Commission Internationale de l'Eclairage, Compte-rendu, Cambridge 1931 (Cambridge 1932), S. 19.

³⁾ MÄDER, Helv. Phys. Acta, im Druck.

⁴⁾ GUILD, Journ. of Scient. Instr. **11**, 69 (1934).

⁵⁾ KÖNIG, Helv. Phys. Acta **7**, 433 (1934).

⁶⁾ VOOGD, Philips Techn. Rundschau **4**, 272 (1939).

⁷⁾ DRESLER und FRÜHLING, Das Licht **8**, 238 (1938).

⁸⁾ KÖNIG, Helv. Phys. Acta **3**, 211 (1935).

⁹⁾ SCHMIDT, Ein verbessertes Farbmessverfahren, Diss. Dresden (Leipzig 1935).

¹⁰⁾ KÖNIG, Helv. Phys. Acta **10**, 165 (1937).

¹¹⁾ KÖNIG, Helv. Phys. Acta **16**, 421 (1943).

¹²⁾ KÖNIG, Helv. Phys. Acta **11**, 432 (1938).

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XVII

AUTORENREGISTER – TABLE DES AUTEURS

	Seite
VON ARX, A. und Bantle, W.: Der inverse Piezoeffekt des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4	298
AZAD, A. A.: s. Perrier und Azad	463
BANTLE, W.: s. von Arx und Bantle	298
BERICHT über die Tagung der Schweiz. Physikalischen Gesellschaft	233, 405
BLEULER, K.: Ein Problem aus der Theorie des Deuterons	405
BRADT, Helmut: Paarerzeugung durch Elektronen und Positronen-Emission der β -Strahlen	59
COESTER, Fritz: Über die Stabilität schwerer Kerne in der Mesontheorie	35
COMPTE-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique	233, 405
DINICHERT, P.: L'Hystérèse de la transformation du NH_4Cl	389
DINICHERT, P.: La constante diélectrique du NH_4Cl au point de transformation	400
GREYFUS-Graf: Liaisons quasi-optiques: Modèles d'ellipsoïdes et d'antennes spatiales, avec résultats expérimentaux	245
Du Pasquier, Pierre: Diffusion des électrons rapides par les noyaux du plomb	409
FICHTER, R.: Innere Spannungen in Aluminiumlegierungen	481
FIERZ, M.: Zur Theorie magnetisch geladener Teilchen	27
FIERZ, M.: Über die Wechselwirkung zweier Nukleonen in der Mesontheorie	181
FIERZ, M. und Wentzel, G.: Zum Deuteronproblem. I.	215
GIBERT, A., Roggen, F. und Rossel, J.: Kernreaktionen von Chlor mit Neutronen	97
GREINACHER, H.: Über reversible Kreisprozesse mit maximalem thermischem Wirkungsgrad.	133
GREINACHER, H.: Ein neuer Feuchtigkeitsmesser: das Diffusionshygrometer	437
HEINE, Hans-Gerhard: Wilsonkammer-Untersuchung der Emission leichter positiver Teilchen durch β -Strahlen.	273
HUBER, O., Lienhard, O., Scherrer, P. und Wäffler, H.: Kernphotoeffekt unter Abspaltung eines Protons $\text{Mg } 26 (\gamma p) \text{Na}^{25}$	139
HUBER, O., Lienhard, O. und Wäffler, H.: Der Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung. II. Die Elemente Titan bis Rubidium	195
HUBER, O., Lienhard, O. und Wäffler, H.: Durch Kernphotoeffekt an Cer und Neodym erhaltene neue Aktivitäten	251
JAQUEORD, A.: Etude rapide d'un galvanomètre.	235
JAQUEORD, A.: Température d'ébullition et altitude	238

JEANGUENIN, Pierre: Mesure de l'effet photoélectrique des liquides à l'aide du compteur à étincelles.	319
JOYET, Gustave: Untersuchungen über unipolar ionisierte Gasströmungen und Neue Methode zur Bestimmung der Dimension der Ionen . . .	147
KÖNIG, H.: Kolorimetrie mittels Vakuumzelle und Kombinationsfilter . .	571
LIENHARD, O.: s. Huber, Lienhard, Scherrer und Wäffler	139
LIENHARD, O.: s. Huber, Lienhard und Wäffler	195
LIENHARD, O.: s. Huber, Lienhard und Wäffler	251
LÜDI, F.: Zur Theorie der Richtstrahlung mit Parabolspiegeln	374
LÜDI, F.: Eigenfrequenzen des E-Typus eines kapazitätsbelasteten zylindrischen Hohlraumes	429
MERCIER, André: Analyse dimensionnelle et analyse géométrique ou algébrique; les caractères d'une grandeur physique	242
MIESCHER, E.: Prof. Dr. Max Wehrli. 30. Juni 1896 bis 31. August 1944	477
MÜLLER-Strobel, Josef und Patry, Jean: Die gerade Empfangsantenne. .	127
MÜLLER-Strobel, Josef und Patry, Jean: Die Rahmenantenne als Empfangsantenne	159
MÜLLER-Strobel, Josef und Patry, Jean: Berechnung von Hilfsfunktionen für gerade Empfangsantennen beliebiger Höhe	455
PATRY, Jean: s. Müller-Strobel und Patry	127
PATRY, Jean: s. Müller-Strobel und Patry	159
PATRY, Jean: s. Müller-Strobel und Patry	455
PERRIER, A.: Interprétation et liaison des effets électriques de déformation d'alimentation	553
PERRIER, A. et Azad, A. A.: Les lois expérimentales du nouvel effet mécano-thermoélectrique transversal	463
de QUERVAIN, M.: Röntgenometrische Untersuchungen an Kaliumphosphat bei tiefen Temperaturen	509
ROGGEN, F.: s. Gibert, Roggen und Rossel	97
ROSSEL, J.: s. Gibert, Roggen und Rossel	97
SCHERRER, P.: s. Huber, Lienhard, Scherrer und Wäffler.	139
SCHERRER, P.: s. Zwicker und Scherrer.	346
SPINNLER, W.: s. Wehrli und Spinnler	240
STÜCKELBERG, E. C. G.: Un modèle de l'électron ponctuel. II.	3
WÄFFLER, H.: s. Huber, Lienhard, Scherrer und Wäffler	139
WÄFFLER, H.: s. Huber, Lienhard und Wäffler	195
WÄFFLER, H.: s. Huber, Lienhard und Wäffler	251
WALDMEIER, M.: Ionosphärische Bestimmung der UV-Intensitäten der Sonnenstrahlung im Bereich 700—900 Å	168
WEHRLI, M. und Spinnler, W.: Das Bandenspektrum von Tellurdichlorid mit schwerem Chlor.	240
WEHRLI, Prof. Dr. Max: s. Miescher.	477
WENTZEL, G.: Zum Deuteronproblem. II.	257
WENTZEL, G.: Diskussionsbemerkung	402
WENTZEL, G.: s. Fierz und Wentzel	215
ZICKENDRAHT, H.: Über eine Brückenschaltung für Relaxationsschwingungen	234
ZWICKER, Benno und Scherrer, P.: Elektrooptische Eigenschaften der seignetteelektrischen Kristalle KH_2PO_4 und KD_2PO_4	346

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XVII

INHALTS-VERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES

Fasciculus I

(29. II. 1944)

E. C. G. STUECKELBERG: Un modèle de l'électron ponctuel. II	3
M. FIERZ: Zur Theorie magnetisch geladener Teilchen	27
FRITZ COESTER: Über die Stabilität schwerer Kerne in der Mesontheorie.	35
HELMUT BRADT: Paarerzeugung durch Elektronen und Positronen-Emission der β -Strahler	59

Fasciculus II

(28. III. 1944)

A. GIBERT, F. ROGGEN und J. ROSSEL: Kernreaktionen von Chlor mit Neutronen	97
JOSEF MÜLLER-STROBEL und JEAN PATRY: Die gerade Empfangsantenne	127
H. GREINACHER: Über reversible Kreisprozesse mit maximalem thermischem Wirkungsgrad.	133
O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: Kernphotoeffekt unter Abspaltung eines Protons: $Mg^{26}(\gamma, p)Na^{25}$	139
GUSTAV JOYET: Untersuchungen über unipolar ionisierte Gasströmungen und Neue Methode zur Bestimmung der Dimension der Ionen	147

Fasciculus III

(9. VI. 1944)

JOSEF MÜLLER-STROBEL und JEAN PATRY: Die Rahmenantenne als Empfangsantenne	159
M. WALDMEIER: Ionosphärische Bestimmung der UV-Intensitäten der Sonnenstrahlung im Bereich 700—900 Å	168
MARKUS FIERZ: Über die Wechselwirkung zweier Nukleonen in der Mesontheorie	181
O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER: Der Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung. II. Die Elemente Titan bis Rubidium	195
M. FIERZ und G. WENTZEL: Zum Deuteronproblem. I.	215

Fasciculus IV
(12. VII. 1944) Seite

Compte-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique	233
H. ZICKENDRAHT (Basel): Über eine Brückenschaltung für Relaxations- schwingungen	234
A. JAQUEROD (Neuchâtel): Etude rapide d'un galvanomètre	235
A. JAQUEROD (Neuchâtel): Température d'ébullition et altitude . .	238
M. WEHRLLI und W. SPINNLER (Basel): Das Bandenspektrum von Tellur- dichlorid mit schwerem Chlor	240
ANDRÉ MERCIER (Berne): Analyse dimensionnelle et analyse géomé- trique ou algébrique; les caractères d'une grandeur physique . . .	242
DREYFUS-GRAF (Genève): Liaisons quasi-optiques: Modèles d'ellipsoïdes et d'antennes spatiales, avec résultats expérimentaux.	245
O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (Zürich): Durch Kernphoto- effekt an Cer und Neodym erhaltene neue Aktivitäten	251
G. WENTZEL: Zum Deuteronproblem. II.	252
HANS-GERHARD HEINE: Wilsonkammer-Untersuchung der Emission leichter positiver Teilchen durch β -Strahler	273
A. VON ARX und W. BANTLE: Der inverse Piezoeffekt des seignette-elek- trischen Kristalls KH_2PO_4	298

Fasciculus V
(6. IX. 1944)

PIERRE JEANGUENIN: Mesure de l'effet photoélectrique des liquides à l'aide du compteur à étincelles.	319
BENNO ZWICKER und PAUL SCHERRER: Elektrooptische Eigenschaften der seignette-elektrischen Kristalle KH_2PO_4 und KD_2PO_4	346
F. LÜDI: Zur Theorie der Richtstrahlung mit Parabolspiegeln.	374
P. DINICHERT: L'Hystérèse de la transformation du NH_4Cl	389
P. DINICHERT: La constante diélectrique du NH_4Cl au point de trans- formation	400

Fasciculus VI
(2. XI. 1944)

Compte-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique	405
K. BLEULER (Zürich): Ein Problem aus der Theorie des Deuterons .	405
G. WENTZEL (Zürich): Diskussionsbemerkung	407
PIERRE DU PASQUIER: Diffusion des électrons rapides par les noyaux du plomb	409
F. LÜDI: Eigenfrequenzen des E-Typus eines kapazitätsbelasteten zylin- drischen Hohlraumes	429
H. GREINACHER: Ein neuer Feuchtigkeitsmesser: das Diffusionshygrometer	437
JOSEF MÜLLER-STROBEL und J. PATRY: Berechnung von Hilfsfunktionen für gerade Empfangsantennen beliebiger Höhe	455
ALB. PERRIER et A. A. AZAD: Les lois expérimentales du nouvel effet mécano- thermoélectrique transversal	463

Fasciculus VII

Seite

(23. XII. 1944)

E. MIESCHER: Prof. Dr. Max Wehrli. 30. Juni 1896 bis 31. August 1944 .	477
R. FICHTER: Innere Spannungen in Aluminium-Legierungen	481
MARCEL DE QUERVAIN: Röntgenometrische Untersuchungen an Kaliumphosphat bei tiefen Temperaturen	509
ALBERT PERRIER: Interprétation et liaison des effets électriques de déformation et d'aimantation :	553
H. KÖNIG: Kolorimetrie mittels Vakuumzelle und Kombinationsfilter . .	571
AUTORENREGISTER	580
INHALTSVERZEICHNIS	582

Neue Seignette-Elektrika

Von der
Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich
zur Erlangung der
Würde eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von

GEORG BUSCH

aus Zürich

Referent: Herr Prof. Dr. P. Scherrer
Korreferent: Herr Prof. Dr. F. Tank

BASEL
Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie., A. G.
1938

MEINER MUTTER !

Neue Seignette-Elektrika

von Georg Busch (E.T.H. Zürich).

I. Einleitung.

Seit der Entdeckung der merkwürdigen dielektrischen Anomalien in Seignette-Salz-Kristallen durch ANDERSON¹⁾ und CADY²⁾ und den ersten Untersuchungen von VALASEK³⁾ ist eine grosse Zahl experimenteller und teilweise theoretischer Arbeiten über die dielektrischen, piezo- und pyroelektrischen, optischen, thermischen und strukturellen Eigenschaften dieser Substanz entstanden⁴⁾ ⁵⁾. Die Erscheinungen, die durch den Begriff der Seignette-Elektrizität zusammengefasst werden, sind damit in experimenteller Hinsicht qualitativ und in den meisten Fällen auch quantitativ bekannt und gesichert.

Vom theoretischen Standpunkt aus stehen allerdings noch verschiedene Fragen offen, abgesehen davon, dass zur Erklärung der Seignette-Elektrizität prinzipiell verschiedene Wege begangen worden sind. Während JAFFÉ⁶⁾ versucht, die seignette-elektrischen Effekte durch strukturelle Umwandlungen im Gebiete der Curie-temperaturen im Sinne einer Polymorphie zu erklären, gründen die übrigen Theorien⁷⁾ ⁸⁾ auf der Hypothese permanenter Dipole, welche im Kristallgitter mehr oder weniger frei beweglich sind und sich bei hinreichend hohen Temperaturen ähnlich einer Dipolflüssigkeit verhalten. Unterhalb des oberen Curie-Punktes sind die Dipole bereichsweise spontan bis zur Sättigung polarisiert, was in Analogie zur Weiss'schen Hypothese für den ferromagnetischen Fall, für die Existenz eines inneren orientierenden Feldes spricht. Während das Auftreten des oberen Curie-Punktes in seignette-

elektrischen Substanzen durch sinngemässe Übertragung der Vorstellungen, die dem Ferromagnetismus zugrunde liegen, verständlich wird, sind zur Erklärung des unteren Curie-Punktes weitere Annahmen nötig. Offenbar sind bei sehr tiefen Temperaturen alle Dipole im Kristallgitter festgeklemt und liefern daher zur gesamten Polarisierung keinen Beitrag durch Orientierung. Dafür sprechen durchaus die kleinen Werte der Dielektrizitätskonstanten, die man beim Seignettesalz unterhalb des unteren Curie-Punktes festgestellt hat. Mit steigender Temperatur nimmt die Zahl der frei beweglichen Dipole stark zu und erreicht bei hohen Temperaturen einen konstanten Wert. Dieser Vorgang muss sich zwingendermassen in der Temperatur-Abhängigkeit der spontanen Polarisierung bemerkbar machen. Leider bestehen hierüber noch keine zuverlässigen Beobachtungen.

Formal lassen sich die seignette-elektrischen Erscheinungen durch die geeignet modifizierten Theorien der Para-Elektrizität und des Para- und Ferro-Magnetismus erfassen, wobei in qualitativer Hinsicht überraschend gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung besteht. Es lassen sich jedoch gewisse Spekulationen über Fragen von grundlegender Bedeutung nicht umgehen. So ist es z. B. noch keineswegs zweifelsfrei entschieden, welcher Art die Dipole des Seignette-Salzes sind, die die abnorm hohe Polarisierbarkeit dieser Kristalle zur Folge haben, obschon verschiedene Argumente dafür sprechen, dass die Kristallwasser-Moleküle die Träger der Dipole sind. Eine Entscheidung auf Grund der für sie berechneten Dipol-Momente ist schwer möglich, da die Voraussetzungen, auf welche sich diese Berechnungen stützen, unsicher sind. Diese enthalten u. a. auch Annahmen über die Beweglichkeit der Dipole, d. h. über die Zahl der Einstellungsmöglichkeiten in einem elektrischen Feld und über die Art der Behinderung durch Gitterkräfte, welche nicht als genügend sichergestellt angesehen werden können. In quantitativer Hinsicht darf daher zum vornherein nicht allzuviel erwartet werden.

Für die Befestigung und Verfeinerung der heutigen Vorstellungen über das Wesen der Seignette-Elektrizität wäre die Ausfüllung verschiedener Lücken im experimentellen Material ausserordentlich wünschenswert. So ist z. B. die Dispersion der Dielektrizitätskonstanten bei Zentimeter-Wellen noch völlig ungeklärt. Vollständig unerforscht ist das Verhalten namentlich im langwelligen Ultrarot. Dies ist für eine genaue Diskussion der dielektrischen Phänomene sehr von Nachteil, da man bei der Berücksichtigung des Ultrarot-Anteiles auf blossе Schätzungen angewiesen ist. Vor allem wäre die Untersuchung der von STAUB⁹⁾ berechneten

starken Verschiebung der Reststrahl-Wellenlängen beim Überschreiten der Curie-Punkte von grundlegender Bedeutung. Auch der Verlauf der spezifischen Wärme des Seignette-Salzes am unteren Curie-Punkt ist noch unbekannt.

Ein weiterer Umstand hat bei der Bearbeitung der Probleme der Seignette-Elektrizität aus verschiedenen Gründen stets erschwerend gewirkt. Seignettesalz war bisher der einzige Körper, der die nach ihm benannten auffälligen elektrischen Anomalien zeigt. Es wurde daher der Versuch unternommen, auf Grund der bestehenden Vorstellungen *neue*, womöglich strukturell einfachere Kristalle zu finden, welchen ebenfalls die charakteristischen Merkmale der Seignette-Elektrizität aufweisen. In einer früheren Mitteilung¹⁰⁾ wurde über die Entdeckung der gesuchten Effekte an Kristallen des primären Kaliumphosphates (KH_2PO_4) und somit der ersten *anorganischen* Substanz berichtet. Es handelte sich dabei nur um eine vorläufige Messung an unvollkommenem Untersuchungsmaterial, so dass sie durch die vorliegenden Untersuchungen als überholt zu betrachten ist. Diese erstrecken sich ausser auf das primäre Kaliumphosphat auch auf die entsprechenden isomorphen Ammonium- und Arsensalze KH_2AsO_4 , $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ und $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$.

Tabelle 1.

Zusammenstellung der bisher untersuchten physikalischen Eigenschaften.

Eigenschaft	KH_2PO_4	KH_2AsO_4	$\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$	$\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$	Lit.
Molekulargewicht	136,14	180,05	158,98	115,07	
Dichte	2,338	2,867 2,851	2,311	1,803 1,779	
Zahl der Mol./cm ³	$10,3 \times 10^{21}$	$9,56 \times 10^{21}$	$8,73 \times 10^{21}$	$9,41 \times 10^{21}$	
Schmelzpunkt	96°	288°	zerfällt	—	
Symmetrie	tetrag.	tetrag.	tetrag.	tetrag.	
Raumgruppe	V_d^{12}		V_u^{12}		
Achsenverhältnis c/a	0,938	—	1,002	—	
a	7,43		7,51	—	
Gitterkonstanten	$\times 10^{-8}$	—	$\times 10^{-8}$		
c	6,97		7,53	—	
Brechungsindices n_a	1,5095	1,5674	1,5246	1,5766	
n_c	1,4684	1,5179	1,4792	1,5217	
Piezoelektrizität	—	—	pos.	—	12)
DK (Mischwerte)	31	> 31	—	—	13)
	17,93	22,66			14)

Über die bisher untersuchten und bekannten Eigenschaften der vier isomorphen Körper geben Tabelle 1 und Fig. 1 Auskunft.

Sämtliche Salze bilden prismatische tetragonal-skalenoedrische Kristalle, deren Symmetrieverhältnisse aus Fig. 1 hervorgehen. Entsprechend ihrer Symmetrie sind sie piezoelektrisch erregbar. Im Schema der piezoelektrischen Moduln sind nach VOIGT¹¹⁾ nur d_{14} und $d_{25} = d_{36}$ von Null verschieden, d. h. die Kristalle können nur durch Schubkräfte erregt werden, wie es übrigens auch bei Seignettesalz der Fall ist. Über die Grösse der Moduln ist bis jetzt nichts bekannt; es ist lediglich an $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ von GIEBE und SCHEIBE¹²⁾ qualitativ die Existenz der Piezoelektrizität nachgewiesen worden.

Die Dielektrizitätskonstanten sind von STEULMANN¹³⁾ und von KELLER und LEHMANN¹⁴⁾ für KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 mittels der Immersionsmethode zu 31 bzw. 17,93 und > 31 bzw. 22,66 be-

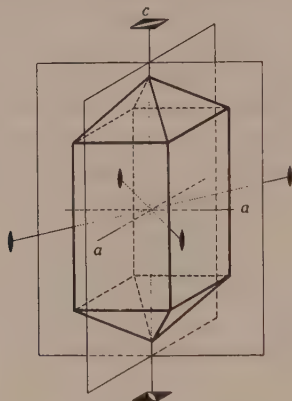


Fig. 1.

Raumgruppe V_d^{12} Symmetrie der Kristalle KH_2PO_4 , KH_2AsO_4 , $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$, $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$.

stimmt worden. Da es sich dabei um Werte handelt, die durch Mittelung über alle Richtungen in den Kristallen entstehen, mussten die verhältnismässig hohen Werte auffallen. STEULMANN weist auch auf die Möglichkeit der Existenz von Dipolen in diesen Kristallen hin, ohne aber daraus weitere Konsequenzen zu ziehen. Über die Ammoniumsalze fehlen Messungen der DK ganz.

Röntgenographisch sind nur die Phosphorsalze von HASSEL¹⁵⁾, HENDRICKS¹⁶⁾ und WEST¹⁷⁾ untersucht worden.

II. Beschaffung des Materials.

Die Kristalle sämtlicher Salze wurden aus wässrigen Lösungen gezüchtet. Das Ausgangsmaterial wurde z. T. fertig bezogen, z. T. selbst hergestellt, und zwar die Kalisalze aus Kaliumhydroxyd

und Phosphor- bzw. Arsensäure, die Ammoniumsalze aus Ammoniumcarbonat und den entsprechenden Säuren. Aus diesen Salzen wurden zwischen 30° und 40° C gesättigte Lösungen hergestellt und durch wiederholtes Filtrieren durch Nutschen aus gesintertem Glas mechanisch gereinigt. Darauf wurden die Lösungen bis zur Ausbildung eines Bodenkörpers in einem Thermostaten bei konstanter Temperatur stehen gelassen und dann bei derselben Temperatur in die Kristallisationsgefässe geschüttet. In diese wurde sodann ein an einem Haar befestigter Keim eingehängt. Die Kristallisation erfolgte bei allmählich sinkender Temperatur. Der Temperaturabfall konnte zwischen $\frac{1}{10}^{\circ}$ bis 3° pro Tag praktisch kontinuierlich verändert werden und wurde am Anfang des Kristallisationsprozesses auf den minimalen Wert eingestellt. Mit zunehmender Grösse des Kristalles war eine schnellere Temperaturverminderung zulässig; immerhin dauerte das Wachstum eines einige cm^3 grossen Kristalles etwa ein bis zwei Monate.

Der Kristall-Habitus kann in weiten Grenzen variiert werden. Aus einer Lösung der nach stöchiometrischen Verhältnissen zusammengesetzten Salze entstehen unterhalb etwa 90° nadelartige Kristalle, die für unsere Zwecke sehr ungeeignet sind. Aus siedender Lösung ergeben sich jedoch gedrungene Prismen. Eine Ausnahme macht $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$, das schon bei Zimmertemperatur kurzprismatische Kristalle liefert. Setzt man dagegen einen Überschuss an Lauge zu, so kristallisieren alle Salze in kurzen Prismen auch bei Zimmertemperatur, hingegen bei hohen Temperaturen in Nadeln. Je geringer der Laugenüberschuss ist, desto langgestrecktere Prismen entstehen.

Die früheren Untersuchungen an Seignettesalz sowie an Kaliumphosphat haben gezeigt, dass die Messergebnisse unter Umständen sehr stark durch die Beschaffenheit der Kristalle beeinflusst werden. Für die vorliegenden Messungen sind daher nur solche Kristallstücke verwendet worden, die in der Durchsicht vollständig klar erschienen und ohne fehlerhafte Stellen waren.

Als Elektroden wurden ausschliesslich im Vakuum aufgedampfte Goldbelege verwendet, da diese die zuverlässigsten Resultate zeigen.

Die zur Messung verwendeten Kristalle hatten eine Dicke von 0,1 bis 0,2 cm und eine Fläche von 0,2 bis $1,2 \text{ cm}^2$, welche von den Elektroden stets vollständig bedeckt waren, um Randwirkungen auszuschliessen.

III. Die Messapparatur.

1. Da die seignette-elektrischen Eigenschaften der neuen Substanzen erst bei Temperaturen auftreten, die nur mit flüssiger Luft zu erreichen sind, war die Konstruktion eines geeigneten Thermostaten notwendig. Dieser arbeitet nach dem Prinzip der gebräuchlichen Einrichtungen für Temperaturen über Zimmertemperatur, d. h. mit automatisch geregelter Heizung; die Aussentemperatur ist hingegen die der flüssigen Luft.

Fig. 2 zeigt die Konstruktion des Apparates. Der Kristallträger T befindet sich in einem vollständig aus Kupfer gearbeiteten Gefäß B mit verschraubbarem Deckel. Der Mantel trägt die zur Temperaturregulierung dienende Heizwicklung W , deren Enden durch das Neusilberrohr N zu zwei Klemmen ausgeführt sind.

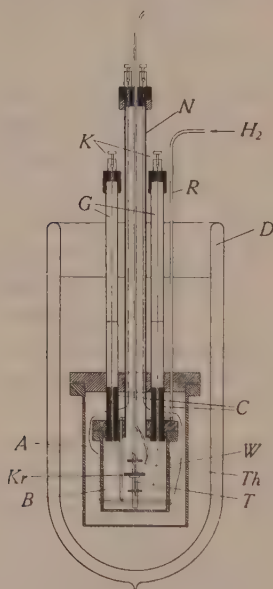


Fig. 2.

Thermostat für tiefe Temperaturen.

Das Rohr N ist in den Deckel des Gefäßes B eingelötet und dient als Aufhängung für den ganzen Apparat. Den Abschluss gegen die flüssige Luft im Dewargefäß D bildet das ähnlich wie B konstruierte Kupfergefäß A . Die Zuleitungen zu den Messelektroden laufen von den Klemmen K durch zwei Glasröhren G und zwei Cibanit-Isolatoren C . Am unteren Ende sind die Glasröhren in Kupferhülsen eingeschmolzen, welche in den Deckel des äusseren Gefäßes

eingelötet sind. Durch das dünne Kupferrohr R wird während der Messung dauernd getrockneter Wasserstoff in langsamem Strom geleitet, damit ein guter Temperatenausgleich zwischen Gefäßwand und Kristall gewährleistet ist.

Zur Temperaturmessung dient ein Kupfer-Konstantan Thermoelement, dessen eine Lötstelle sich in unmittelbarer Nähe des Kristalles befindet, während die zweite in schmelzendes Eis taucht. Das Thermoelement wurde durch Vergleich mit Pentan- und Dampfdruckthermometern geeicht. Die Thermospannung wird mit einem Kompensationsapparat ermittelt, womit die Temperatur auf $0,1^{\circ}$ genau angegeben werden kann.

Dieselbe Vorrichtung dient gleichzeitig zur Regelung der Temperatur auf einen konstanten Wert. Als Nullinstrument dient ein Spiegelgalvanometer, dessen Lichtzeiger auf eine Photozelle fällt, welche in der bekannten Toulon-Schaltung angeordnet ein Relais steuert, welches den Heizstrom ein- und ausschaltet. Als Thyatron wird eine gasgefüllte Philips-Triode 4686 verwendet. Dieser Thermostat gestattet die Innehaltung jeder beliebigen Temperatur zwischen dem Siedepunkt der flüssigen Luft und Zimmertemperatur mit einer Genauigkeit von etwa $0,2^{\circ}$ entweder automatisch oder durch fortwährende feine Regulierung des Heizstromes.

2. Die Polarisierung bei kleinen Feldstärken, d. h. bis 50 Volt/cm wurde mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers gemessen. Innerhalb des interessanten Temperaturgebietes ist die Leitfähigkeit der Kristalle so gering, dass die Umschaltung von Ladung auf Entladung ohne weiteres von Hand vorgenommen werden kann. Bei diesen Feldstärken machen sich auch keine Anomalien in Form von Rückstandsbildungen bemerkbar.

Für hohe Feldstärken, bis 3000 Volt/cm, welche bereits eine Sättigung der Polarisierung bewirken, wurde ebenfalls ein ballistisches Galvanometer verwendet, jedoch in einer von VALASEK³⁾ angegebenen Anordnung. Diese gestattet, die Spannung in Stufen von 30 Volt von 0 bis + 300 Volt, zurück bis 0, - 300 und wieder auf 0 zu verändern.

3. Um Störungen der Messungen durch allfällige Raumladungen in den Kristallen auszuschliessen, wurde eine Kapazitätsmessbrücke für Tonfrequenzen konstruiert, die nach dem Prinzip von SCHERING arbeitet und durch Fig. 3 in Verbindung mit den zugehörigen Instrumenten dargestellt ist.

Zwei Zweige sind verlustarme Drehkondensatoren C_1 und C_2 von 500 pF Maximalkapazität, wovon C_1 auf 0,5 pF genau geeicht

ist. Die beiden anderen Zweige sind bis 15 Watt belastbare Karbowid-Widerstände R_3 und R_4 von je 10000 Ohm. Parallel zu R_3 liegt ein veränderlicher Kondensator C_3 von 1000 pF Maximalkapazität für den Phasenabgleich.

Zur Bestimmung der DK des Kristalles wird die Kapazität C_x der aus ihm geschnittenen Platte ermittelt und durch die nach der Formel $C_0 = F/4\pi d$ berechnete Kapazität des durch die Elektroden des Kristalles allein gebildeten Kondensators dividiert. C_x ergibt sich als Differenz ΔC zweier Werte C_1' und C_1'' des Messkondensators C_1 , für welche die Brücke ohne bzw. mit zugeschalteter Versuchskapazität C_x im Gleichgewicht ist.

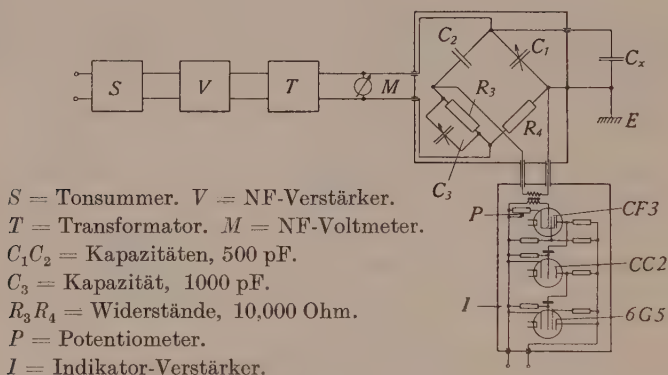


Fig. 3.

Kapazitäts-Messbrücke mit Zubehör.

Innerhalb des seignette-elektrischen Gebietes erreichen die Kristallkondensatoren Kapazitätswerte bis 10000 pF und darüber. Um diese Beträge trotzdem mit derselben Anordnung messen zu können, wurde zu C_x eine genau gemessene Kapazität $C_s = 390,0$ pF in Serie geschaltet und mit der Brücke die Kapazität der beiden in Serie geschalteten Kondensatoren gemessen. C_x wird dann aus der Formel $C_x = C_s \Delta C / (C_s - \Delta C)$ berechnet. Dabei sinkt allerdings die Messgenauigkeit, denn der relative Fehler δC_x , mit welchem C_x maximal behaftet ist, berechnet sich zu

$$\delta C_x / C_x = (C_s + \Delta C) / (C_s - \Delta C) \cdot \delta \Delta C / \Delta C,$$

wobei ΔC mit einer relativen Genauigkeit von etwa 1% angegeben werden kann. Mit $C_x \sim 10000$ pF ergibt sich $\Delta C_{x\max} \sim 380$ pF und damit ein grösster relativer Fehler von

$$(\delta C_x / C_x)_{\max} \sim 8\%.$$

Als Wechselstromquelle dient ein Überlagerungstonsumierer für Frequenzen von 50—10000 Hertz mit angeschlossenem Niederfrequenzverstärker von 20 Watt Ausgangsleistung. Die Frequenzskala wurde vor der Messung durch Vergleich mit Stimmgabeln geeicht. Der Anschluss an die Brücke erfolgt über einen Transformator mit einem Übersetzungsverhältnis 1:20, auf dessen Sekundärseite die an die Brücke gelegte Spannung mit einem Tonfrequenz-Voltmeter gemessen wird. Diese Spannung ist der an der Versuchskapazität liegenden praktisch gleich, wenn diese unmittelbar parallel zu C_1 geschaltet wird, da das Verhältnis der Effektivwiderstände der Kapazitäts- zu den Widerstandszweigen sehr hoch ist. Wird jedoch die Zuschaltung der Seriekapazität C_s nötig, dann muss die Spannung an den Klemmen von C_x gemessen werden. Dies geschieht mittels eines Röhrenvoltmeters, wie es schon in einer früheren Arbeit¹⁸⁾ beschrieben wurde.

Zur Feststellung des Brückengleichgewichtes dient ein Verstärker, dessen Schaltprinzip ebenfalls aus Fig. 3 hervorgeht. Am Eingang befindet sich ein Niederfrequenz-Transformator 1:6, der die Steuerspannung für das Gitter der ersten Röhre liefert. Dies ist eine Exponential-Schirmgitterröhre, deren Verstärkungsfaktor bekanntlich sehr bequem durch Variation der Gittervorspannung geregelt werden kann. Die zweite Röhre ist eine normale Triode in Widerstandskoppelung. Die letzte Stufe ist eine der gebräuchlichen kleinen Kathodenstrahlröhren (magic tube), welche Spannungsfreiheit des Gitters sehr scharf festzustellen gestattet. Eine am Eingang des Verstärkers angelegte Wechselspannung von $1/1000$ Volt wird bei voller Verstärkung noch deutlich wahrgenommen.

Die ganze Anordnung gestattet Kapazitäten bis 450 pF mit einer absoluten Genauigkeit von etwa 0,5 pF zu messen. Die kleinste verwendbare Spannung ist 1 Volt, die grösste 2000 Volt; die Frequenz kann von 100—10000 Hertz variiert werden. Bei einer mittleren Betriebsspannung von 100 Volt und einer Frequenz von 500 Hertz können Kapazitätsunterschiede von 0,1 pF noch deutlich festgestellt werden. Mit wachsender Frequenz und Spannung nimmt die Empfindlichkeit naturgemäss zu und umgekehrt.

4. Die innerhalb des seignette-elektrischen Gebietes auftretende elektrische Hysteresis wird in einer von SAWYER und TOWER¹⁹⁾ angegebenen und in Fig. 4 dargestellten Weise beobachtet. Die bei S angelegte 50-periodige Wechselspannung wird über das Potentiometer R_1 dem Transformator Tr zugeführt, welcher Spannungen bis 2000 Volt liefert. Die gesamte Spannung wird an die in Serie geschalteten Kapazitäten C_k und C gelegt. C_k ist der durch die Kristallplatte gebildete Kondensator und C

ist eine genau gemessene Kapazität zwischen 0,02 und 0,1 mF. C wird stets viel grösser als C_k gewählt, was zur Folge hat, dass in jedem Moment praktisch die ganze Spannung am Kristall liegt. Diese wird mit einem statischen Voltmeter gemessen. An die x -Platten der Braun'schen Röhre wird mittels der Widerstände $R_2 = 500\,000$ Ohm und $R_3 = 80\,000$ Ohm ein Teil der an C_k liegenden Spannung gelegt, während die y -Platten mit den Belegen des Kondensators C verbunden sind. Die Braun'sche Röhre zeichnet daher horizontal die Spannung am Kristall und vertikal ein Mass für seine Ladung. Die Kurven werden photographiert und auf der Platte ausgemessen.

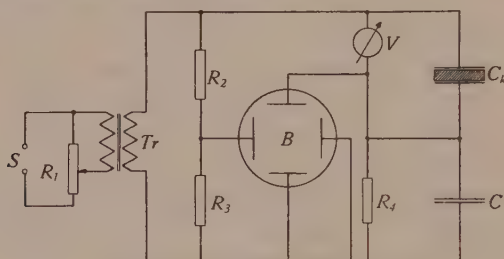


Fig. 4.

Schaltung zur Aufnahme von Hysteresis-Kurven. 50 Perioden.

IV. Die Ergebnisse.

A. Die Kali-Salze (KH_2PO_4 und KH_2AsO_4).

1) Zur Untersuchung der beiden Hauptdielektrizitätskonstanten ϵ_a und ϵ_c wurde die Kapazität von Kristallplatten gemessen, welche senkrecht zu den kristallographischen Achsen a bzw. c geschnitten waren. Fig. 5 zeigt den Verlauf der Dielektrizitätskonstanten ϵ_c als Funktion der absoluten Temperatur in logarithmischem Masstab. Die Messung geschah mit Wechselspannung von 800 Perioden und einer Feldstärke von 200 Volt/cm bei fallender und bei steigender Temperatur. Für jeden Messpunkt wurde die Temperatur während ca. 15 Minuten konstant gehalten bzw. so lange, bis keine Änderung der Versuchskapazität mehr festzustellen war. Dies ist wegen der ausserordentlich starken Temperaturabhängigkeit der DK ein sehr scharfes Kriterium für Temperaturkonstanz. Beim Eispunkt, $T = 273^\circ$ ist für KH_2PO_4 $\epsilon_c = 29,0$ und steigt mit fallender Temperatur ungefähr hyperbolisch bis zum Maximalwert $\epsilon_c = 47\,500$ bei $T = 114^\circ$. Bis zu dieser Temperatur ist die DK unabhängig von Frequenz und Feldstärke. Bei weiterer Abkühlung sinkt ϵ_c wieder, ist nun aber stark

abhängig von der Feldstärke und der Frequenz, wenn mit der Kapazitätsmessbrücke gemessen wird. Unterhalb der kritischen Temperatur erweist es sich ausserdem unmöglich, die Brücke völlig ins Gleichgewicht zu bringen, da sich hier, wie später gezeigt wird,

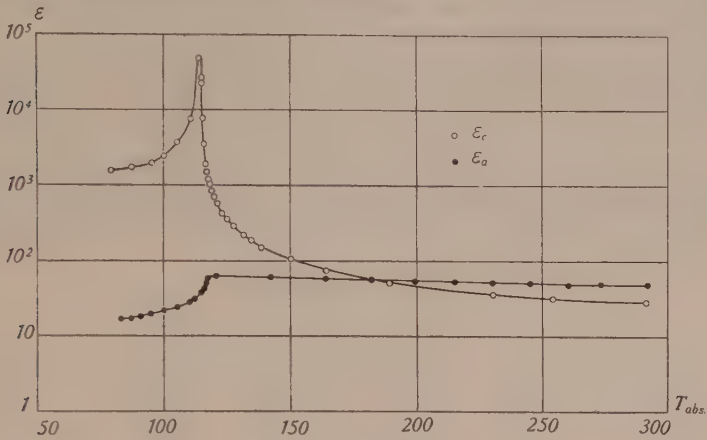


Fig. 5.

DK von KH_2PO_4 . $E = 200 \text{ Voltcm}^{-1}$. $n = 800 \text{ sec}^{-1}$.

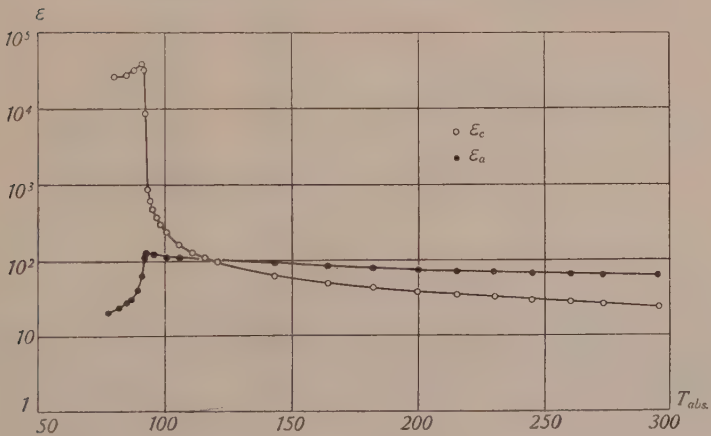


Fig. 6.

DK von KH_2AsO_4 . $E = 200 \text{ Voltcm}^{-1}$. $n = 800 \text{ sec}^{-1}$.

Hysteresis dadurch bemerkbar macht, dass Oberschwingungen der zur Messung angelegten Wechselspannung auftreten. Zur Diskussion der Verhältnisse innerhalb des seignette-elektrischen Gebietes werden daher die Messungen mit der Brücke nicht verwendet.

Die entsprechenden und unter denselben Bedingungen vorgenommenen Messungen an KH_2AsO_4 lieferten das in Fig. 6 dargestellte Ergebnis. Bei $T = 273^\circ$ ist $\epsilon_c = 22,2$ und der bei $T = 92^\circ$ angenommene Maximalwert beträgt 35600. Unterhalb dieser Temperatur schliesst das seignette-elektrische Gebiet an, mit etwas fallender DK .

Trägt man, wie dies in Fig. 7 geschehen ist, die reziproke Suszeptibilität

$$\frac{1}{\chi_c} = \frac{4\pi}{\epsilon_c - 1}$$

als Funktion der Temperatur auf, so ergeben sich für beide Salze Kurven, die durch Extrapolation auf den Wert $1/\chi = 0$ mit der T -Achse zum Schnitt gebracht werden können. Dies entspricht dem Curie-Weiss'schen Gesetz in der Form

$$\frac{1}{\chi} = c(T - \Theta).$$

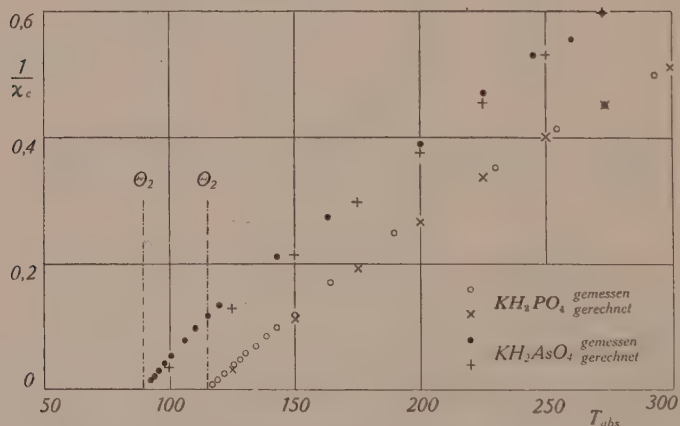


Fig. 7.

Temperatur-Verlauf der reziproken Suszeptibilität.

Die *Curie-Punkte* liegen demnach für KH_2PO_4 bei $\Theta = 115^\circ$ und für KH_2AsO_4 bei $\Theta = 91^\circ$ abs. Temperatur. Nun zeigt sich aber, dass die eingezeichneten Punkte innerhalb des grossen Temperaturbereiches von den Curie-Punkten bis zur Zimmertemperatur nicht, wie zu erwarten wäre, auf einer Geraden liegen. Die Neigung der durch sie bestimmten Kurven wird mit wachsender Temperatur stetig geringer. Das Curie-Weiss'sche Gesetz gibt daher den wirklichen Verlauf der Suszeptibilität nicht richtig wieder. Im nächsten Abschnitt soll jedoch gezeigt werden, dass sich der gemessene Verlauf richtig interpretieren lässt, wenn die Langevin-Weiss'sche Theorie in sinngemässer Weise vervollständigt wird.

Bemerkenswert ist bei beiden Substanzen der Verlauf der Dielektrizitätskonstanten ϵ_a , d. h. in einer zur seignette-elektrischen Achse senkrecht stehenden Richtung. Die Fig. 8 gibt hiervon eine Darstellung. Für KH_2PO_4 ist ϵ_a bei Zimmertemperatur 47,8, steigt bis 120° auf 62 und fällt dann steil ab auf Werte unter 20. Die Werte für KH_2AsO_4 beginnen bei Zimmertemperatur mit 62,2, steigen auf 119 bei $95,5^\circ$ und endigen ebenfalls unter 20. Zum Vergleich sind diese Kurven auch in den Fig. 5 und 6 logarithmisch eingetragen. Im Gegensatz zu der c -Achse ist die DK in der a -Richtung unabhängig von Frequenz und Feldstärke. In beiden Fällen erfolgt der Abfall der DK bei der Abkühlung im Gebiete der Curie-Punkte.

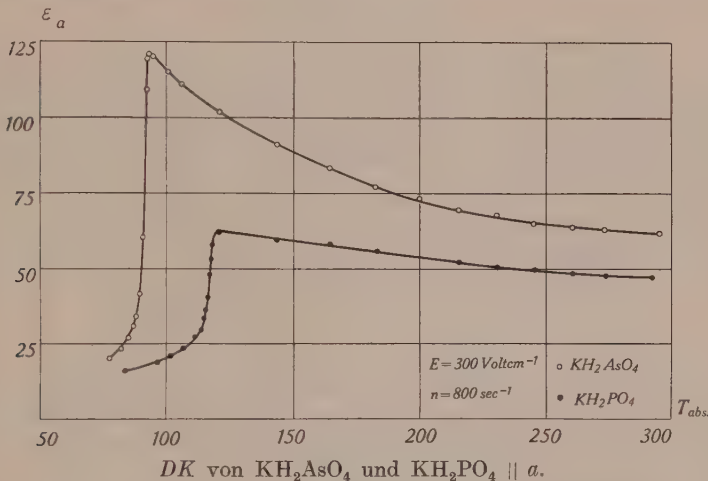


Fig. 8.

Obschon in der a -Richtung keine spontane Polarisation und damit keine Seignette-Elektrizität auftritt, sprechen die relativ hohen Werte der DK und vor allem ihre starke Temperaturabhängigkeit für *Dipol*-Polarisation auch in dieser Richtung. Der Temperaturgang von ϵ_a kann folgendermassen interpretiert werden. Bei tiefen Temperaturen sind die Dipole unbeweglich und man beobachtet im wesentlichen nur die Polarisation des Untergrundes. Mit steigender Temperatur steigt die Dipolzahl und damit die Polarisierbarkeit des Kristalles an. Die DK steigt nach Massgabe der wachsenden Dipolzahl erst langsam und dann immer schneller an, bis zum Moment, wo praktisch alle Dipole frei sind. Von hier an macht sich nun die zwar stets vorhandene depolarisierende Wirkung der Temperaturbewegung dadurch bemerkbar, dass ϵ_a wieder sinkt. Diese Auffassung wird dadurch bestätigt, dass die

Molekular-Polarisation $P = (\epsilon_a - 1)/(\epsilon_a + 2) M/d$ bei hinreichend hohen Temperaturen eine lineare Funktion von $1/T$ ist, wie dies aus Fig. 9 ersichtlich ist. Hier verhält sich die a -Achse also *parallel* elektrisch in engerem Sinne. Die Abweichung von der Geraden bei tiefen Temperaturen rührt von der abnehmenden Dipolzahl her und der Verlauf der Kurve in diesem Gebiet deutet den Verlauf der Funktion $n_D(T)$ an, allerdings erst, nachdem die Polarisation des Untergrundes abgerechnet worden ist. Hierüber wie auch über die in der a -Richtung wirksamen Dipolmomente liegen aber gerade in der a -Richtung keine genügend genauen Kenntnisse vor. Auch eine Abschätzung ist nicht möglich, so dass vorderhand keine

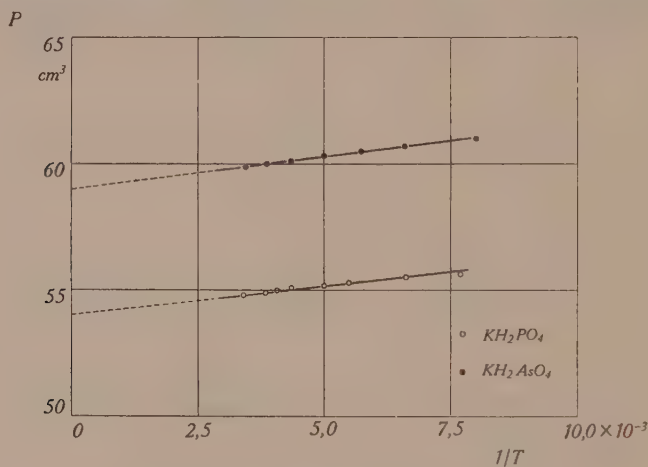


Fig. 9.

Molekularpolarisation als Funktion von $1/T$. a -Achse.

quantitativen Schlussfolgerungen gezogen werden können. Es ist vor allem sehr merkwürdig, dass ϵ_a auch noch bei Zimmertemperatur so hohe Werte (50—60) besitzt und dass auch für sehr hohe Temperaturen ähnliche Beträge zu erwarten sind. Extrapoliert man in Fig. 9 die Molekular-Polarisation bis $1/T = 0$, d. h. $T \rightarrow \infty$, so ergeben sich Dielektrizitätskonstanten ohne Dipol-Anteil von 40 für KH_2PO_4 und 47 für KH_2AsO_4 . Verglichen mit den Dielektrizitätskonstanten, die in dieser Richtung bei sehr tiefen Temperaturen, d. h. unterhalb der Curie-Punkte, gemessen werden, sind diese Werte unverständlich hoch. Es sei denn, dass die Reststrahlwellenlänge am oberen Curie-Punkt eine so starke Änderung erfährt, dass die Zunahme der Polarisierbarkeit des Untergrundes darauf zurückgeführt werden könnte. STAUB⁹⁾ hat aus Intensitätsänderungen der Röntgenreflexionen in der Tat eine

solche Zunahme der Reststrahlwellenlänge von etwa 40% beim Seignette-Salz vorausgesagt, wenn die Curie-Punkte überschritten werden. Für die neuen Salze fehlen jedoch die entsprechenden Unterlagen.

2. Bekanntlich liefert die Anwendung der Langevin'schen Theorie einen Ausdruck für die Polarisation P pro cm^3 , die in einem Dipol-Gas durch ein äusseres elektrisches Feld E bei der Temperatur T erzeugt wird. Bezeichnet man in üblicher Weise mit P_∞ die maximal mögliche Polarisation, d. h. bei vollständiger Parallelstellung aller Dipole, mit n die Zahl der Dipole pro cm^3 , mit α ihre Polarisierbarkeit und mit F die am Ort der Dipole wirksame innere Feldstärke $F = E + \gamma P$, so ist

$$P = n\alpha F + P_\infty L(a), \quad (1)$$

wo $L(a)$ die Langevin'sche Funktion $\text{Cotgh } a - 1/a$ mit dem Argument $a = \mu F/kT$ bedeutet. Die para-elektrischen Phänomene werden fast vollständig schon durch die erste Annäherung der Langevin'schen Theorie erfasst, indem in diesen Fällen $\mu F \ll kT$ ist und die Langevin'sche Funktion durch das erste Glied der Entwicklung $\mu F/3kT$ ersetzt werden darf. Dies führt für isotrope Körper mit $\gamma = 4\pi/3$ zu der bekannten Clausius-Mosottischen Gleichung

$$(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = 4\pi/3 \cdot n(\alpha + \mu^2/3kT).$$

Eine Diskussion der seignette-elektrischen Erscheinungen auf Grund dieser Formel ist jedoch aus denselben Gründen wie im ferromagnetischen Fall unzulässig, da auch hier infolge der ausserordentlich hohen Polarisation die Voraussetzung $\mu F \ll kT$ nicht mehr zutrifft. Für den Ferromagnetismus hat man daher die Langevin'sche Theorie ausführlich zu diskutieren. Dies geschieht in diesem Falle aber unter Weglassung des diamagnetischen Anteiles, d. h. ohne das dem Ausdruck $n\alpha F$ in Formel (1) entsprechende Glied. Für die Theorie der Seignette-Elektrizität muss hingegen der vollständige Ansatz (1) verwendet werden.

Die Polarisation des Kristalles ohne Dipole setzt sich aus Beiträgen zusammen, welche als Atom- und Gitterpolarisation bezeichnet werden. Letztere beruht hauptsächlich auf den ultraroten Gitterschwingungen und eventuell auf Piezoelektrizität. Die gesamte Polarisation ohne Dipol-Anteil soll als *Untergrundpolarisation* und die ihr entsprechende Polarisierbarkeit pro cm^3 soll mit A bezeichnet werden.

Massgebend für die Polarisation ist die innere Feldstärke F . Bei der Festsetzung des Lorentz-Faktors γ besteht jedoch eine Unsicherheit. Abgesehen davon, dass für nicht reguläre Kristalle

γ von $4\pi/3$ abweichen wird, ist mit der Möglichkeit zu rechnen, dass die den Untergrund polarisierende Feldstärke F_U durch ein anderes γ mit der Gesamtpolarisation P verknüpft ist, als die auf die Dipole wirkende innere Feldstärke F_D . Es sollen daher zwei Lorentz-Faktoren γ_U und γ_D eingeführt werden, so dass

$$\begin{aligned} F_U &= E + \gamma_U \cdot P \\ F_D &= E + \gamma_D \cdot P. \end{aligned}$$

Mit dieser Bezeichnung wird die Polarisation P pro cm^3 durch die Gleichung dargestellt:

$$P = A \cdot F_U + P_\infty \cdot L(a) \quad (2a)$$

wo

$$a = \frac{\mu F_D}{k T} \quad (2b)$$

bedeutet. Nun ist noch der Tatsache Rechnung zu tragen, dass P_∞ nicht wie im ferromagnetischen Fall konstant ist, sondern eine Funktion der Temperatur sein wird:

$$P_\infty = n_D(T) \cdot \mu,$$

da die Zahl der Dipole pro cm^3 n_D eine Funktion der Temperatur ist. Damit ergibt sich für P die Parameterdarstellung

$$P = \frac{n_D(T) \mu \cdot L(a)}{1 - \gamma_U A} + \frac{A}{1 - \gamma_U A} \cdot E \quad (3a)$$

$$P = a \frac{k T}{\gamma_D \mu} - \frac{E}{\gamma_D} \quad (3b)$$

Um die zur Temperatur T und zur äusseren Feldstärke E gehörige Polarisation P zu finden, hat man also die Kurve dargestellt durch (3a) mit der durch (3b) gegebenen Geraden zu schneiden. Die Ordinate des Schnittpunktes liefert die Polarisation P . Die weiteren Überlegungen sind nun ganz analog den üblichen Darstellungen, wie z. B. bei BECKER²⁰). Bei verschwindendem äusseren Feld, $E = 0$, sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Gerade (3b) die Kurve (3a) ausser im Nullpunkt noch in einem weiteren Punkte schneidet oder nicht. Der erste Fall liefert eine spontane elektrische Polarisation, der zweite Fall liefert die Paraelektrizität. Während bei ferromagnetischen Körpern Paraelektrizität nur bei hohen Temperaturen, oberhalb des Curie-Punktes auftritt, sind im seignette-elektrischen Fall zwei paraelektrische Gebiete möglich, das eine bei hohen, das andere bei

tiefen Temperaturen. Anhand der Fig. 10 sollen die Verhältnisse etwas näher erläutert werden. Diese veranschaulicht das Gleichungspaar (3a, b) für den Fall $E = 0$, d. h.

$$P = \frac{n_D(T) \mu L(a)}{1 - \gamma_U A} \quad (4a)$$

$$P = a \frac{k T}{\gamma_D \mu} \quad (4b)$$

Die Kurven L , dargestellt durch (4a) streben für grosses a asymptotisch einem Grenzwert

$$P_{\max} = \frac{n_D(T) \mu}{1 - \gamma_U A}$$

zu, der durch die Zahl $n_D(T)$ der bei dieser Temperatur freien Dipole bestimmt ist. L_1 sei eine zu einer tiefen Temperatur T_1 gehörige Kurve und G_1 die für dieselbe Temperatur eingezeichnete

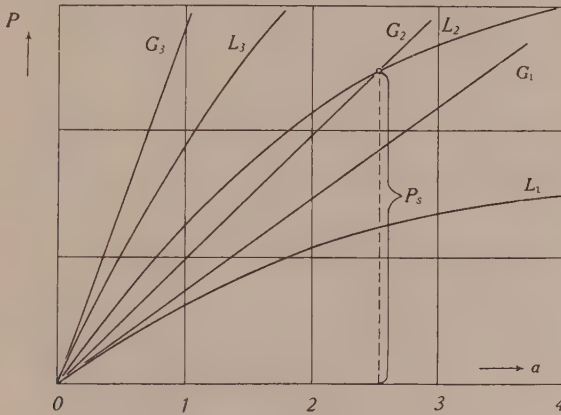


Fig. 10.

Gerade, gegeben durch (4b). Ausser dem Nullpunkt tritt kein weiterer Schnittpunkt auf und damit auch keine spontane Polarisation. Wächst nun mit der Temperatur die Dipolzahl $n_D(T)$ hinreichend schnell, so kann der für die Temperatur T_2 veranschaulichte Fall eintreten, dass ein weiterer Schnittpunkt und damit eine spontane Polarisation P_s existiert. In diesem Gebiet ist die Substanz seignette-elektrisch. Bei weiterer Temperaturerhöhung kann zwar die Steilheit der Geraden beliebig grösser werden, nicht aber der Scheitelwert der L -Kurve, da die Dipolzahl einem Sättigungswert zustreben wird. Also ergibt sich auch für eine hinreichend

hohe Temperatur keine spontane Polarisation mehr, sondern nur Paraelektrizität. Diese drei Gebiete werden durch zwei charakteristische Temperaturen Θ_1 und Θ_2 getrennt, die in Analogie zum Ferromagnetismus als *Curie-Punkte* bezeichnet werden. Für diese Temperaturen werden die Geraden G zu Tangenten an die Kurven L im Nullpunkt.

Bezeichnet man mit $L'(0)$ die Ableitung der Langevin'schen Funktion im Nullpunkt, so gilt für die Curie-Punkte:

$$\frac{k\Theta_{1,2}}{\gamma_D \mu} = \frac{n_D(\Theta_{1,2}) \mu}{3(1 - \gamma_U A)}$$

oder

$$\Theta_{1,2} = \frac{n_D(\Theta_{1,2}) \mu^2 \gamma_D}{3k(1 - \gamma_U A)}. \quad (5)$$

Die Curie-Temperaturen Θ_1 und Θ_2 ergeben sich hiernach als wohldefinierte Punkte, sofern für $n_D(\Theta)_1$ und $n_D(\Theta)_2$ die bei denselben

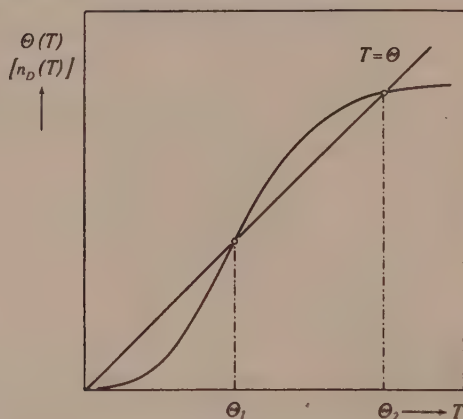


Fig. 11.

Temperaturen vorhandenen Dipolzahlen eingesetzt werden. Im Anschluss an MÜLLER⁸⁾ kann man jedoch die Curie-Temperatur als eine Funktion $\Theta(T)$ der Temperatur auffassen und $n_D(T)$ als Temperaturfunktion bestehen lassen, so dass an Stelle von (5) die Gleichung tritt:

$$\Theta(T) = \frac{\mu^2 \gamma_D}{3k(1 - \gamma_U A)} \cdot n_D(T).$$

Man findet dann die Curie-Punkte, indem man die Kurve $\Theta(T)$ mit der Geraden $\Theta = T$ schneidet. $n_D(T)$ bzw. $\Theta(T)$ hat nach KURTSCHATOV⁵⁾ und MÜLLER⁸⁾ für Seignettesalz ungefähr den

Charakter der Kurve in Fig. 11. In Übereinstimmung mit unserer Aussage über das Anwachsen der Dipolzahl auf Grund des Verlaufes der Dielektrizitätskonstanten ϵ_a , hat sich auch beim Seignettesalz gezeigt, dass am oberen Curie-Punkt praktisch alle Dipole frei sind und damit zur Polarisierung beitragen.

Auf Grund der gemachten Ansätze soll nun vorerst der Temperaturverlauf der Suszeptibilität χ_c von KH_2PO_4 in Richtung der c -Achse berechnet werden, und zwar im paraelektrischen Gebiet für hohe Temperaturen, d. h. für

$$T > \Theta_2.$$

T sei so gross und das äussere Feld E so klein, dass $\mu F/kT \ll 1$ ist. In diesem Falle kann man die vollständigen Ansätze (3a) und (3b) vereinfachen, indem man die Langevin'sche Funktion für $a \ll 1$ entwickelt:

$$L(a) \rightarrow a \cdot L'(0) = a/3; \text{ d. h.}$$

$$P = \frac{n_D(T) \mu \cdot a}{3(1 - \gamma_V A)} + \frac{A}{1 - \gamma_V A} \cdot E. \quad (6)$$

$$a = \frac{\mu E}{kT} + \frac{\gamma_D \mu P}{kT}.$$

Durch Einsetzen von a in (6) und Auflösen nach P ergibt sich

$$P = \frac{3kTA + n_D(T)\mu^2}{3kT(1 - \gamma_V A) - n_D(T)\mu^2\gamma_D} \cdot E.$$

Daraus erhält man die Suszeptibilität $\chi = dP/dE$.

$$\chi = \frac{3kTA + n_D(T)\mu^2}{3kT(1 - \gamma_V A) - n_D(T)\gamma_D\mu^2}. \quad (7)$$

Um die Ähnlichkeit dieser Formel mit dem Curie-Weiss'schen Gesetz deutlicher in Erscheinung treten zu lassen, kann man unter Verwendung des Ausdrucks (5) für die Curie-Temperatur Θ_2 das Glied $n_D(T)\gamma_D\mu^2$ ersetzen, wodurch sich für (7) die Form ergibt

$$\chi = \frac{3kTA + n_D(T)\mu^2}{3kT(1 - \gamma_V A)(T - \varrho\Theta_2)}, \quad (7a)$$

wobei ϱ durch die Gleichung definiert ist:

$$n_D(T) = \varrho \cdot n_D(\Theta_2).$$

ϱ ist also das Verhältniss der Zahl der Dipole bei einer bestimmten Temperatur T zur Zahl am oberen Curie-Punkt und ist damit selber eine Temperaturfunktion. Berücksichtigt man noch, dass die Suszeptibilität des Untergrundes

$$\chi_0 = \frac{A}{1 - \gamma_U A}$$

ist, so kann man hiermit und durch Trennen des Ausdrucks (7a) für die Suszeptibilität schreiben:

$$\chi = \chi_0 \frac{T}{T - \varrho \Theta_2} + \frac{n_D(T) \mu^2}{3k(1 - \gamma_U A)} \frac{1}{T - \varrho \Theta_2}.$$

Da ϱ den Wert 1 nicht stark übersteigt, kann man für sehr hohe Temperaturen $T \gg \Theta_2$ noch weiter vereinfachen und an Stelle von $n_D(T)$ die Gesamtzahl N_D der Dipole pro cm^3 setzen. Damit erhält man die dem Curie-Weiss'schen Gesetz entsprechende Formel

$$\chi = \chi_0 + \frac{N_D \cdot \mu^2}{3k(1 - \gamma_U A)} \frac{1}{T - \Theta_2}. \quad (8)$$

Für die weitere Untersuchung soll jedoch die vollständige Formel (7a) verwendet werden. Sie gibt die Möglichkeit, aus einem bei hohen Temperaturen gemessenen Wert von χ die Polarisierbarkeit A des Untergrundes abzuschätzen und dann den Temperaturverlauf von χ zu berechnen, wenn die übrigen Grössen, wie μ , $n_D(T)$, ϱ und γ_U festgesetzt werden.

Obschon die Träger der Dipole auch bei den neuen seignetteelektrischen Substanzen nicht mit Sicherheit bekannt sind, kann aus der strukturanalytischen Arbeit von WEST¹⁶⁾ geschlossen werden, dass H—O—H-, also Wasser-Dipole, nicht existieren, wohl aber können O—H-Gruppen oder Gruppen von der Art O:H:O die Dipole liefern. Bei der letzten Art handelt es sich nicht um Atome in Valenzbindung, sondern in der besonders von BERNAL und MEGAW²¹⁾ diskutierten und bei KH_2PO_4 festgestellten *Hydrogen*-Bindung. In beiden möglichen Fällen müsste man jedem Molekül KH_2PO_4 *zwei* Dipole zuschreiben, und zwar von der Grössenordnung des O—H-Dipols, also etwa $1,6 \cdot 10^{-18}$ ESE. Die maximale in einem cm^3 enthaltene Dipolzahl ist somit

$$N_D = 2,08 \cdot 10^{22}.$$

Leider kann man über ϱ keine genauen Angaben machen; es soll jedoch für eine erste Näherung konstant und gleich 1 gesetzt

werden, d. h. vom oberen Curie-Punkt an aufwärts soll sich die Dipolzahl nicht mehr ändern und ungefähr gleich der Maximalzahl N_D sein.

Der Lorentz-Faktor wird von $4\pi/3$ nicht wesentlich abweichen, da das Achsenverhältnis der tetragonalen Elementarzelle des KH_2PO_4 $c/a = 0,94$ ist. Für diesen Wert ergibt sich nach MÜLLER²²⁾ für ein einfaches tetragonales Gitter ungefähr $\gamma_U = 5$.

Berechnet man mit diesen Werten aus der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_c = 29$ für $T = 273^\circ$ die Polarisierbarkeit A des Untergrundes, so ergibt sich für A der Wert 0,109 und daraus mit dem oben gegebenen γ_U die Dielektrizitätskonstante des Untergrundes

$$\underline{\epsilon_0 = 4,0}.$$

Dieser Wert ist durchaus von richtiger Grösse.

Durch Anschluss an die ϵ_c -Werte für die Temperatur $T = 273^\circ$ kann nun der gesamte Verlauf von ϵ_c bzw. $1/\chi_c$ mit der Temperatur bis in die Gegend des oberen Curie-Punktes berechnet werden. Die Tabelle 2 stellt das Resultat der Rechnung für einige Temperaturen im Vergleich mit den experimentell ermittelten Werten dar. Überdies sind die berechneten Werte in Fig. 7 eingetragen.

Tabelle 2.

T	$\frac{1}{\chi_c}$ exp.	$\frac{1}{\chi_c}$ ber.
300	0,512	0,532
275	0,463	0,463
250	0,405	0,403
225	0,340	0,335
200	0,272	0,262
175	0,200	0,189
150	0,120	0,102
125	0,036	0,033

Die Übereinstimmung ist in der Tat recht befriedigend; jedenfalls vermag das hergeleitete Gesetz schon unter den vereinfachten Annahmen den Verlauf der Suszeptibilität mit der Temperatur richtig wiederzugeben. Bei tiefen Temperaturen entstehen etwas zu hohe Werte für χ , offenbar deshalb, weil mit einer grösseren Dipolzahl gerechnet wurde als effektiv vorhanden ist.

Es bietet sich nun weiter die Möglichkeit, aus der Bedingung für den oberen Curie-Punkt den Lorentz-Faktor γ_D zu berechnen:

$$\gamma_D = \frac{3k\Theta_2(1 - \gamma_U A)}{n_D(\Theta_2)\mu^2}.$$

Mit einer wahrscheinlichen Dipolzahl von $n_D(\Theta_2) = 2 \cdot 10^{22}$ ergibt sich der Wert

$$\gamma_D = 0,42.$$

Dieser Betrag scheint sehr klein; er kann jedoch durch den speziellen Bau des Gitters und die Lage der Dipole innerhalb desselben bedingt sein. Eine empfindliche Probe für die Richtigkeit dieser Grösse ergibt sich jedoch aus der später zu behandelnden Berechnung des Temperaturverlaufes der spontanen Polarisation $P_s(T)$.

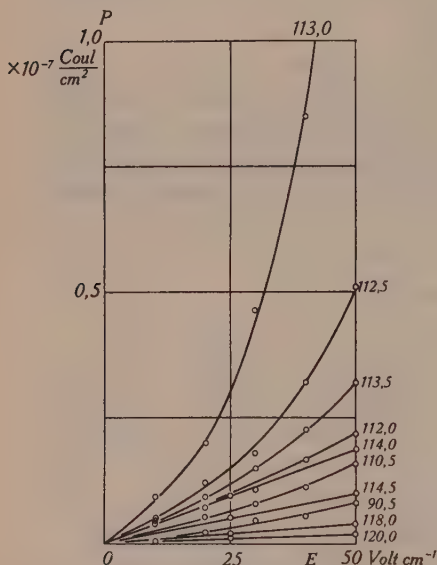


Fig. 12.

Polarisation bei kleinen Feldstärken.

$\text{KH}_2\text{PO}_4 \parallel c$

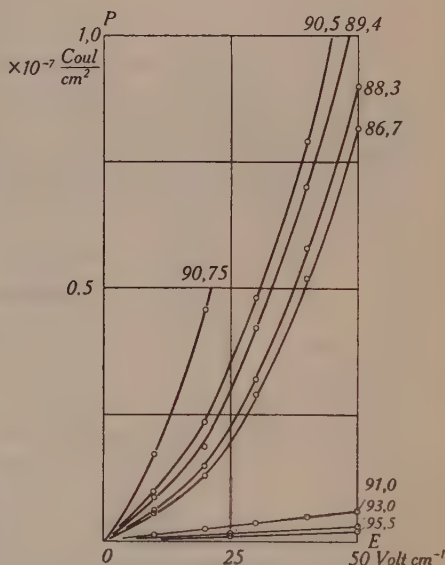


Fig. 13.

Polarisation bei kleinen Feldstärken.

$\text{KH}_2\text{AsO}_4 \parallel c$

3. Die Grösse der Polarisation wurde mit Gleichspannung gemessen und zwar bei Feldstärken bis zu 50 Volt/cm mit einem ballistischen Galvanometer. Die Resultate gehen aus den Fig. 12 und 13 hervor. Für $T < \Theta_2$ steigt die Polarisation ungefähr quadratisch mit der Feldstärke, für $T > \Theta_2$ dagegen genau linear. Die Steilheit der Kurven besitzt unmittelbar unterhalb des Curie-Punktes den grössten Wert. Stellt man die Polarisation oder die Dielektrizitätskonstante bei diesen kleinen Feldstärken als Funktion der Temperatur dar, so ergeben sich die charakteristischen Spitzen an den Curie-Punkten.

Bei höheren Feldstärken ist die gewöhnliche ballistische Methode nicht mehr zulässig infolge der merklich werdenden elektrischen Remanenz. Einwandfreie Ergebnisse lassen sich nur mittels der in Abschnitt III., 2, beschriebenen Schaltung erzielen. Damit ergeben sich die in den Fig. 14 und 15 dargestellten *Hysteresis*-Kurven. Sehr deutlich geht aus diesen die bei etwa 2000 Volt/cm eintretende *Sättigung* der Polarisierung hervor. Die Sättigungswerte sind für KH_2PO_4 $3,6 \cdot 10^{-6}$ Coul/cm² und $4,8 \cdot 10^{-6}$ Coul/cm² für KH_2AsO_4 je bei 78,5° absoluter Temperatur. Diese

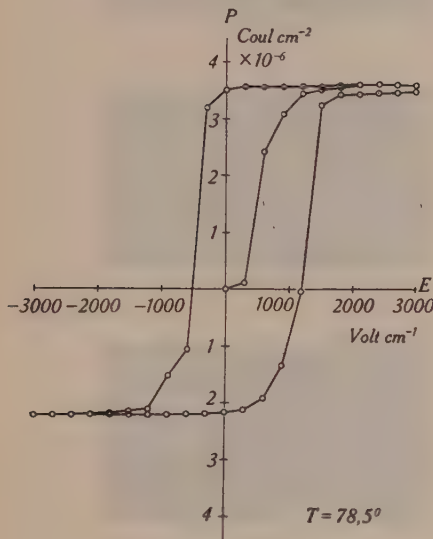


Fig. 14.

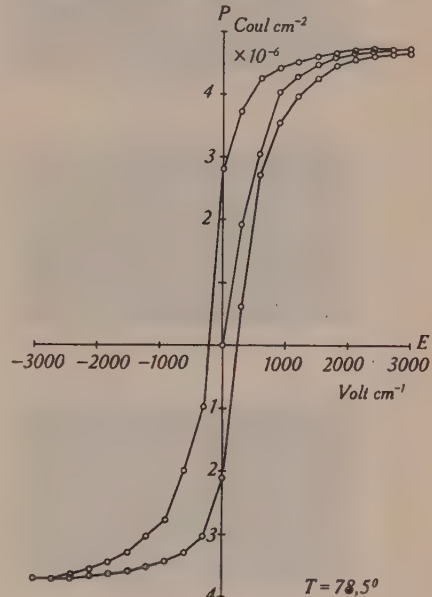
Hysteresis in KH_2PO_4 .

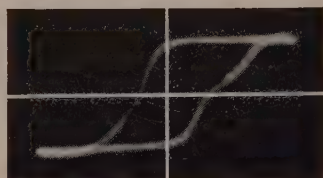
Fig. 15.

Hysteresis in KH_2AsO_4 .

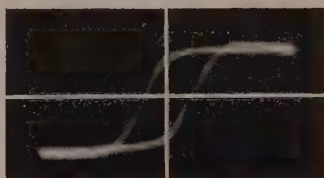
Werte übersteigen die am Seignette-Salz gemessenen um fast das 25-fache. Mit steigender Temperatur werden die Hysteresis-Schleifen immer schmäler und verschwinden am Curie-Punkt vollständig; ebenso verschwindet die Asymmetrie der Hysteresis-Kurven in bezug auf den Nullpunkt allmählich. Die *a*-Achse der Kristalle zeigt keine Hysteresis.

4. Von besonderem Interesse ist bei allen seignette-elektrischen Körpern der Verlauf der Sättigungspolarisation in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. Diese ist identisch mit der spontanen Polarisation, die innerhalb des Kristalles, ähnlich wie im ferromagnetischen Fall, bereichsweise herrscht, und lässt somit einen Vergleich mit dem Temperaturgang der spontanen Magneti-

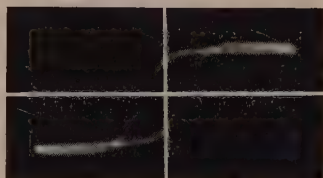
Tafel 1.
Hysteresis-Kurven. KH_2PO_4



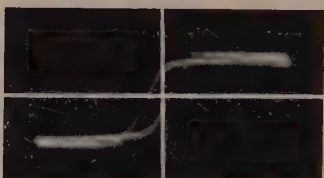
$T = 80^\circ$



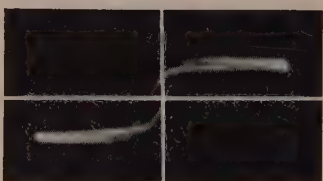
$T = 100^\circ$



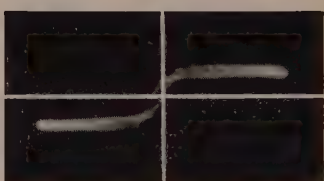
$T = 105^\circ$



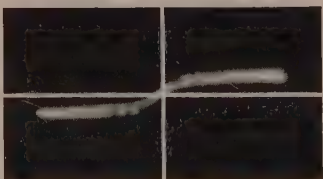
$T = 110^\circ$



$T = 112^\circ$



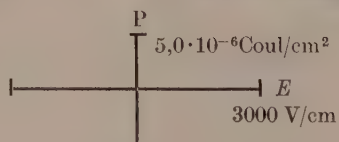
$T = 114^\circ$



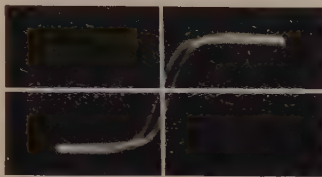
$T = 115^\circ$



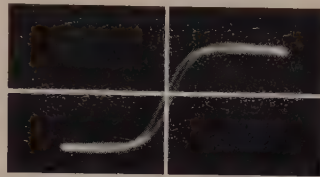
$T = 115,5^\circ$



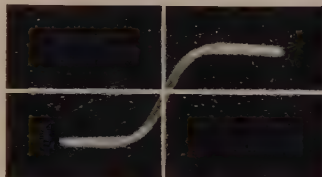
Tafel 2.
Hysteresis-Kurven. KH_2AsO_4



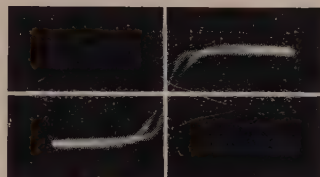
$T = 79^\circ$



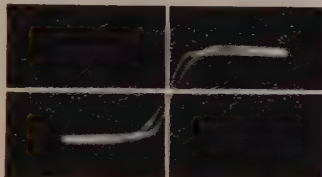
$T = 88^\circ$



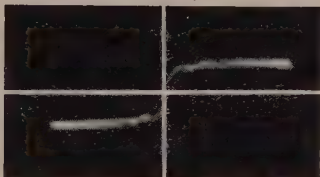
$T = 90^\circ$



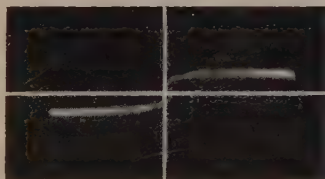
$T = 90,5^\circ$



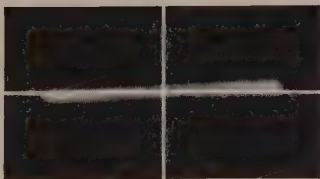
$T = 90,7^\circ$



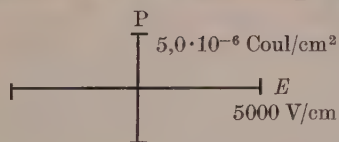
$T = 90,8^\circ$



$T = 91^\circ$



$T = 91,1^\circ$



sierung in ferromagnetischen Stoffen zu. Die Sättigungspolarisation wurde mit einer Braun'schen Röhre in der in Abschnitt III, 4, angegebenen Anordnung mit Wechselspannung von 50 Perioden als Funktion der Temperatur innerhalb des seignette-elektrischen Gebietes gemessen. Auf den Tafeln I und II sind die Oscillogramme je einer Messreihe an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 abgebildet. Die Amplitude des angelegten Feldes betrug 3000—5000 Volt/cm. In beiden Fällen ist mit steigender Temperatur ausser dem Schmälerwerden der Hysteresis-Schleifen eine erst langsame, später aber rasche Abnahme der Sättigungspolarisation bei Annäherung an die

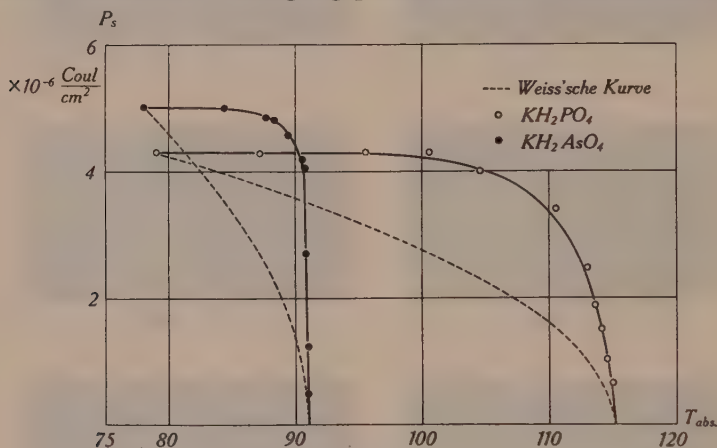


Fig. 16.

Temperaturabhängigkeit der Sättigung-Polarisation.

Curie-Punkte zu beobachten. Stellt man diese bzw. die mit ihr identische spontane Polarisation P_s als Funktion der absoluten Temperatur dar, so ergeben sich die zwei aus Fig. 16 hervorgehenden Kurven. Der maximal beobachtete Wert der spontanen Polarisation beträgt danach bei KH_2PO_4 $4,3 \cdot 10^{-6}$ und bei KH_2AsO_4 $5,0 \cdot 10^{-6}$ Coul/cm². Diese Werte sind etwas grösser als die statisch ermittelten, jedoch als die zuverlässigeren anzusehen, da die statische Methode nicht streng quantitativ arbeitet.

Auffallend ist der ausserordentlich steile Abfall der spontanen Polarisation unmittelbar vor den Curie-Punkten, besonders bei KH_2AsO_4 . Nach der gewöhnlichen Weiss'schen Theorie verläuft die entsprechende Kurve viel flacher. Dies rührt davon her, dass die Zahl der Dipole nicht konstant ist, sondern mit steigender Temperatur zunimmt. Dieser Effekt überlagert sich der mit steigender Temperatur fortwährend geringer werdenden Ordnung, so dass bei tiefen Temperaturen die Abnahme der spontanen

Polarisation infolge der immer geringer werdenden Orientierung durch die Zunahme der Dipolzahl kompensiert wird. Der Abfall erfolgt dadurch später, dafür aber umso steiler. In der Tat lässt sich der Temperaturgang der spontanen Polarisation auf Grund der im letzten Abschnitt entwickelten Theorie auch quantitativ verfolgen. Allerdings weiss man zahlenmässig zu wenig über das Anwachsen der Dipolzahl mit steigender Temperatur; um daraus die Grösse der Polarisation direkt zu berechnen, muss man sich daher darauf beschränken, umgekehrt aus der spontanen Polarisation die Dipolzahl als Funktion der Temperatur zu ermitteln.

Unter Verwendung von Gleichung (5) können die für den Fall $E = 0$ spezialisierten Grundgleichungen (4a) und (4b) auf die Form gebracht werden

$$P_s(T) = \frac{3k\Theta}{\gamma_D \mu} \varrho(T) \cdot L(a) \quad (9a)$$

$$P_s(T) = a \frac{kT}{\gamma_D \mu}. \quad (9b)$$

Da man P_s als Funktion der Temperatur kennt, kann man aus (9b) für jede Temperatur den zugehörigen a -Wert berechnen und durch Einsetzen desselben in (9a) wird $\varrho(T)$ unter Zugrundelegung der früher angegebenen Werte für γ_D und μ ermittelt. Das Resultat der Rechnung mit den zugehörigen Dipolzahlen $n_D(T)$ ist für KH_2PO_4 in Tabelle 3 zusammengestellt.

Tabelle 3.

T	$\varrho(T)$	$n_D(T) \cdot 10^{-22}$
78,5	0,712	1,424
87	0,785	1,570
95	0,835	1,670
100	0,895	1,790
104	0,923	1,846
111,5	0,984	1,978
113,5	0,998	1,996
114,5	1,000	2,000
115	1,000	2,000

Es wurde angenommen, dass am oberen Curie-Punkt $\Theta_2 = 115^\circ$ die Zahl der Dipole $n_D(\Theta_2) = 2 \cdot 10^{22}$ pro cm^3 beträgt. Da in dieser Annahme eine gewisse Willkür steckt, darf den absoluten Werten der Dipolzahl kein zu grosses Gewicht beigemessen werden. Beim

heutigen Stand der Kenntnisse kann es sich aber auch nicht darum handeln, ein so verwickeltes Phänomen, wie das der Seignette-Elektrizität quantitativ völlig streng zu behandeln. Es darf als eine hinreichend gute Leistung der Theorie angesehen werden, wenn der von der Weiss'schen Kurve stark abweichende Verlauf der spontanen Polarisierung durch eine einfache Temperaturabhängigkeit der Dipolzahl erklärt wird. Wie Fig. 17 zeigt, ergibt sich ein praktisch geradliniger Anstieg der Dipolzahl innerhalb des experimentell zugänglichen Temperaturgebietes. Über den Gang bei tieferen Temperaturen kann vorläufig nichts ausgesagt werden, bevor die genaue Untersuchung dieser Substanzen bis ins Wasserstoff- bzw. Heliumgebiet fortgesetzt werden kann. Die entsprechenden Versuche sind im Mond-Laboratory in Cambridge bereits in Angriff genommen worden.

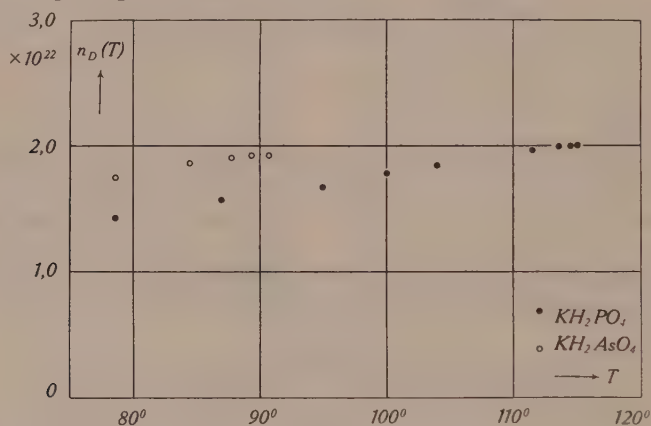


Fig. 17.

Dipolzahl als Funktion der Temperatur.

5. Während der Aufnahme der Hysteresis-Kurven machte sich übrigens häufig eine unangenehme Störung bemerkbar. Hierzu wurden meistens Kristalle von 1—1.5 cm² Elektrodenfläche verwendet. Waren die Kristalle unterhalb die Curie-Temperatur abgekühlt, so genügte schon ein relativ kleines Wechselfeld, um die Kristalle zu zerstören. Diese zersplitterten dabei in kleinere und grössere parallelepipedische Stücke, deren seitliche Grenzflächen ausnahmslos parallel zu den *a*-Achsen der Kristallpräparate liefen und durchaus das Aussehen von Spaltflächen zeigten. Ein einzelner solcher Splitter hielt nachträglich viel höheren Feldstärken stand, als zur Sättigung notwendig ist.

Es zeigte sich weiter, dass die Kristalle auch ohne das Anlegen eines äusseren Feldes sehr zum Zerspringen neigen, wenn sie mit

offenen, d. h. nicht kurzgeschlossenen Elektroden durch Erwärmen aus dem seignette-elektrischen in das para-elektrische Gebiet übergehen. Bei diesen Versuchen traten an den Elektroden Potentialdifferenzen bis zu 4000 Volt auf, so dass infolge des reziproken Piezoeffektes Deformationen auftreten, welche den Kristall möglicherweise zerstören. Die frei werdende Ladung entspricht im Mittel einer Polarisierung von etwa 10% des Sättigungswertes. Die beiden untersuchten Salze sind aus kristallographischen Gründen ebensowenig wie das Seignette-Salz pyro-elektrisch. Der beobachtete Effekt könnte daher als „falsche“, Pyroelektrizität bezeichnet werden. Er kann jedoch besser als Bestätigung einer bereichweisen spontanen Polarisierung aufgefasst werden, welche am Curie-Punkt verschwindet und dann Ladungen auf der Oberfläche des Kristalles zur Folge hat, wenn die Verteilung der Weiss'schen Bezirke innerhalb des Kristalles asymmetrisch ist. Dies steht im Einklang mit der beobachteten Asymmetrie der Hysteresis-Kurven, auf welche schon im vorhergehenden Abschnitt hingewiesen wurde.

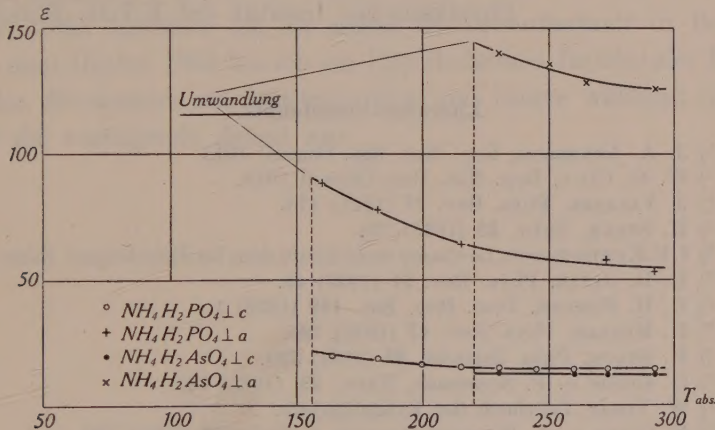


Fig. 18.

DK von $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ und $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$.

B. Die Ammonium-Salze ($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ und $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$).

Das Untersuchungsergebnis an den Kristallen der Salze $\text{NH}_4\text{N}_2\text{PO}_4$ und $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$ ist in Fig. 18 dargestellt. Diese Stoffe verhalten sich bei Zimmertemperatur völlig analog zu den entsprechenden Kali-Salzen. Die Dielektrizitätskonstante ϵ_c , parallel zur c -Achse gemessen, ist kleiner als ϵ_a . Die Werte sind für $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ $\epsilon_c = 14,5$ und $\epsilon_a = 55$ und für $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$ ist $\epsilon_c = 12,0$ und $\epsilon_a = 126$. Mit sinkender Temperatur steigen alle Werte stark

an bis zu einer plötzlich eintretenden Zerstörung der Kristalle. Diese erfolgt bei $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ bei etwa 155° und im Falle des $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$ bei 220° absoluter Temperatur. Sie äussert sich dadurch, dass die anfänglich homogenen, optischen klaren Kristallplatten bei diesen Temperaturen zu einer mikrokristallinen, bröckeligen Masse zerfallen, wodurch eine weitere Untersuchung der Dielektrizitätskonstanten bei tieferen Temperaturen verunmöglicht wird. Offenbar handelt es sich um eine Tieftemperatur-Umwandlung, die bis jetzt an diesen Substanzen noch nicht beobachtet worden ist. Die hohen Werte der Dielektrizitätskonstanten und namentlich ihr Temperaturgang sprechen aber auch bei diesen Kristallen für die Existenz von permanenten Dipolen und die Möglichkeit des Auftretens der Seignette-Elektrizität bei tiefen Temperaturen, falls sich keine Umwandlung vollziehen würde.

Herrn Prof. Dr. P. Scherrer bin ich für das stete Interesse, welches er dieser Arbeit entgegenbrachte und viele wertvolle Diskussionen im Zusammenhang mit diesen Problemen zu grossem Dank verpflichtet.

Physikalisches Institut der E.T.H. Zürich.

Literatur-Verzeichnis.

- 1) J. A. ANDERSON, Rep. Nat. Res. Council 1918.
- 2) W. G. CADY, Rep. Nat. Res. Council 1918.
- 3) J. VALASEK, Phys. Rev. **17** (1921) 475.
- 4) H. STAUB, Natw. **23** (1935) 728.
- 5) I. V. KURTSCHATOV, Le champ moléculaire dans les diélectriques. Paris 1936.
- 6) H. R. JAFFÉ, Phys. Rev. **51** (1937) 43.
- 7) R. H. FOWLER, Proc. Roy. Soc. **149** (1935) 1.
- 8) H. MÜLLER, Phys. Rev. **47** (1935) 725.
- 9) H. STAUB, Phys. Zeitschr. **35** (1934) 720.
- 10) G. BUSCH u. P. SCHERRER, Natw. **23**, (1935) 737.
- 11) W. VOIGT, Lehrbuch der Kristallphysik.
- 12) E. GIEBE u. A. SCHEIBE, Zeitschr. f. Phys. **33** (1925) 760.
- 13) G. STEULMANN, Zeitschr. f. Phys. **77** (1932) 114.
- 14) F. KELLER u. W. R. LEHMANN, Zeitschr. f. Phys. **88** (1934) 677.
- 15) O. HASSEL, Zeitschr. El. Chem. **31** (1925) 677.
- 16) S. B. HENDRICKS, Am. J. Sci. **14** (1927) 14.
- 17) J. WEST, Zeitschr. Krist. **74** (1930) 306.
- 18) G. BUSCH, H. P. A. **6** (1933) 315.
- 19) C. B. SAWYER u. C. H. TOWER, Phys. Rev. **35** (1930) 269.
- 20) R. BECKER, Theorie der Elektrizität II.
- 21) J. D. BERNAL u. H. D. MEGAW, Proc. Roy. Soc. **151** (1930) 384.
- 22) H. MÜLLER, Phys. Rev. **47** (1935) 947.

Lebenslauf.

Ich wurde am 12. September 1908 als Sohn des Franz Busch-Staub, Kaufmanns, in Zürich geboren und besuchte dort die Primar-, Sekundar- und die kantonale Industrieschule (Oberrealschule). Im Herbst 1927 trat ich an die Abteilung für Fachlehrer in Mathematik und Physik an der E.T.H. über und legte im Februar 1933 das Diplom als Physiker ab. Einen Unterbruch des Studiums im Jahre 1930 benutzte ich zu einem Studienaufenthalt in Berlin. Seit dem Herbst 1933 bin ich am Physikalischen Institut der Eidg. Techn. Hochschule als Assistent tätig und führte während dieser Zeit die vorliegende Arbeit aus.
